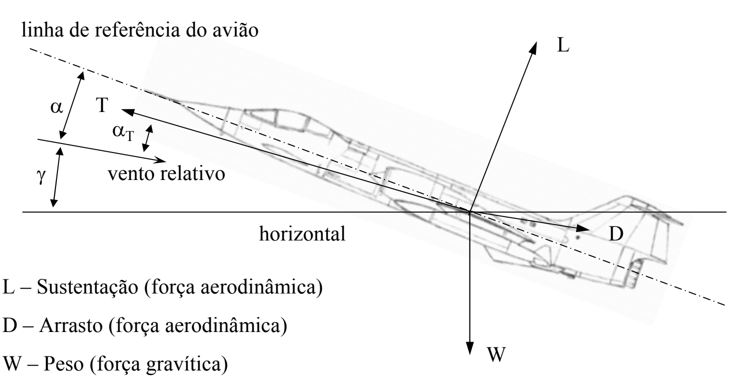
Forças Aplicadas no Avião

Mecânica de Voo I – 7631

2º Ano da Licenciatura em Engenharia Aeronáutica

1. Forças no Avião em Voo



L – Sustentação (força aerodinâmica)

D – Arrasto (força aerodinâmica)

W – Peso (força gravítica)

T – Tracção (força propulsiva)

α – ângulo de ataque

γ – ângulo de subida

α_T – ângulo de ataque da linha de tracção

2. Força de Sustentação

A força de sustentação pode ser representada em função do coeficiente de sustentação, C_L, como

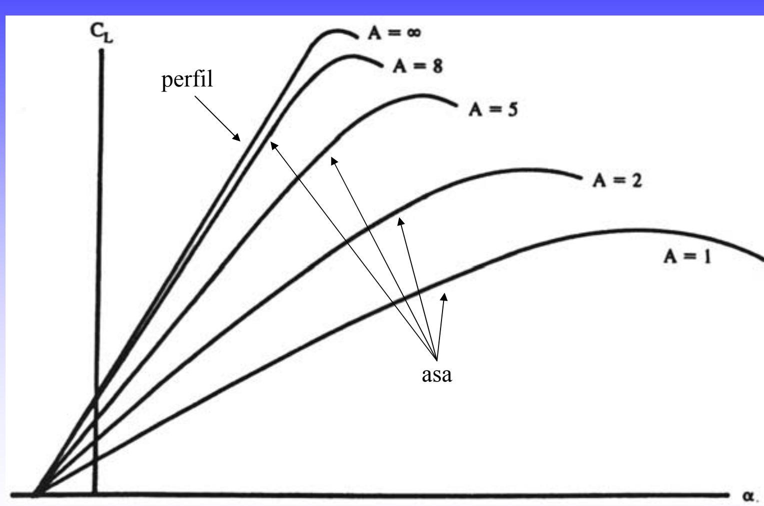
$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$$

onde ρ é a densidade do ar e V é a velocidade do vento relativo.
O coeficiente de sustentação é função do ângulo de ataque, α, do número de Reynolds, Re, e do número de Mach, M.
Para além destes parâmetros, a sustentação também depende da pressão dinâmica, q, dada por

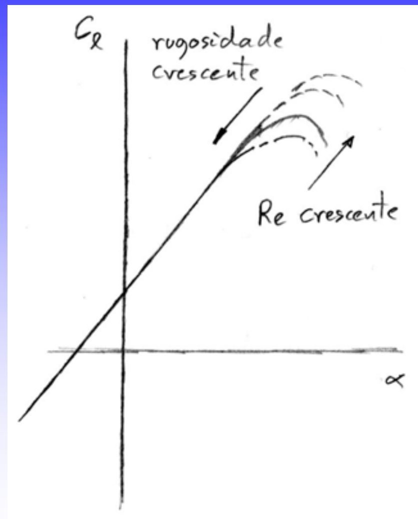
$$q = \frac{1}{2}\rho V^2$$

Logo, a sustentação varia com a altitude (através da densidade) e da velocidade.

