



Voo Nivelado - Avião a Jacto

Mecânica de Voo I – 7631
2º Ano da Licenciatura em Engenharia Aeronáutica

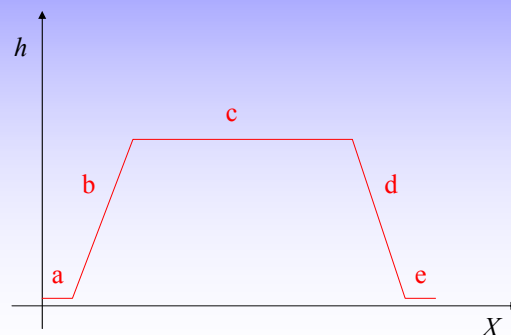
Pedro V. Gamboa - 2008



1. Voo de Cruzeiro (1)

O voo de uma aeronave é normalmente composto por várias fases diferentes. As fases de voo que formam um programa de voo simples, desde a origem até ao destino, são:

- a) taxi e decolagem;
- b) subida;
- c) cruzeiro;
- d) descida;
- e) aterragem e taxi.



Pedro V. Gamboa - 2008



1. Voo de Cruzeiro (2)

O voo de cruzeiro é a fase do voo em que a aeronave se desloca numa determinada altitude com velocidade “constante”.

Nesta fase de voo é comum definir os seguintes parâmetros:

- **Alcance instantâneo**, ou alcance por unidade de tempo, num determinado ponto da trajectória:

$$\frac{dX}{dt} = V$$

O alcance instantâneo, contudo, não é representativo da distância que a aeronave pode voar. Para isso teríamos que saber a quantidade de combustível que a aeronave pode gastar no voo de cruzeiro. É necessário definir outro tipo de alcance:



1. Voo de Cruzeiro (3)

- **Alcance específico**, ou alcance por unidade de combustível gasto, num determinado ponto da trajectória, dX/dW_{fuel} .

Uma relação já conhecida é aquela que nos fornece o combustível gasto por unidade de tempo, também denominada consumo de combustível:

$$\frac{dW_{fuel}}{dt} = cT$$

Tendo em conta que o gasto de combustível é igual à perda de peso da aeronave, caso não haja ejeção de carga ou lançamento de paraquedistas, por exemplo, podemos expressar a relação do gasto de combustível como uma relação da variação do peso da aeronave por unidade de tempo, ou seja

$$\frac{dW}{dt} = -cT$$



1. Voo de Cruzeiro (4)

Substituindo esta expressão na equação do alcance instantâneo obtém-se o alcance específico:

$$\frac{dX}{dW} = -\frac{V}{cT}$$

Esta relação também pode ser escrita na seguinte forma.

$$dX = -\frac{V}{cT} dW$$

Desta equação, por integração numérica ou analítica, pode determinar-se o alcance em função do combustível disponível ou o gasto de combustível para um dado alcance definido.



1. Voo de Cruzeiro (5)

- **Fracção de peso**, que é a relação entre o peso da aeronave no fim e no início de uma determinada distância de voo:

$$\frac{W_i - \Delta W}{W_i}$$

Ou, ainda, a fracção de peso para todo o voo de cruzeiro,

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{W_1 - W_{fuel}}{W_1} = 1 - \frac{W_{fuel}}{W_1} = 1 - \zeta$$

onde ζ é a razão de combustível do cruzeiro definida como o quociente entre o combustível gasto e o peso da aeronave no início do cruzeiro $\zeta = W_{fuel}/W_1$. Convém notar que todas estas equações são aplicáveis a qualquer tipo de aeronave sendo necessário, apenas, ter em conta a variação dos parâmetros de integração.



2. Voo de Cruzeiro do Turbojacto

De modo a prosseguir o estudo analítico do desempenho, é conveniente separar as aeronaves por tipo de motor com o seu respectivo modelo matemático. No caso particular de motores turbojacto, é bastante realista a aproximação da tracção não variar com a velocidade e variar em função da altitude e da posição do acelerador, isto é

$$T = T_0 \delta \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = T_0 \delta \sigma$$

na sua forma mais simples.

