

6

ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL TRIDIMENSIONAL

6.1. Introdução

- Até agora foram analisados escoamentos bidimensionais.
- Os escoamentos em torno dos corpos e perfis dos capítulos anteriores envolvem apenas duas dimensões num único plano.
- Por essa razão estes escoamentos são escoamentos planares.
- A análise da asa tridimensional, foi feita no plano da asa, apesar do escoamento em torno dela ser verdadeiramente tridimensional.
- A análise bidimensional permite compreender melhor escoamentos reais, apesar das suas limitações.

- As aplicações aerodinâmicas reais são tridimensionais.
- No entanto, devido à introdução de uma nova variável independente, a análise torna-se mais complexa.
- O cálculo preciso de campos de escoamentos tridimensionais, tem sido, e continua a ser, uma área de grande investigação em aerodinâmica.
- O objectivo deste capítulo é apresentar, resumidamente, alguns aspectos básicos do escoamento incompressível tridimensional.
- As equações que regem o escoamento de um fluido já foram estudadas na sua forma tridimensional.
- Se um escoamento é irrotacional tem-se

$$\mathbf{V} = \nabla \phi$$

- Se o escoamento também é incompressível, o potencial de velocidade é dado pela equação de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0$$

- As soluções desta equação para um escoamento em torno de um corpo têm que satisfazer a condição de fronteira do escoamento tangencial:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$$

- $\mathbf{n}$ é o vector unitário perpendicular à superfície do corpo.
- Nestas equações ϕ é, em geral, uma função do espaço tridimensional: em coordenadas esféricas $\phi = \phi(r, \theta, \Phi)$.
- Estas equações vão ser usadas para alguns escoamentos incompressíveis tridimensionais elementares.

6.2. Fonte Tridimensional

- A equação de Laplace em coordenadas esféricas é

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \Phi} \right) \right] = 0$$

- Considere-se o potencial de velocidade

$$\phi = -\frac{C}{r}$$

- C é uma constante e r é a coordenada radial desde a origem.
- Esta equação satisfaz a equação de Laplace e, por isso, descreve um escoamento incompressível, irrotacional e tridimensional que é fisicamente possível.

- A definição de gradiente em coordenadas esféricas é

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} \mathbf{e}_\Phi$$

- Obtendo o gradiente de ϕ tem-se

$$\nabla \phi = V = \frac{C}{r^2} \mathbf{e}_r$$

- Em termos das componentes da velocidade tem-se

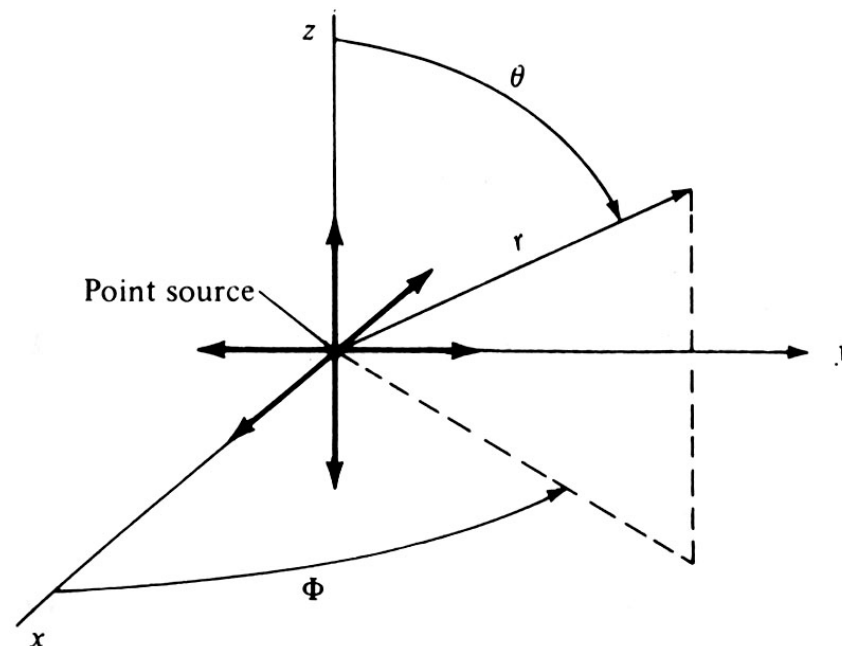
$$V_r = \frac{C}{r^2}$$

$$V_\theta = 0$$

$$V_\Phi = 0$$

- Estas equações descrevem um escoamento com linhas de corrente rectas que emanam da origem, como mostra a figura seguinte.