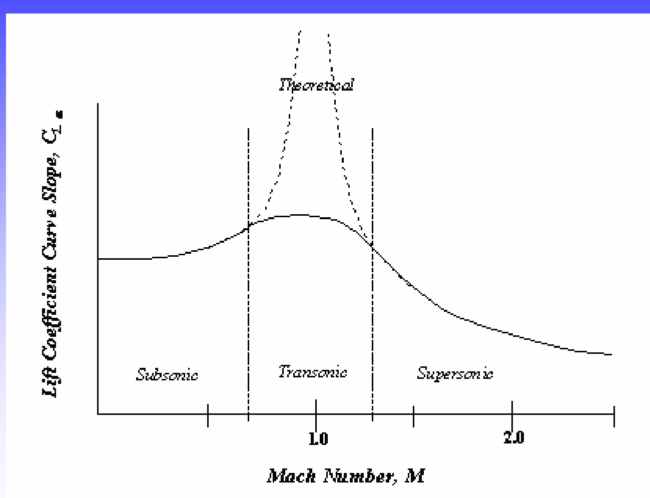
2.1. Variação com o Ângulo de Ataque



2.2. Variação com o Número de Reynolds



2.3. Variação com o Número de Mach



2.4. Factor de Carga

Resolvendo a equação da força de sustentação em ordem ao coeficiente de sustentação tem-se

$$C_L = \frac{2L}{\rho V^2 S}$$

Considerando que o factor de carga, n, é definido por

$$n = \frac{L}{W}$$

Então, o coeficiente de sustentação pode ser representado por

$$C_L = \frac{2nW}{\rho V^2 S}$$

3. Força de Arrasto

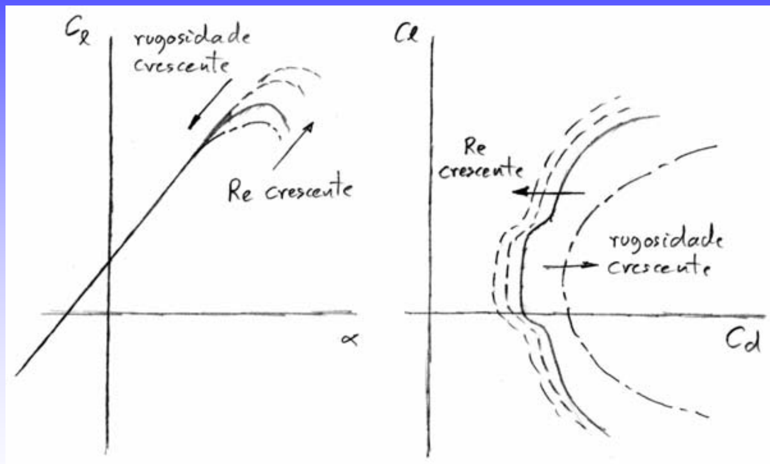
A força de arrasto pode ser representada em função do coeficiente de arrasto, C_D, como

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$$

O coeficiente de arrasto também é função do ângulo de ataque, α, do número de Reynolds, Re, e do número de Mach, M.
O coeficiente de arrasto é então dado por

$$C_D = \frac{2D}{\rho V^2 S}$$

3.1. Variação com α e Re



3.2. Componentes do Arrasto

A força de arrasto pode ser escrita como

$$D = D_0 + D_i + D_w$$

onde D_0 é o arrasto parasita causado pela viscosidade quando a sustentação é nula, D_i é o arrasto induzido provocado pela sustentação (parte causado pelos vórtices de ponta de asa e parte causado pelo aumento do arrasto parasita devido à sustentação) e D_w é o arrasto de onda que surge devido ao aparecimento de ondas de choque quando o escoamento em torno do avião toma valores supersónicos.
Em termos adimensionais temos

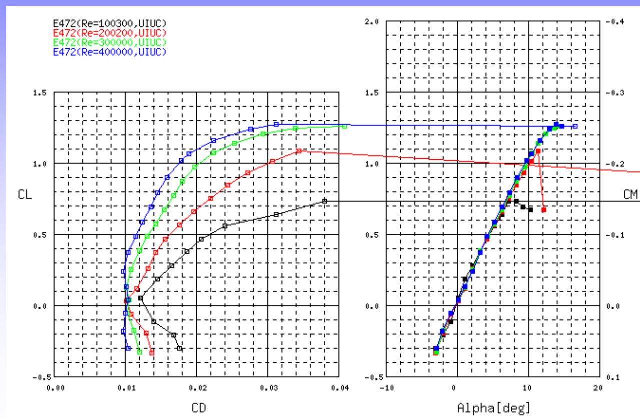
$$C_D = C_{D0} + C_{Di} + C_{Dw}$$

ou para voos subsónicos

$$C_D = C_{D0} + C_{Di}$$

3.3. Polar de Arrasto (1)

O coeficiente de arrasto pode ser representado por um função de C_L através de um gráfico ou, analiticamente, através de uma equação. Esta representação chama-se polar de arrasto.