Nos mesmos motores também se considera o consumo específico constante para efeitos de análise preliminares

$$c = \text{const}$$



2.1. Tracção Requerida e Disponível

A tracção requerida, T_R , é igual ao arrasto, D . Logo

$$T_R = D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0} + \frac{2Kn^2W^2}{\rho V^2 S}$$

A tracção disponível, T_A , é dada pela equação do modelo do motor. No voo de cruzeiro a tracção disponível tem que ser igual ao arrasto para que a velocidade de voo seja constante e o factor de carga, n , é um pois $L=W$. Assim

$$T_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0} + \frac{2KW^2}{\rho V^2 S}$$

Note-se que a tracção disponível também é dada por

$$T_A = T = T_0 \delta \sigma$$



2.2. Velocidade em Voo Nivelado

Caso a tracção disponível fosse uma função da velocidade a equação acima teria que ser resolvida iterativamente para valores de V . Alternativamente, poder-se-ia obter a velocidade de voo graficamente.

No caso em que a tracção disponível não é afectada pela velocidade pode resolver-se a equação em ordem à velocidade. Logo

$$\frac{1}{2} \rho S C_{D0} V^4 - TV^2 + \frac{2KW^2}{\rho S} = 0$$

Rearranjando

$$\frac{\rho C_{D0}}{2} \frac{S}{W} V^4 - \frac{T}{W} V^2 + \frac{2K}{\rho} \frac{W}{S} = 0$$

Resolvendo em ordem a V obtém-se

$$V = \left\{ \frac{(T/W)(W/S)}{\rho_0 \sigma C_{D0}} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C_{D0}K}{(T/W)^2}} \right] \right\}^{1/2}$$

Pedro V. Gamboa - 2008

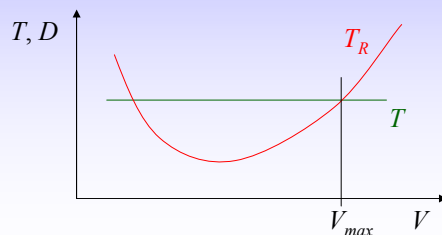


2.3. Velocidade Máxima

Quando, na equação acima, a tracção máxima disponível do motor é utilizada obtém-se a velocidade máxima da aeronave para o peso e altitude de voo.

$$V_{\max,h} = \left\{ \frac{(T_{\max,h}/W)(W/S)}{\rho_0 \sigma C_{D0}} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4C_{D0}K}{(T_{\max,h}/W)^2}} \right] \right\}^{1/2}$$

É necessário assegurar que esta velocidade máxima é inferior à velocidade de Mach divergente e à velocidade máxima estrutural da aeronave.



Pedro V. Gamboa - 2008

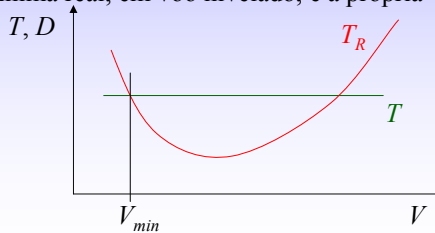


2.4. Velocidade Mínima

Quando da equação da velocidade em voo nivelado se usa o sinal negativo antes da raiz quadrada obtém-se a velocidade mínima teórica da aeronave.

$$V_{\min,h} = \left\{ \frac{(T_{\max,h}/W)(W/S)}{\rho_0 \sigma C_{D0}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4C_{D0}K}{(T_{\max,h}/W)^2}} \right] \right\}^{1/2}$$

Se a velocidade mínima obtida por esta expressão for menor do que a velocidade de perda então, a velocidade mínima real é a velocidade de perda. Caso contrário, a velocidade mínima real, em voo nivelado, é a própria velocidade mínima teórica.



Pedro V. Gamboa - 2008



2.5. Tecto Máximo (1)

O tecto máximo de uma aeronave, h_c , é a altitude máxima que a aeronave pode atingir com o motor a produzir a tracção máxima. Como será visto mais tarde, o tecto máximo também pode ser visto como a altitude em que a razão de subida da aeronave com tracção máxima é nula. Outra interpretação é que o tecto máximo da aeronave é a altitude em que $V_{\max,h}$ é igual à velocidade de arrasto mínimo. Assim, o tecto máximo para um dado peso pode ser obtido através da condição de $D_{\min}$ da curva D em função de V com os motores da aeronave produzindo a tracção máxima para a altitude em questão