- A velocidade varia inversamente com o quadrado da distância à origem.
- Este escoamento é definido como uma *fonte tridimensional*.
- Por vezes chama-se apenas *ponto fonte*, em contraste com a linha de fonte descrito anteriormente.
- Para se determinar a constante C , considere-se uma esfera de raio r e superfície S , centrada na origem.



- O caudal mássico é

$$\dot{m} = \oiint_S \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

- O caudal volumétrico é

$$\lambda = \oiint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

- Na superfície da esfera, a velocidade tem um valor constante ($V_r = C/r^2$) e é normal à superfície, então

$$\lambda = \frac{C}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi C$$

- Logo

$$C = \frac{\lambda}{4\pi}$$

- A velocidade radial fica

$$V_r = \frac{\lambda}{4\pi r^2}$$

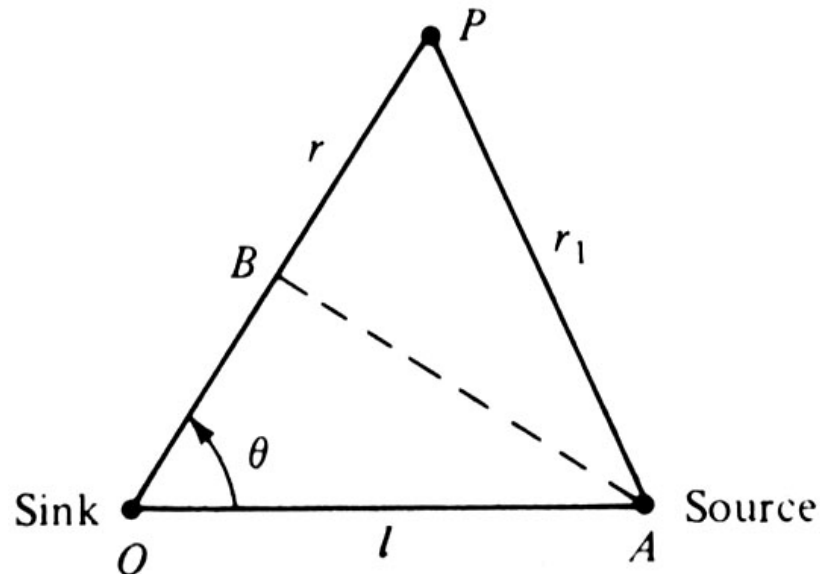
- Como se viu a velocidade é inversamente proporcional ao quadrado do raio.
- Na linha de fonte a velocidade radial é inversamente proporcional ao raio.
- Por outro lado, Aparece 4π no denominador em vez de 2π .
- O potencial da fonte tridimensional é, assim,

$$\phi = -\frac{\lambda}{4\pi r}$$

- Nesta equação λ é a intensidade da fonte.
- Quando λ é negativo tem-se um sumidouro.

6.3. Doublet Tridimensional

- Considere-se uma fonte e um sumidouro de intensidade igual mas oposta localizadas nos pontos A e O , respectivamente, como mostra a figura.
- A distância entre a fonte e o sumidouro é l .



- Um ponto arbitrário P está a uma distância r do sumidouro e a uma distância r_1 da fonte.
- Usando a equação da fonte anterior, tem-se

$$\phi = -\frac{\lambda}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\phi = -\frac{\lambda}{4\pi} \frac{r - r_1}{rr_1}$$

- Deixando a fonte aproximar-se do sumidouro à medida que as suas intensidades se tornam infinitas, então

$$l \rightarrow 0 \quad \text{à medida que} \quad \lambda \rightarrow \infty$$

- No limite

$$\text{à medida que} \quad l \rightarrow 0, \quad r - r_1 \rightarrow OB = l \cos \theta, \quad rr_1 \rightarrow r^2$$

