

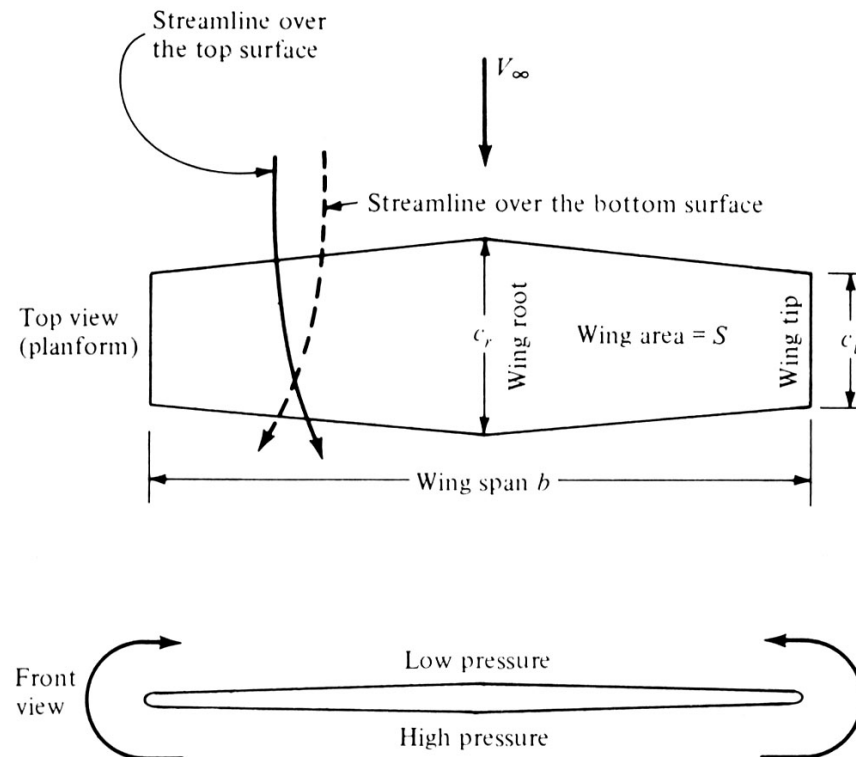
5

ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL
EM
ASAS FINITAS

5.1. Introdução

- No capítulo anterior foram estudadas as características de perfis, que são as mesmas características de uma asa com envergadura infinita.
- As asas reais, no entanto, possuem asas com envergadura finita.
- O objectivo deste capítulo é, então, aplicar o conhecimento sobre perfis na análise destas asas.
- Porque serão as características aerodinâmicas de uma asa finita diferentes das características dos seus perfis?
- Na prática o perfil é a secção da asa e, à primeira vista, poder-se-ia pensar que a asa se comporta da mesma forma que o perfil.

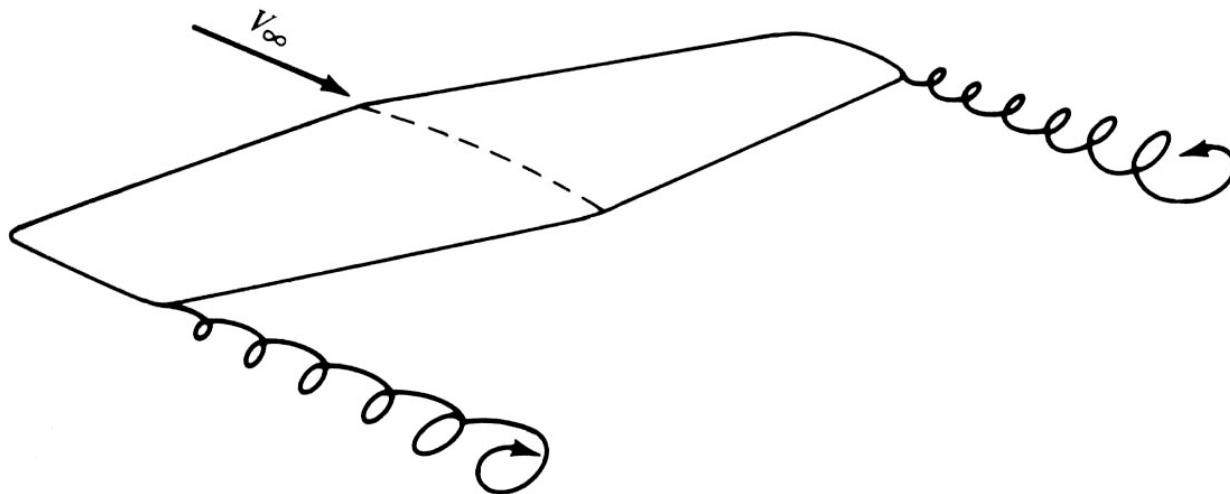
- Mas o escoamento em torno dum perfil é bidimensional, enquanto que a asa é um corpo tridimensional, pelo que o escoamento em torno dessa asa é, também, tridimensional.
- Isto quer dizer que existe uma componente do escoamento na direcção da envergadura.
- A figura seguinte mostra as vistas em planta e de frente de uma asa finita.