$$\frac{D_{\min}}{W} = \frac{T_{\max,hc}}{W}$$

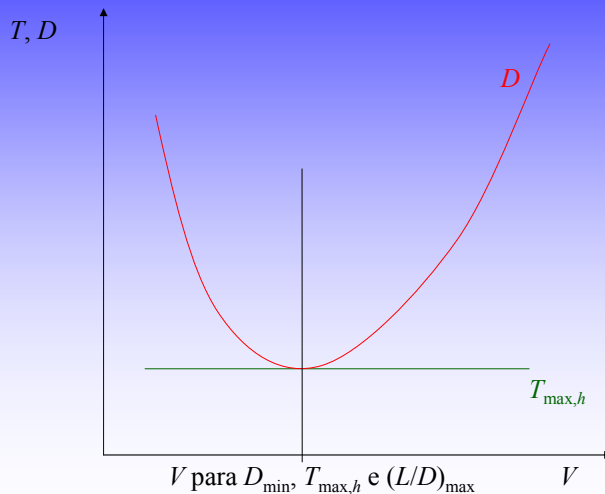
Como no cruzeiro $T=D$ e $L=W$ e escrevendo $E=L/D$, logo $L/D_{\min}=E_{\max}$ tem-se

$$\frac{D_{\min}}{W} = \frac{T_{\max,hc}}{W} = \frac{1}{E_{\max}}$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.5. Tecto Máximo (2)



Pedro V. Gamboa - 2008



2.5. Tecto Máximo (3)

Normalmente o fabricante do motor fornece o valor da tracção máxima ao nível do mar, T_0 . Se considerarmos o modelo simplificado da tracção, em que a tracção é proporcional à densidade, tanto na troposfera como na estratosfera, $T_{\max,h} = T_0 \sigma$, a equação do tecto máximo fica

$$\frac{T_0 \sigma_c}{W} = \frac{1}{E_{\max}}$$

A determinação da razão das densidades no tecto máximo, σ_c , permite encontrar a altitude correspondente.

$$\sigma_c = \frac{W}{T_0} \frac{1}{E_{\max}} \Rightarrow h_c$$

É comum, na utilização de tabelas de altitude em função da densidade, determinar a altitude correspondente ao tecto da aeronave em múltiplos de altitudes. Se, por exemplo, o tecto for de 12356m, então 12300m seria o seu valor expresso como múltiplo inferior de 100m.

Pedro V. Gamboa - 2008



2.6. Tecto para T menor que $T_{\max}$

À semelhança do tecto máximo, pode definir-se o tecto duma aeronave para uma dada tracção inferior à tracção máxima, $h_{c,T}$, utilizando a equação do tecto máximo para o valor da tracção desejado

$$\sigma_{c,T} = \frac{W}{T_0 \delta} \frac{1}{E_{\max}} = \frac{W}{T} \frac{1}{E_{\max}} \Rightarrow h_{c,T}$$



2.7. Programas de Voo

A integração numérica de cada uma das formas da equação do alcance específico permite conhecer a distância que a aeronave pode voar com uma determinada quantidade de combustível. A integração analítica é também possível desde que se considere alguns parâmetros inalterados durante o voo de cruzeiro. O mais natural seria considerar, em primeiro lugar, que a altitude e a velocidade são constantes. Este programa de voo, por exemplo, é designado de programa de cruzeiro com h e V constantes. Existem 3 programas de voo que têm solução analítica:

- Programa h - V ;
- Programa V - C_L ;
- Programa h - C_L .



2.8. Alcance (1)

O alcance é a distância que uma aeronave pode voar, em regime de cruzeiro, com uma determinada quantidade de combustível. Podemos visualizar o alcance a partir da equação básica do movimento que determina para um ponto da trajectória que

$$\frac{dX}{dt} = V$$

Esta equação representa o alcance instantâneo.

Sabendo que a redução do peso da aeronave é dada por $dW/dt = -cT$ obtém-se o alcance específico

$$\frac{dX}{dW} = -\frac{V}{cT}$$

que pode ser escrito na forma

$$dX = -\frac{V}{cT} dW$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.8. Alcance (2)

Tendo em conta as equações que governam o voo nivelado, $T=D$ e $L=W$, e escrevendo $E=L/D$ podemos escrever o alcance específico na seguinte forma

$$dX = -\frac{VE}{c} \frac{dW}{W}$$

A velocidade também pode ser escrita como

$$V = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho_0 \sigma C_L}}$$

Substituindo esta expressão e colocando $E=C_L/C_D$ obtém-se

$$dX = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \sigma S}} \frac{C_L^{1/2}}{C_D} \frac{dW}{W^{1/2}}$$

Esta é uma terceira forma de escrever o alcance específico.