- Então

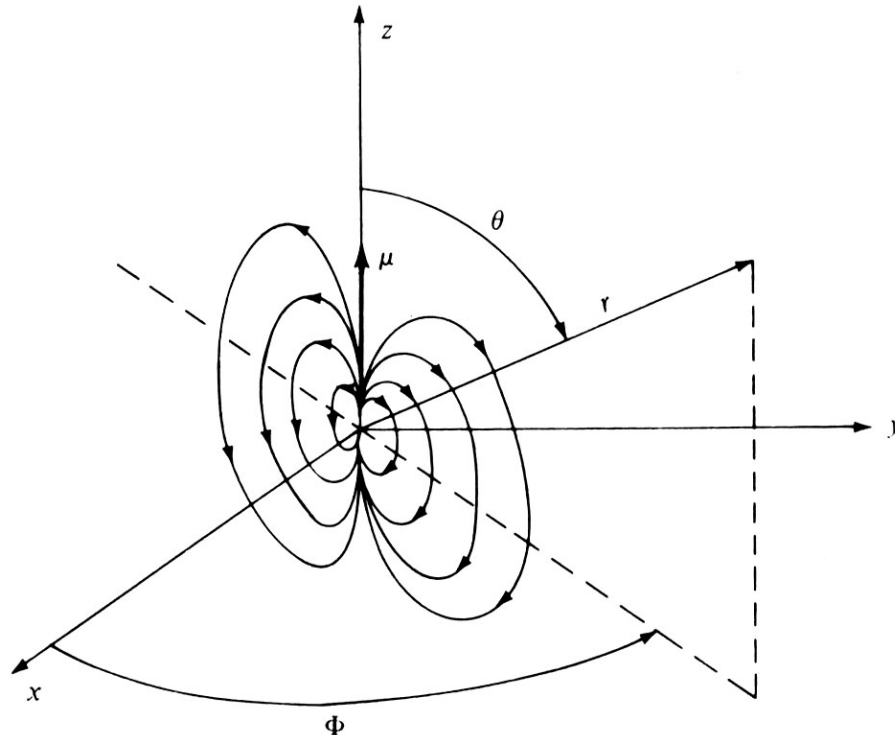
$$\phi = -\frac{\lambda}{4\pi} \frac{l \cos \theta}{r^2}$$

$$\phi = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

- O escoamento produzido por esta equação é um *doublet tridimensional*.
- A intensidade do doublet é $\mu = \lambda l$.
- Comparando, novamente, com o doublet bidimensional, vê-se que existe uma proporção inversa com $4\pi r^2$ em vez de $2\pi r$ no caso 2D.
- O vector velocidade é

$$\mathbf{V} = \nabla \phi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_\Phi$$

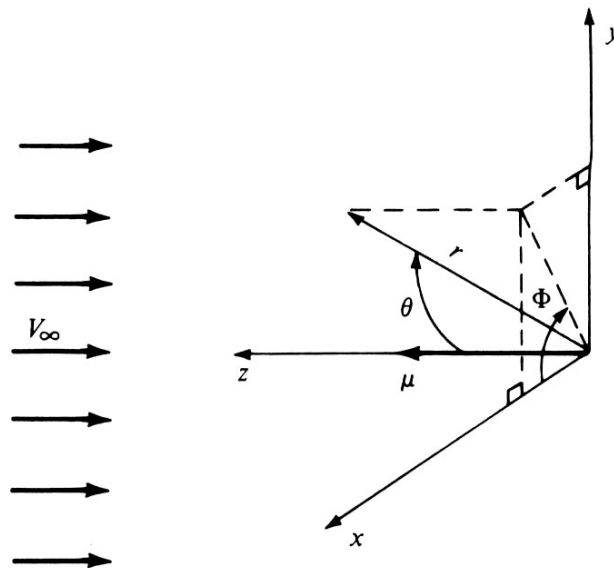
- As linhas de corrente deste campo de velocidade estão representadas na figura abaixo.
- São mostradas as linhas de corrente no plano zr : elas são iguais para todos os valores de Φ .
- O escoamento induzido por um doublet tridimensional é um asuperfície de corrente gerada pela revolução das linhas de corrente em torno de z .



- O escoamento é, assim, independente de Φ .
- Este tipo de escoamento é um escoamento axi-simétrico.
- Ele tem apenas duas variáveis independentes, mas não é um escoamento 2D.

6.4. Escoamento em torno da Esfera

- Considere-se, novamente, o escoamento induzido pelo doublet tridimensional.
- Agora, sobreponham-se a este escoamento um campo de velocidade uniforme de valor V_{∞} no sentido negativo de z .
- A figura é rodada de forma a que o eixo z aponte para o escoamento uniforme, como mostra a figura abaixo.