3.3. Polar de Arrasto (2)

A polar de arrasto de um avião numa representação analítica geral é dada por

$$C_D = C_{D\min} + K\left(C_L - C_{L,CD\min}\right)^x$$

Quando o expoente da expressão acima tem um valor igual a 2 designa-se a polar de arrasto de parabólica. Esta situação é frequente em aeronaves convencionais.

$$C_D = C_{D\min} + K\left(C_L - C_{L,CD\min}\right)^2$$

Observando esta equação verifica-se que para $C_L = 0$, o coeficiente de arrasto para sustentação nula é dado por

$$C_{D0} = C_{D\min} + KC_{L,CD\min}^2$$

3.3. Polar de Arrasto (3)

Logo o C_D pode representar-se por

$$C_D = C_{D0} - 2KC_{L,CD\min}C_L + KC_L^2$$

Nos aviões comuns o parâmetro $C_{L,CDmin}$ é pequeno pelo que, por conveniência matemática, despreza-se o termo proporcional a C_L

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2$$

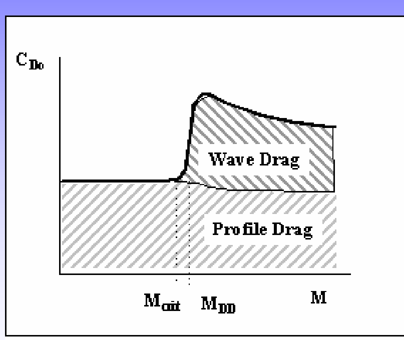
Esta é a representação da polar de arrasto que irá ser usada na disciplina.
O parâmetro K, o factor do coeficiente de arrasto induzido, é dado por

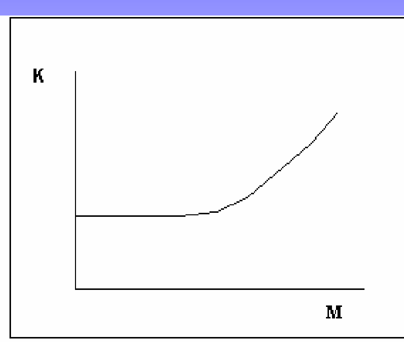
$$K = \frac{1}{\pi A e}$$

onde A é a razão de aspecto (AR) e e é o factor de Oswald cujos valores típicos variam entre 0,6 e 0,9.

3.4. Variação com o Número de Mach

Em voo subsónico, abaixo do Mach crítico, M_{crit}, os valores de C_{D0} e K mantém-se aproximadamente constantes.





3.5. Arrasto (1)

A força de arrasto é, então, expressa pela equação

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right)$$

ou

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{1}{2}\rho V^2 S K C_L^2$$

Utilizando a equação do C_L, pode representar-se o arrasto da seguinte forma

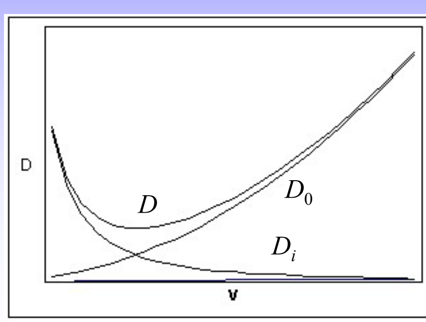
$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{2 K n^2 W^2}{\rho V^2 S}$$

O primeiro termo é o arrasto parasita para sustentação nula que é proporcional ao quadrado da velocidade. O segundo termo, inversamente proporcional ao quadrado da velocidade é o arrasto induzido.

3.5. Arrasto (2)

O segundo termo, como já mencionado, engloba contribuições da viscosidade e dos vórtices de ponta de asa.

Da análise realizada, observa-se que tanto a sustentação como o arrasto dependem da altitude de voo (através da densidade do ar) e do peso da aeronave que varia com o tempo de voo.



4. Peso

O peso da aeronave é representado por

$$W = mg$$

onde m é a massa da aeronave e g é a aceleração gravítica que varia com a altitude.
O peso da aeronave é uma força aplicada no centro de gravidade (CG) e aponta para o centro da Terra.