Pedro V. Gamboa - 2008



2.8.1. Alcance no Programa h - V (1)

Este caso é o mais complicado de analisar analiticamente.

Neste programa de voo de cruzeiro, para mantermos a velocidade constante, e sendo a altitude também constante, o valor de C_L tem que variar proporcionalmente com a variação do peso da aeronave, isto é

$$\frac{W}{C_L} = \left(\frac{W}{C_L} \right)_1 = k$$

O índice 1 refere-se às condições no início do cruzeiro, quando todos os parâmetros são conhecidos. O valor de C_{L1} pode ser determinado através do valor da velocidade.

Por outro lado, na expressão do alcance específico, com V e c constantes, é necessário exprimir E em função de W através de

$$E = \frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2} = \frac{W/k}{C_{D0} + K(W/k)^2} = \frac{k}{K} \frac{W}{(k^2 C_{D0}/K + W^2)}$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.8.1. Alcance no Programa h - V (2)

Designando

$$a = \frac{k}{K} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{k^2 C_{D0}}{K} = \left(\frac{W_1}{C_{L1}} \right)^2 \frac{C_{D0}}{K}$$

tem-se

$$E = a \left(\frac{W}{b^2 + W^2} \right)$$

Logo o alcance específico

$$dX = - \frac{VE}{c} \frac{dW}{W}$$

fica

$$dX = - \frac{Va}{c} \left(\frac{dW}{b^2 + W^2} \right)$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.8.1. Alcance no Programa h - V (3)

O alcance, neste programa é dado por

$$\int_1^2 dX = -\frac{Va}{c} \int_1^2 \frac{dW}{b^2 + W^2}$$

Resolvendo o integral obtém-se

$$X_{h-V} = -\frac{Va}{c} \frac{1}{b} \left[\arctg\left(\frac{W_2}{b}\right) - \arctg\left(\frac{W_1}{b}\right) \right]$$

ou, após manipulação

$$X_{h-V} = \frac{2VE_{\max}}{c} \arctg\left[\frac{E_1 \zeta}{2E_{\max}(1 - KE_1 C_{L1} \zeta)} \right]$$

onde E_1 é a razão de planeio no início do cruzeiro (C_{L1}/C_{D1}) e $E_{\max}$ é a razão de planeio máxima dada por

$$E_{\max} = (4C_{D0}K)^{-1/2}$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.8.1. Alcance no Programa h - V (4)

Nesta equação do alcance aparece a fracção de peso de combustível usado no cruzeiro, dada por

$$\zeta = \frac{\Delta W_{fuel}}{W_1}$$

e que expressa o quociente entre o peso de combustível usado no voo de cruzeiro e o peso do avião no início do voo. Associada à fracção e peso de combustível está uma outra grandeza muito utilizada que é a razão dos pesos do cruzeiro que, como já visto, é definida como o quociente entre o peso da aeronave no fim do cruzeiro e o peso da aeronave no início do cruzeiro:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{W_1 - \Delta W_{fuel}}{W_1} = 1 - \zeta$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.8.2. Alcance no Programa $V-C_L$ (1)

Nesta programa de voo de cruzeiro, a velocidade e o coeficiente de sustentação permanecem constantes durante todo o voo. A equação do alcance específico adequada para a integração analítica é

$$dX = -\frac{VE}{c} \frac{dW}{W}$$

a qual pode ser facilmente resolvida em

$$X_{V-C_L} = -\frac{VE}{c} (\ln W_2 - \ln W_1)$$

ou

$$X_{V-C_L} = \frac{VE}{c} \ln \frac{W_1}{W_2} = \frac{VE}{c} \ln \frac{1}{1-\zeta}$$



2.8.2. Alcance no Programa $V-C_L$ (2)

Da equação da velocidade

$$V = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho_0 \sigma C_L}}$$

pode verificar-se que a razão W/σ permanece constante. Isto significa que à medida que o peso diminui devido ao consumo de combustível a altitude de voo tem que aumentar. Por este motivo, este programa de cruzeiro é conhecido como “cruise climb”.

Deve também notar-se, das relações de tracção

$$T(h_1) = \frac{W_1}{E_1} = T_0 \delta \sigma_1 \quad \text{e} \quad T(h_2) = \frac{W_2}{E_1} = \frac{W_1 \sigma_2}{E_1 \sigma_1} = T_0 \delta \sigma_2$$

que o ajuste do motor não precisa de ser alterado durante o voo para o modelo de tracção $T(h)/T_0 = \sigma$ tanto na troposfera como na estratosfera.