- Examinando a figura, as componentes esféricas da velocidade do escoamento uniforme são

$$V_r = -V_\infty \cos \theta$$

$$V_\theta = V_\infty \sin \theta$$

$$V_\Phi = 0$$

- Adicionando V_r , V_θ e V_Φ do escoamento livre às correspondentes do doublet, tem-se, para o escoamento combinado,

$$V_r = -V_\infty \cos \theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^3} = -\left(V_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3}\right) \cos \theta$$

$$V_\theta = V_\infty \sin \theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} = \left(V_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3}\right) \sin \theta$$

$$V_\Phi = 0$$

- Para determinar os pontos de estagnação no escoamento poem-se $V_r = V_\theta = 0$.
- Com $V_\theta = 0$, obtém-se $\sin \theta = 0$: o ponto de estagnação ocorre em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.
- Com $V_r = 0$, obtém-se

$$V_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} = 0$$

- $r = R$ é a coordenada radial dos pontos de estagnação.
- Resolvendo para R , tem-se

$$R = \left(\frac{\mu}{2\pi V_\infty} \right)^{1/3}$$

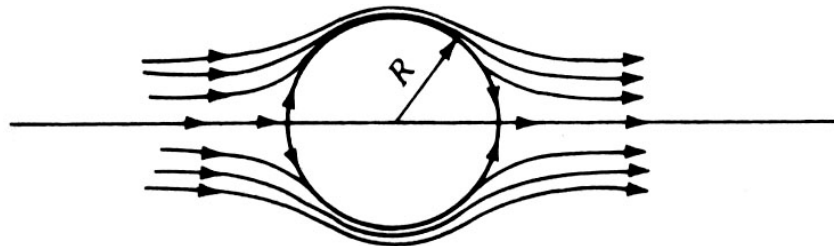
- Logo existem dois pontos de estagnação, ambos no eixo z , em que as coordenadas (r, θ) são

$$\left[\left(\frac{\mu}{2\pi V_\infty} \right)^{1/3}, 0 \right] \text{ e } \left[\left(\frac{\mu}{2\pi V_\infty} \right)^{1/3}, \pi \right]$$

- Inserindo o valor de $r = R$ na equação de V_r , obtém-se

$$V_r = - \left(V_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} \right) \cos \theta = - \left[V_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{2\pi V_\infty}{\mu} \right) \right] \cos \theta = -(V_\infty - V_\infty) \cos \theta = 0$$

- Então, $V_r = 0$ quando $r = R$ para todos os valores de θ e Φ .
- Esta é a condição de escoamento tangencial para o escoamento em torno da esfera de raio R .
- O campo de velocidades dado pelas equações de velocidade anteriores é o *escoamento incompressível em torno de uma esfera de raio R* .



- Na superfície da esfera, onde $r = R$, a velocidade tangencial é obtida com

$$V_{\theta} = \left(V_{\infty} + \frac{\mu}{4\pi R^3} \right) \sin \theta$$

- Sabendo que

$$\mu = 2\pi R^3 V_{\infty}$$

- A velocidade tangencial fica

$$V_{\theta} = \left(V_{\infty} + \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi R^3 V_{\infty}}{R^3} \right) \sin \theta$$

- Ou seja

$$V_{\theta} = \frac{3}{2} V_{\infty} \sin \theta$$

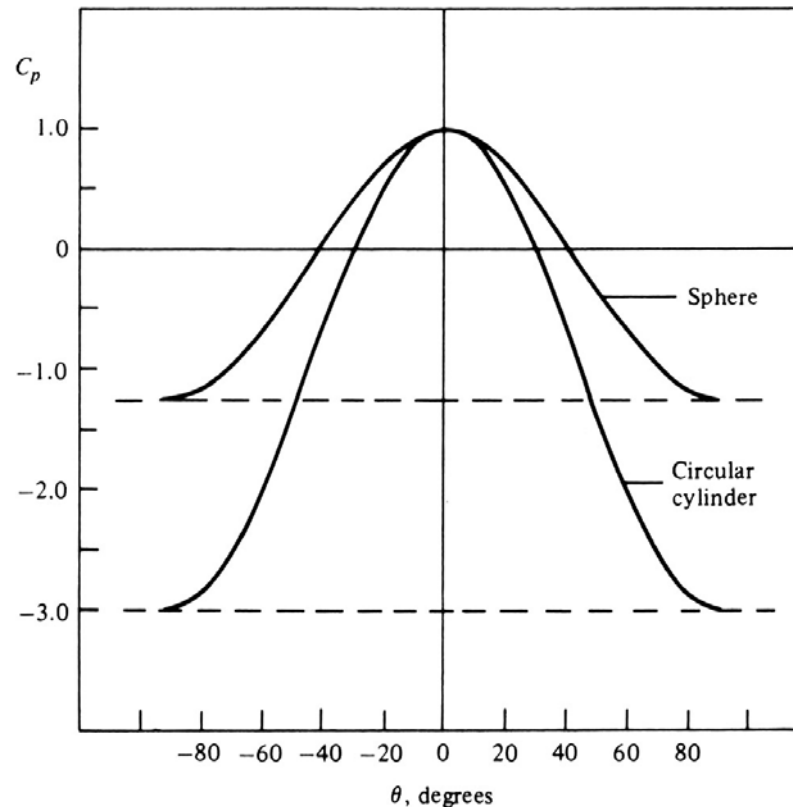
- A velocidade máxima ocorre nos pontos mais altos e mais baixos da esfera e tem um valor de $3V_{oo}/2$.
- Para o escoamento 2D (cilindro) a velocidade máxima é $2V_{oo}$.
- Para a mesma velocidade do escoamento uniforme V_{oo} , a velocidade máxima na superfície da esfera é inferior à velocidade máxima na superfície do cilindro.
- O escoamento em torno do cilindro é “aliviado”.
- O escoamento na esfera tem uma dimensão extra onde se pode mover e contornar o corpo sólido: para cima ou para baixo ou para os lados.
- O escoamento em torno do cilindro está mais constrangido: só se pode mover para cima ou para baixo.
- Isto é um exemplo do efeito de alívio tridimensional, que é um fenómeno geral para todos os escoamentos 3D.