4.1. Aceleração Gravítica (1)

A lei da gravitação universal estabelece que a matéria atrai a matéria na razão directa das suas massas, M e m, e na razão inversa do quadrado da distância, r, que as separa

$$F_G = G\frac{Mm}{r^2}$$

onde G é a constante de gravitação universal (6,673x10^{-11}m^3/(kg.s^2)).
Considerando que M é a massa da Terra e que m é a massa do avião, então a força de atracção também é dada por

$$F_G = mg$$

4.1. Aceleração Gravítica (2)

Na superfície da Terra, com raio médio de $r_0 = 6{,}37\text{x}10^6$m, tem-se

$$F_{G,0} = G\frac{Mm}{r_0^2}$$

$$F_{G,0} = mg_0$$

A distância do centro da Terra ao corpo em questão (avião) pode ser escrita da seguinte forma

$$r = r_0 + h_G$$

A altitude geométrica, h_G, representa a distância geométrica entre o corpo e a superfície da Terra.

4.1. Aceleração Gravítica (3)

Igualando as duas equações de $F_{G,0}$, obtém-se

$$G\frac{Mm}{r_0^2} = mg_0$$

ou seja

$$GM = g_0 r_0^2$$

Como todos os parâmetros desta equação são constantes então, também se tem

$$GM = gr^2$$

4.1. Aceleração Gravítica (4)

Das equações acima conclui-se que

$$gr^2 = g_0 r_0^2$$

Logo

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2} = g_0 \frac{r_0^2}{(r_0 + h_G)^2} = g_0 \left(\frac{1}{1 + {h_G}/{r_0}} \right)^2$$

Esta relação mostra a variação da aceleração da gravidade com a altitude geométrica.
Considerando que a altitude máxima a que os aviões normalmente voam é de 20000m, podemos obter o valor de g nessa altitude

$$g = g_0 \frac{(6{,}37 \times 10^6)^2}{(6{,}37 \times 10^6 + 0{,}02 \times 10^6)^2} = 0{,}9938 g_0$$

4.1. Aceleração Gravítica (5)

Como se pode ver, a variação da aceleração gravítica desde o nível do mar até 20000m de altitude é inferior a 1%.
Tendo em conta esta pequena variação de g nas altitudes em que os voos dos aviões ocorrem, pode considerar-se que g é constante sem perda significativa de precisão.
Na superfície da Terra este valor é de

$$g = g_0 = 9{,}80665 \mathrm{m/s^2}$$

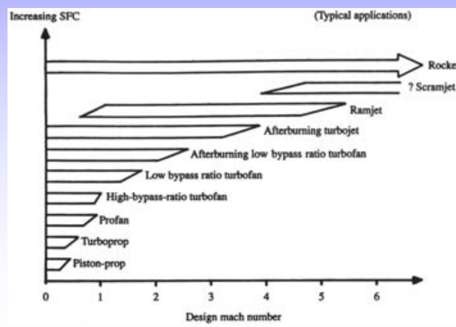
Logo o peso do avião para efeitos de estudo é

$$W = mg_0$$

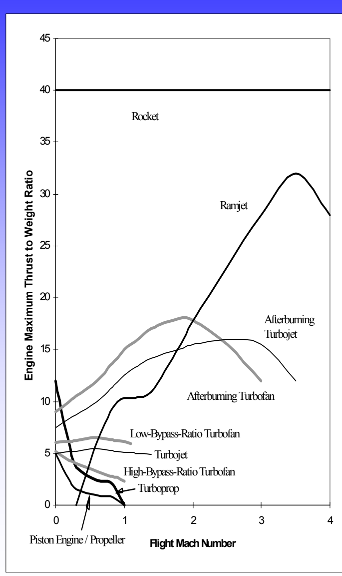
5. Força Propulsiva

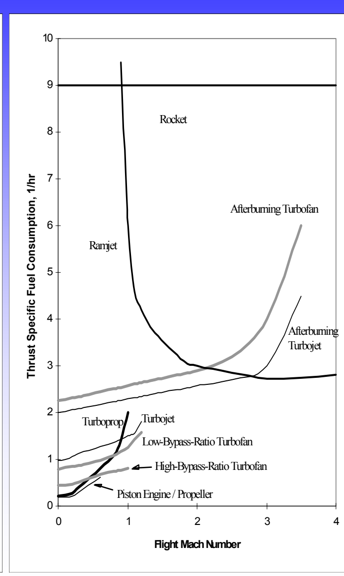
A força propulsiva depende do motor instalado no avião mas, de um modo genérico, é função da densidade do ar (consequentemente da altitude, h), do caudal de combustível (normalmente considerado como uma fracção da posição do acelerador, δ) e da velocidade do avião.