Este programa de cruzeiro não é, normalmente, aprovado pelas autoridades de controlo de voo pois implica voar em diferentes altitudes ao longo do cruzeiro.



2.8.3. Alcance no Programa $h-C_L$ (1)

Nesta programa de voo de cruzeiro, a altitude e o coeficiente de sustentação permanecem constantes durante todo o voo. A equação do alcance específico adequada para a integração analítica é

$$dX = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \sigma S}} \frac{C_L^{1/2}}{C_D} \frac{dW}{W^{1/2}}$$

Após integração, o alcance é dado por

$$X_{h-C_L} = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \sigma S}} \frac{C_L^{1/2}}{C_D} \times 2(\sqrt{W_2} - \sqrt{W_1})$$

Como h e C_L são constantes a velocidade tem que reduzir à medida que o peso da aeronave diminui com o consumo de combustível. A razão de planeio também permanece constante. Sabendo que no início do voo

$$V_1 = \sqrt{\frac{2W_1/S}{\rho_0 \sigma C_L}} \quad \text{e} \quad E_1 = \frac{C_L}{C_D}$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.8.3. Alcance no Programa $h-C_L$ (2)

então

$$X_{h-C_L} = -\frac{2}{c} \frac{E_1 V_1}{\sqrt{W_1}} (\sqrt{W_2} - \sqrt{W_1}) = \frac{2E_1 V_1}{c} (1 - \sqrt{W_2}/\sqrt{W_1})$$

ou

$$X_{h-C_L} = \frac{2E_1 V_1}{c} (1 - \sqrt{1 - \zeta})$$

A tracção do motor tem que ser continuamente ajustada para se adaptar a $T=W/E$ durante a redução de peso da aeronave.

Pedro V. Gamboa - 2008



2.9. Autonomia

A autonomia, ou o tempo de voo, dos diversos programas de voo de cruzeiro pode ser calculada através da integração da autonomia específica, isto é

$$\frac{dt}{dW} = -\frac{1}{cT}$$

ou ainda

$$dt = -\frac{1}{cT} dW = -\frac{E}{c} \frac{dW}{W}$$



2.9.1. Autonomia no Programa $h-V$

No caso particular deste de voo de cruzeiro, a integração pode ser evitada desde que se utilize a relação do alcance dividida pela velocidade que é constante.

Assim,

$$t_{h-V} = \frac{X_{h-V}}{V}$$

o que resulta em

$$t_{h-V} = \frac{2E_{\max}}{c} \operatorname{arctg} \left[\frac{E_1 \zeta}{2E_{\max} (1 - KE_1 C_{L1} \zeta)} \right]$$



2.9.2. Autonomia no Programa $V-C_L$

Nesta programa de voo de cruzeiro, o C_L é constante logo o valor de E também é constante. Assim, a integração é imediata com o seguinte resultado

$$t_{V-C_L} = \frac{E}{c} \ln \frac{W_1}{W_2} = \frac{E}{c} \ln \frac{1}{1-\zeta}$$



2.9.3. Autonomia no Programa $h-C_L$

O resultado desde programa de voo é igual ao programa $V-C_L$ pois o C_L é constante resultando em E constante. Assim,

$$t_{h-C_L} = \frac{E}{c} \ln \frac{W_1}{W_2} = \frac{E}{c} \ln \frac{1}{1-\zeta}$$

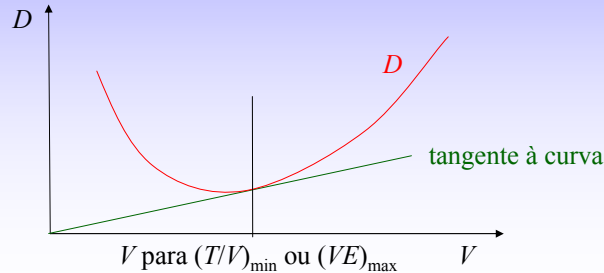


2.10. Optimização do Alcance (1)

Da relação do alcance específico,

$$dX = -\frac{VE}{c} \frac{dW}{W}$$

Pode ver-se que o alcance é maximizado, desde que c seja constante, quando o produto VE tem o seu valor máximo. Esta situação corresponde ao valor máximo de $C_L^{1/2}/C_D$ que ocorre no ponto da tangente do diagrama D em função de V .