- A distribuição de pressão na superfície da esfera é

$$C_p = 1 - \left(\frac{V_\theta}{V_\infty} \right)^2 = 1 - \left(\frac{3}{2} V_\infty \sin \theta \right)^2$$

$$C_p = 1 - \frac{9}{4} V_\infty^2 \sin^2 \theta$$

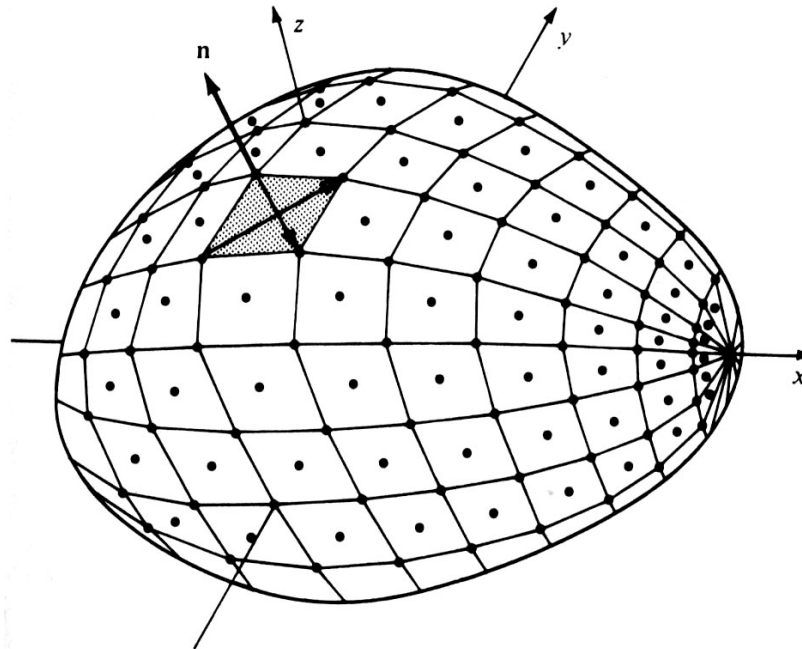
- A figura abaixo mostra o coeficiente de pressão em torno da esfera e do cilindro.