$$T = T(h, \delta, V)$$



5.1. Desempenho de Motores





5.2. Motor a Jacto (1)

O motor a jacto (turbojacto e turbofan) é um motor que produz a tracção directamente através da emissão de gases de combustão em alta velocidade. Para o turbojacto, a variação da tracção com a velocidade é pequena e, para estudos analíticos de desempenho, considera-se a tracção como um valor constante em função da velocidade

$$T = T(h, \delta)$$

A variação da tracção com a densidade é, normalmente, representada da seguinte forma, onde T_{ref} é a tracção do motor numa altitude de referência

$$T = T_{ref}\,\delta\left(\frac{\rho}{\rho_{ref}}\right)^x$$

5.2. Motor a Jacto (2)

A literatura sugere que o valor do expoente x seja igual a 0,7 na troposfera, entre o nível do mar (NM) e 11000m de altitude, e igual a 1,0 na estratosfera, acima de 11000m.
Considerando a razão entre a densidade numa dada altitude e a densidade ao nível do mar, representada por

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Pode escrever-se a variação da tracção como

$$T(h,\delta) = T_0\,\delta\,\sigma^{0,7} \quad \text{para} \quad 0 \le h \le 11000\text{m}$$

$$T(h,\delta) = T_{11k}\,\delta\,\frac{\rho}{\rho_{11k}} = T_0\,\delta\,\sigma_{11k}^{0,7}\,\frac{\sigma}{\sigma_{11k}} = T_0\,\delta\,\frac{\sigma}{\sigma_{11k}^{0,3}} \quad \text{para} \quad 11000\text{m} < h \le 25000\text{m}$$

onde o índice 11k refere-se a condições a 11000m de altitude.

5.2. Motor a Jacto (3)

É comum, para simplificar, assumir que o expoente x toma o valor de 1,0 em qualquer altitude na troposfera e na estratosfera. Neste caso tem-se

$$T(h,\delta) = T_0 \delta \sigma \quad \text{para} \quad 0 \le h \le 25000\text{m}$$

Outro parâmetro importante é o consumo específico de combustível, c (em inglês, Specific Fuel Consumption, sfc). Este parâmetro tem dimensões de peso de combustível gasto por unidade de tempo por unidade de força produzida. Numa primeira aproximação pode considerar-se o consumo específico do motor a jacto constante (independente da altitude, da velocidade e da posição do acelerador).

O produto do consumo específico pela tracção resulta na variação do peso de combustível, W_{fuel}, por unidade de tempo (consumo)

$$\frac{dW_{fuel}}{dt} = cT$$

5.2. Motor a Jacto (4)

Caso a aeronave não perca peso de outra forma, a diminuição do seu peso por unidade de tempo é dada por

$$\frac{dW}{dt} = -cT$$

5.3. Motor Alternativo e Hélice (1)

O motor de combustão interna não produz a tracção directamente. Ele transmite a sua potência à hélice que a converte em tracção. Este tipo de motor produz potência directamente.
Assim, para este tipo de motor o parâmetro principal de estudo é a potência do motor disponibilizada no eixo, P_e, representada por

$$P_e = P_e(h, \delta, V)$$

A potência produzida por um motor de combustão interna apresenta uma variação muito pequena com a velocidade logo a sua representação reduz-se a

$$P_e = P_e(h, \delta)$$

5.3. Motor Alternativo e Hélice (2)

A variação da potência com a altitude depende do tipo de motor.
Para um motor aspirado, onde o o ar que alimenta a combustão tem a mesma pressão que o ar da atmosfera circundante, pode relacionar-se P_e com a potência ao nível do mar, $P_{e,0}$, por

$$P_e = P_{e,0}\delta\sigma$$

Alguns motores possúem um turbo compressor que mantém a pressão de admissão igual à pressão atmosférica ao nível do mar fazendo com que a potência se mantenha constante até uma certa altitude, a altitude crítica h_{cr}.
Acima desta altitude a potência decresce a uma taxa igual à dos motores aspirados.

$$P_e = P_{e,0}\delta \quad \text{para} \quad 0 \le h \le h_{cr}$$

$$P_e = P_{e,0}\delta\frac{\rho}{\rho_{cr}} = P_{e,0}\delta\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \quad \text{para} \quad h > h_{cr}$$