Pedro V. Gamboa - 2008



2.10. Optimização do Alcance (2)

Para maximizar o alcance temos, então, que maximizar VE . Sendo

$$V = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho_0 \sigma C_L}} \quad \text{e} \quad E = \frac{C_L}{C_D}$$

logo

$$VE = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho_0 \sigma}} \frac{C_L^{1/2}}{C_D}$$

Assim, VE é máximo quando $C_L^{1/2}/C_D$ é máximo ou $C_D/C_L^{1/2}$ é mínimo. Para obter o valor de C_L para $C_D/C_L^{1/2}$ mínimo deriva-se este último em ordem a C_L e iguala-se a zero.

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_D}{C_L^{1/2}} \right) = \frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_{D0} + KC_L^2}{C_L^{1/2}} \right) = \frac{d}{dC_L} (C_{D0} C_L^{-1/2} + KC_L^{3/2}) = 0$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.10. Optimização do Alcance (3)

Então

$$-\frac{1}{2}C_{D0}C_L^{-3/2} + \frac{3}{2}KC_L^{1/2} = 0$$

o que dá

$$C_{Lbr} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{3K}}$$

e

$$C_{Dbr} = \frac{4}{3}C_{D0}$$

Agora, substituindo estes resultados nas expressões de V e de E obtém-se

$$V_{br} = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho_0 \sigma C_{Lbr}}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \sigma} \left(\frac{W}{S} \right) \left(\frac{3K}{C_{D0}} \right)^{1/4}}$$



2.10. Optimização do Alcance (4)

e

$$E_{br} = \frac{C_{Lbr}}{C_{D0} + KC_{Lbr}^2} = \sqrt{\frac{3}{16KC_{D0}}}$$



2.10.1. Alcance Máximo Programa h - V (1)

Da equação do alcance deste programa de cruzeiro

$$X_{h-V} = \frac{2VE_{\max}}{c} \operatorname{arctg} \left[\frac{E_1 \zeta}{2E_{\max} (1 - KE_1 C_{L1} \zeta)} \right]$$

verifica-se que a maximização de VE não maximiza necessariamente o alcance devido à função do arco tangente. No entanto, se considerarmos o valor de V como sendo V de maior alcance com o valor de E_1 correspondente a E de maior alcance, temos uma aproximação da maximização do alcance neste programa de voo.

$$X_{br,h-V} \cong \frac{2V_{br}E_{\max}}{c} \operatorname{arctg} \left[\frac{E_{br} \zeta}{2E_{\max} (1 - KE_{br} C_{Lbr} \zeta)} \right]$$

onde o índice br indica “best range” (máximo alcance).

Consultar os livros de Hale e Ojha para derivação destes resultados.



2.10.1. Alcance Máximo Programa h - V (2)

O resultado anterior pode ser simplificado para

$$X_{br,h-V} \cong \frac{2V_{br}E_{\max}}{c} \operatorname{arctg} \left(\frac{0,433\zeta}{1 - 0,25\zeta} \right)$$



2.10.2. Alcance Máximo Programa $V-C_L$

O alcance neste programa de voo é dado por

$$X_{V-C_L} = \frac{VE}{c} \ln \frac{1}{1-\zeta}$$

Para maximizar o alcance temos, então, que maximizar VE , obtendo-se

$$X_{br,V-C_L} = \frac{V_{br}E_{br}}{c} \ln \frac{1}{1-\zeta}$$



2.10.3. Alcance Máximo Programa $h-C_L$

O alcance neste programa de voo é dado por

$$X_{h-C_L} = \frac{2V_1E}{c} (1 - \sqrt{1-\zeta})$$

Para maximizar o alcance temos, que maximizar V_1E . Assim

$$V_{1,br} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \sigma} \left(\frac{W_1}{S} \right) \left(\frac{3K}{C_{D0}} \right)^{1/4}}$$

O alcance máximo fica

$$X_{br,h-C_L} = \frac{2V_{1,br}E_{br}}{c} (1 - \sqrt{1-\zeta})$$

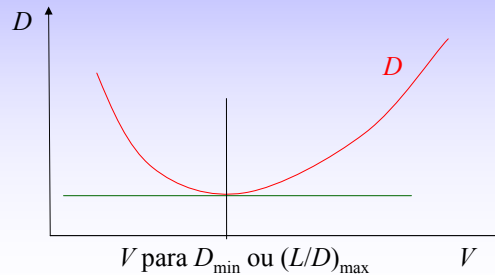


2.11. Optimização da Autonomia (1)

Da relação da autonomia específica,

$$dt = -\frac{E}{c} \frac{dW}{W}$$

Pode ver-se que a autonomia é maximizada, desde que c seja constante, quando E tem o seu valor máximo. Esta situação corresponde ao valor máximo de C_L/C_D ($E_{\max}$) que ocorre no ponto de arrasto mínimo D em função de V .