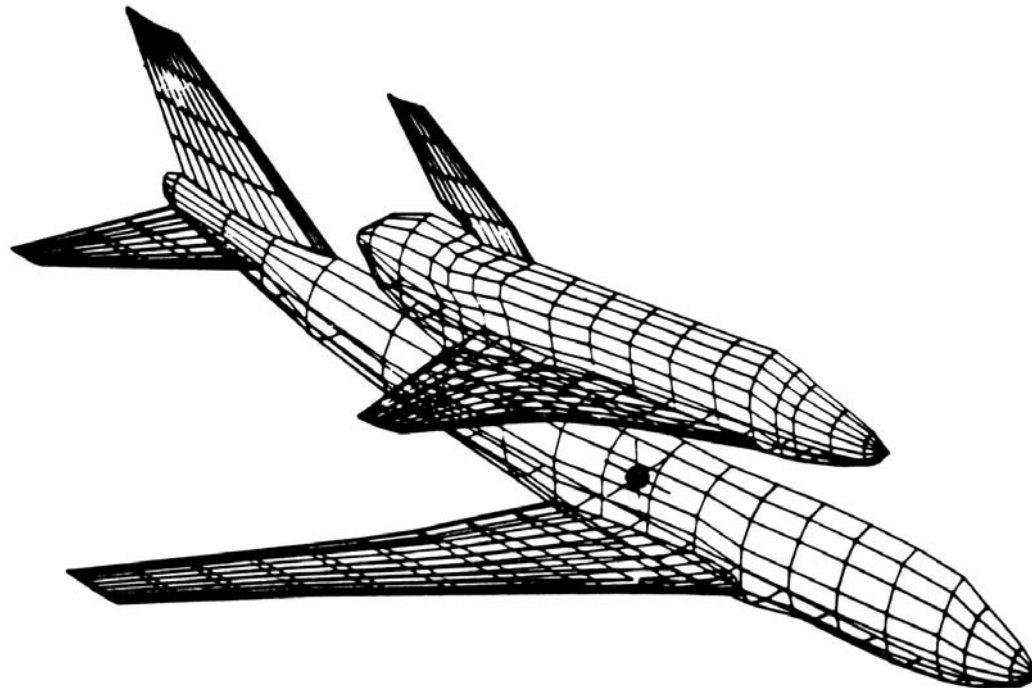
6.5. Técnicas dos Painéis

- Em aplicações aerodinâmicas modernas, os escoamentos tridimensionais, invíscidos e incompressíveis são sempre calculados usando técnicas numéricas de painéis.
- A filosofia dos painéis 2D é facilmente estendida aos painéis 3D.
- A ideia geral por trás dos programas de computador é cobrir o corpo tridimensional com painéis sobre os quais existe uma distribuição desconhecida de singularidades (fontes, doublets ou vórtices).
- A figura seguinte mostra a superfície de um corpo 3D substituída por um conjunto de painéis.

- Estas incógnitas são obtidas através de um sistema de equações algébricas lineares geradas pelo cálculo da velocidade induzida nos pontos de controlo nos painéis e aplicando a condição de escoamento tangencial.
- Para um corpo não sustentador, como mostra a figura, uma distribuição de painéis de fonte é suficiente.
- Para corpos sustentadores tanto painéis de fonte como de vórtice são necessários.



- Um exemplo actual do uso do método dos painéis em corpos sustentadores tridimensionais está ilustrado na figura abaixo, que mostra os painéis num vaivém seobre o Boeing 747 para análise de escoamento potencial.
- Estes métodos tornaram-se padrão pelo que fazem parte do processo de projecto de aeronaves dos maiores construtores de aviões.

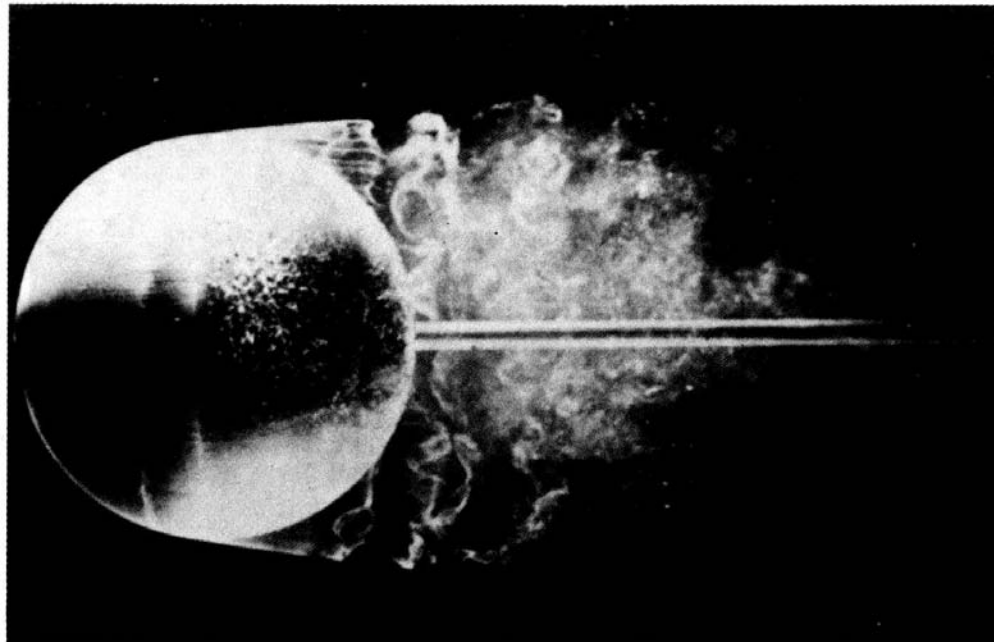


- Um aspecto interessante que se pode ver nestas figuras é a complexidade geométrica envolvida na distribuição dos painéis em torno dos corpos 3D.
 - Como se define a forma do corpo?
 - Como se distribuem os painéis pelo corpo?
 - Quantos painéis se devem usar?
- Estas perguntas não têm uma resposta simples.
- Em cada caso é necessário determinar a melhor distribuição de painéis.