5.3. Motor Alternativo e Hélice (3)

A tracção do motor alternativo e hélice, por sua vez, depende da potência disponível que tem um valor menor do que a potência no eixo devido a perdas da hélice.
A potência disponível pode representar-se como

$$P = \eta_p P_e(h,\delta)$$

onde η_p é a eficiência propulsiva da hélice que depende da velocidade de rotação do motor e da velocidade de voo.
Numa hélice com passo variável e que mantenha a velocidade de rotação constante, a eficiência propulsiva da hélice pode ser considerada constante na gama de velocidades normais. Em velocidades mais baixas, (como descolagem e subida) a eficiência propulsiva tende a ser menor.
Assim, a potência disponível pode escrever-se

$$P(h,\delta) = \eta_p P_e(h,\delta)$$

5.3. Motor Alternativo e Hélice (4)

A força propulsiva, por sua vez, relaciona-se com a potência propulsiva da seguinte forma

$$TV = P(h,\delta)$$

o que permite obter, para a força propulsiva

$$T(h,\delta,V) = \frac{P(h,\delta)}{V} = \frac{\eta_p P_e(h,\delta)}{V}$$

Nesta equação pode observar-se que a tracção para o motor alternativo e hélice é inversamente proporcional à velocidade, quando se assume que a eficiência propulsiva da hélice é constante (aproximação válida para hélices de velocidade constante).

5.3. Motor Alternativo e Hélice (5)

Assim, a tracção do motor aspirado é dada por

$$T(h,\delta,V)=\frac{\eta_p P_{e,0}\delta\sigma}{V}$$

E a tracção do motor turbo comprimido é dada por

$$T(h,\delta,V)=\frac{\eta_p P_{e,0}\delta}{V} \quad \text{para} \quad 0\le h\le h_{cr}$$

$$T(h,\delta,V)=\frac{\eta_p P_{e,0}\delta}{V}\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \quad \text{para} \quad h>h_{cr}$$

5.3. Motor Alternativo e Hélice (6)

Nos motores alternativos, o consumo específico de combustível mais utilizado é o consumo específico de potência, *c'* (do inglês, Power Specific Fuel Consumption, psfc). Este parâmetro tem dimensões de peso de combustível gasto por unidade de tempo por unidade de potência produzida. Numa primeira aproximação pode assumir-se que o consumo específico de potência é constante (independente da altitude, da velocidade e da posição do acelerador).
O produto do consumo específico pela potência no eixo resulta na variação do peso de combustível, W_{fuel}, por unidade de tempo (consumo)

$$\frac{dW_{fuel}}{dt}=c'P_e=\frac{c'}{\eta_p}P$$

Caso a aeronave não perca peso de outra forma, a diminuição do seu peso por unidade de tempo é dada por

$$\frac{dW}{dt}=-c'P_e=-\frac{c'}{\eta_p}P$$

5.3. Motor Alternativo e Hélice (7)

É costume comparar os valores do consumo específico de tracção de diferentes aeronaves. Para uma aeronave com motor alternativo também se pode falar em consumo específico de tracção, *c*. Basta notar a relação entre a definição de *c* e de *c*'

$$c = \frac{V}{\eta_p} c'$$

Nesta equação pode ver-se que o consumo específico de tracção de um motor alternativo varia linearmente com a velocidade, assumindo *c*' e η_p constasntes. Assim, para comparar diferentes motores a jacto ou alternativos é necessário considerar a velocidade de voo.

6. Resumo dos Modelos de Motor

Tipo de motor		Potência ou tracção	Consumo específico	Obs.
Alternativo	aspirado	$P_e = P_{e,0}\delta(\rho/\rho_0)$	$c = c_0$	usar V = 1 quando V = 0
	turbo	$P_e = P_{e,0}\ \delta$ para $h<h_{cr}$ $P_e = P_{e,0}\ \delta(\rho/\rho_{cr})$ para $h>h_{cr}$	$c = c_0$	usar V = 1 quando V = 0
Turbohélice		$P_e = P_{e,0}\delta(\rho/\rho_0)$	$c = c_0$	usar V = 1 quando V = 0
Turbofan c/ λ elevado		$T = (0,1/M)T_0\ \delta(\rho/\rho_0)$	$c = c_0(T/T_0)^{0,5}$	usar M = 0,1 quando M < 0,1
Turbofan c/ λ baixo e turbojacto	s/ pós-queimador	$T = T_0\ \delta(\rho/\rho_0)^{0,7}$ para $h<h_{11k}$ $T = T_0\ \delta(\sigma/\sigma_{11k}{}^{0,3})$ para $h>h_{11k}$	$c = c_0(T/T_0)^{0,5}$	só para M < 0,9
	c/ pós-queimador	$T = T_0\ \delta(\rho/\rho_0)(1+0,7M)$	$c = c_0(T/T_0)^{0,5}$	

T é temperatura