Pedro V. Gamboa - 2008



2.11. Optimização da Autonomia (2)

Para maximizar a autonomia temos que maximizar E . Assim, E é máximo quando C_D/C_L é mínimo. Para obter o valor de C_L para C_D/C_L mínimo deriva-se este último em ordem a C_L e iguala-se a zero.

$$\frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_D}{C_L} \right) = \frac{d}{dC_L} \left(\frac{C_{D0} + KC_L^2}{C_L} \right) = \frac{d}{dC_L} (C_{D0}C_L^{-1} + KC_L) = 0$$

Então

$$-C_{D0}C_L^{-2} + K = 0$$

o que dá

$$C_{L,be} = C_{L \min D} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}$$

e

$$C_{D,be} = C_{D \min} = 2C_{D0}$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.11. Optimização da Autonomia (3)

Agora, substituindo estes resultados nas expressões de V e de E obtém-se

$$V_{be} = V_{\min D} = \sqrt{\frac{2W/S}{\rho_0 \sigma C_{L\min D}}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \sigma} \left(\frac{W}{S} \right) \left(\frac{K}{C_{D0}} \right)^{1/4}}$$

e

$$E_{be} = E_{\max} = \frac{C_{L\min D}}{C_{D0} + KC_{L\min D}^2} = \frac{1}{2\sqrt{KC_{D0}}}$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.11.1. Autonomia Máxima Programa $h-V$

Da equação da autonomia deste programa de cruzeiro

$$t_{h-V} = \frac{2E_{\max}}{c} \operatorname{arctg} \left[\frac{E_1 \zeta}{2E_{\max} (1 - KE_1 C_{L1} \zeta)} \right]$$

verifica-se que a maximização de E_1 não maximiza necessariamente o alcance devido à função do arco tangente. No entanto, se considerarmos o valor de E_1 correspondente a E de maior autonomia (corresponde a $E_{\max}$), temos uma aproximação da maximização da autonomia neste programa de voo.

$$t_{be,h-V} \cong \frac{2E_{\max}}{c} \operatorname{arctg} \left[\frac{E_{\max} \zeta}{2E_{\max} (1 - KE_{\max} C_{L\min d} \zeta)} \right]$$

Este resultado pode ser simplificado para

$$t_{br,h-V} \cong \frac{2E_{\max}}{c} \operatorname{arctg} \left[\frac{\zeta}{2 - \zeta} \right]$$

Pedro V. Gamboa - 2008



2.11.2. Autonomia Máxima Programa $V-C_L$

Integrando a equação da autonomia específica obtém-se a autonomia, como visto anteriormente, como sendo

$$t_{V-C_L} = \frac{E}{c} \ln \frac{1}{1-\zeta}$$

Para maximizar a autonomia temos que maximizar E , logo a autonomia máxima fica

$$t_{be,V-C_L} = \frac{E_{\max}}{c} \ln \frac{1}{1-\zeta}$$



2.11.3. Autonomia Máxima Programa $h-C_L$

A autonomia máxima neste programa de voo é igual à do programa $V-C_L$, logo

$$t_{be,V-C_L} = \frac{E_{\max}}{c} \ln \frac{1}{1-\zeta}$$



2.12. Conclusões

Duas conclusões muito importantes acerca do alcance e autonomia máximos podem ser retiradas:

1. O alcance máximo depende directamente da velocidade. Isto significa que quanto maior for o valor de V_{br} , o que acontece em altitudes mais elevadas, maior será o alcance. Para maior alcance, mesmo mantendo as condições de melhor alcance, deve voar-se em altitudes elevadas desde que o motor tenha tracção suficiente;
2. A autonomia máxima é independente da altitude de voo. É claro que quanto mais alto for o voo, maior é a velocidade e, consequentemente, maior será a distância percorrida se isso for importante para a missão.