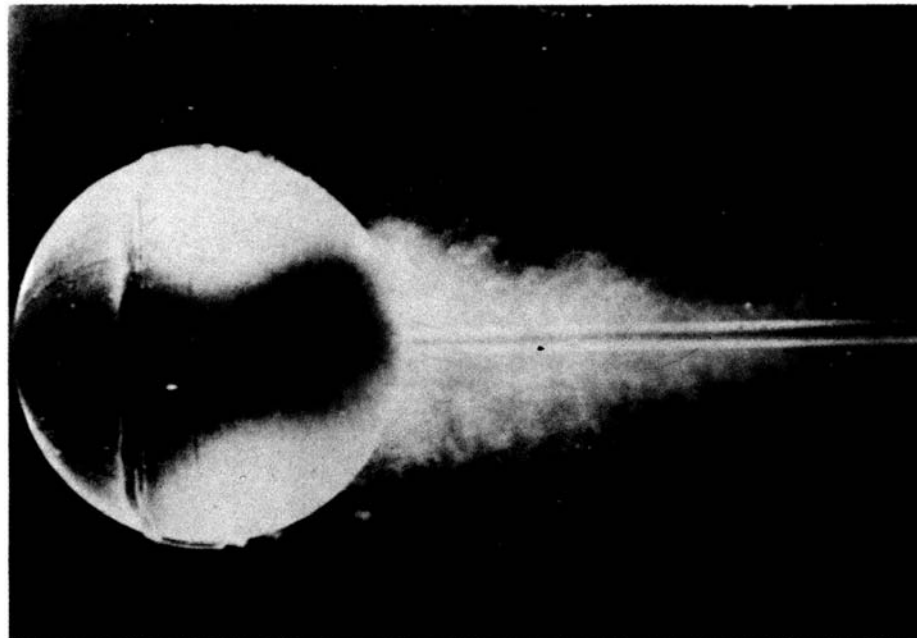
6.6. Escoamento Real em torno da Esfera

- Nesta secção apresenta-se o comportamento do escoamento em torno de uma esfera.
- À semelhança do cilindro os seguintes fenómenos estão presentes no escoamento em torno da esfera:
 - Separação do escoamento;
 - Variação do coeficiente de arrasto com o Re ;
 - Queda abrupta do coeficiente de arrasto com a transição de escoamento laminar para turbulento no Re crítico;
 - Forma da esteira.
- No entanto, devido ao efeito de alívio tridimensional, o escoamento em torno da esfera é quantitativamente diferente do escoamento em torno do cilindro.

- A figura abaixo mostra escoamento laminar em torno da esfera.
- O Re é de 15000, valor suficientemente baixo para manter o escoamento laminar na superfície esférica.
- Em resposta ao gradiente de pressão adversa, existente na superfície traseira e estimada pela teoria de escoamento invíscido e incompressível, o escoamento separa da superfície.

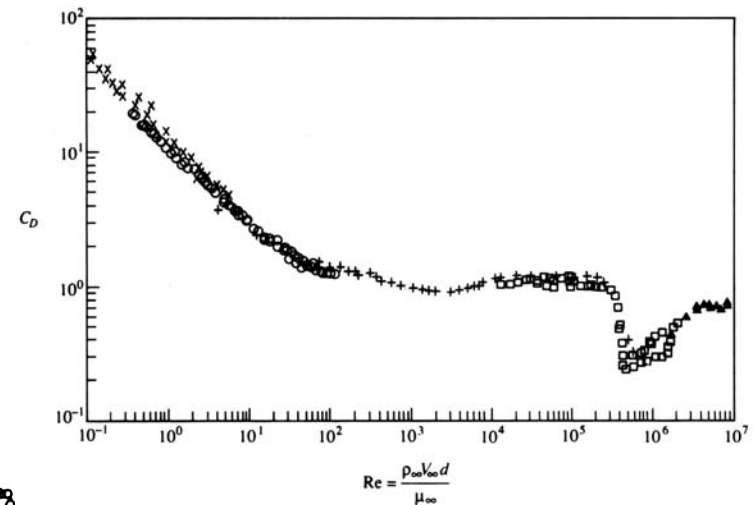
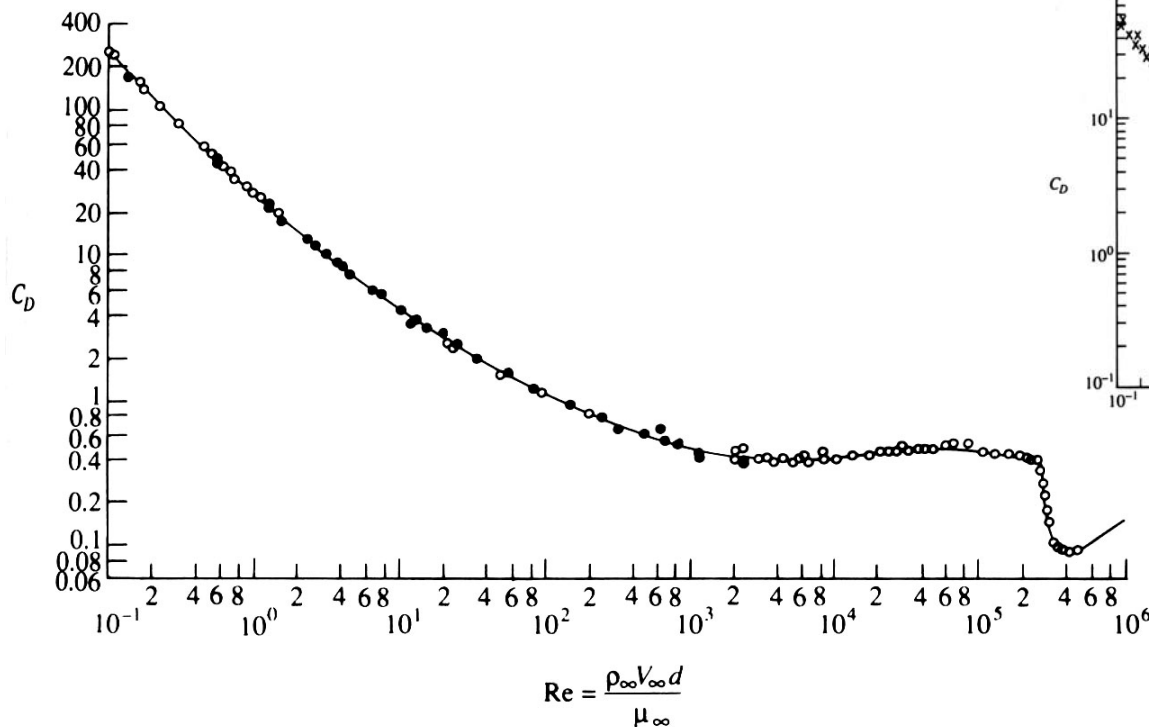


- Na figura pode ver-se a separação na superfície dianteira ligeiramente à frente do diâmetro máximo.
- Assim, forma-se atrás da esfera uma esteira larga com um arrasto de pressão resultante elevado.
- Em contraste, o caso do escoamento turbulento é mostrado na figura abaixo.
- Neste caso, o Re é de 30000, ainda suficientemente baixo para, normalmente, permitir escoamento laminar.



- No entanto, neste caso, o escoamento turbulento é induzido artificialmente pela presença de um anel de arame no plano vertical da superfície da frente.
- Uma vez que o escoamento é turbulento, a separação ocorre muito mais tarde na superfície traseira, resultando numa esteira mais estreita.
- Como resultado, o arrasto de pressão é inferior no caso turbulento.
- A variação do coeficiente de arrasto C_D com o número de Reynolds, para uma esfera, está representado na figura seguinte.
- Comparando esta curva com a do cilindro vê-se que a sua forma é idêntica, com um decréscimo abrupto do C_D perto do Re crítico de 300000, coincidindo com a transição natural de escoamento laminar para turbulento.

- No entanto, quantitativamente, as curvas diferem.
- Para Re de aplicação mais prática ($Re > 1000$) os valores de C_D da esfera são bastante mais pequenos do que os do cilindro.
- Em torno do Re crítico temos as seguintes situações:
 - No cilindro: o C_D cai de 1,0 para 0,1;
 - Na esfera: o C_D cai de 0,4 para 0,1.



- O valor do Re crítico em que o escoamento transita de laminar para turbulento a montante da separação não é fixo.
- Pelo contrário, a transição é influenciada por muitos factores.
- Um deles é a quantidade de turbulência no escoamento livre: quanto maior for a turbulência, mais facilmente se dá a transição.
- Quanto maior for a turbulência menor será o Re crítico.