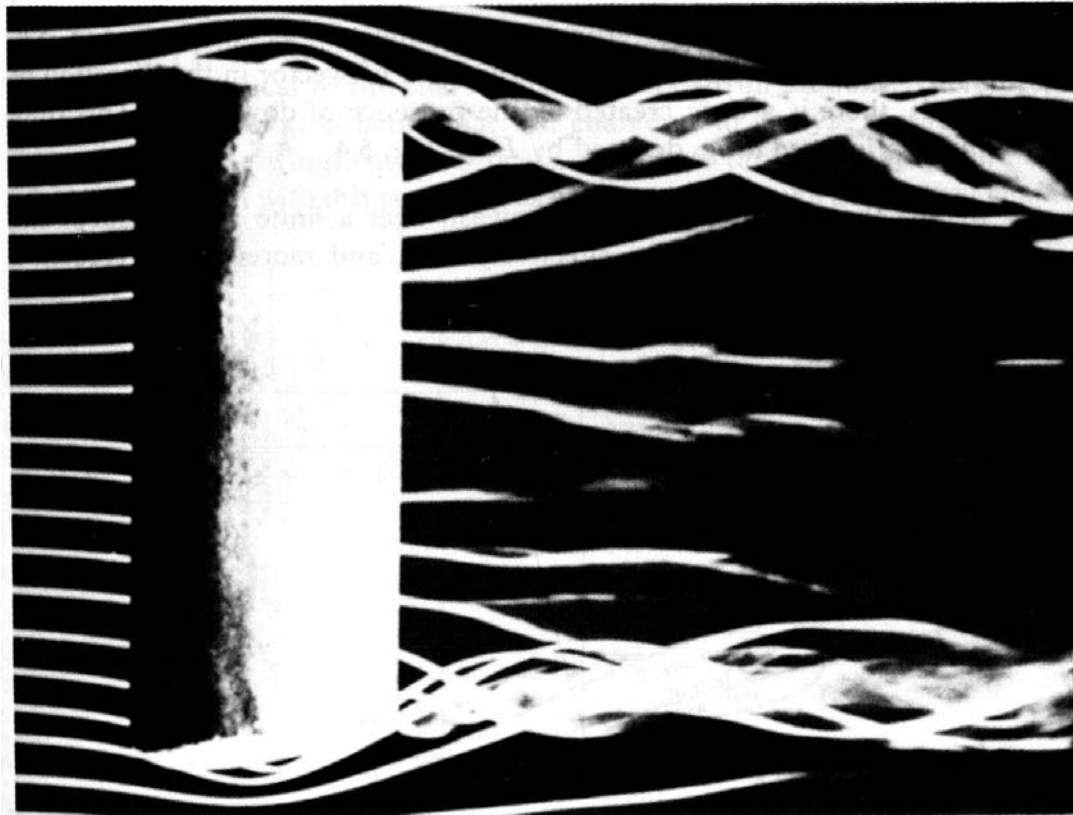
- O mecanismo físico que gera a sustentação deve-se ao facto de existir uma alta pressão no intradorso da asa e uma baixa pressão no extradorso da asa.
- O resultado desta situação é uma distribuição de pressão tal que gera uma força resultante: a sustentação.
- Este diferencial de pressão provoca, na ponta da asa, uma circulação de ar do intradorso com alta pressão para o extradorso com baixa pressão.
- Assim, no extradorso existe uma componente do escoamento na direcção da envergadura, da ponta para a raiz: as linhas de corrente curvam na direcção da raiz.
- De forma idêntica, no intradorso existe uma componente do escoamento na direcção da envergadura, da raiz para a ponta: as linhas de corrente curvam na direcção da ponta.
- Assim, as características da asa diferem das do perfil.

Downwash e Arrasto Induzido

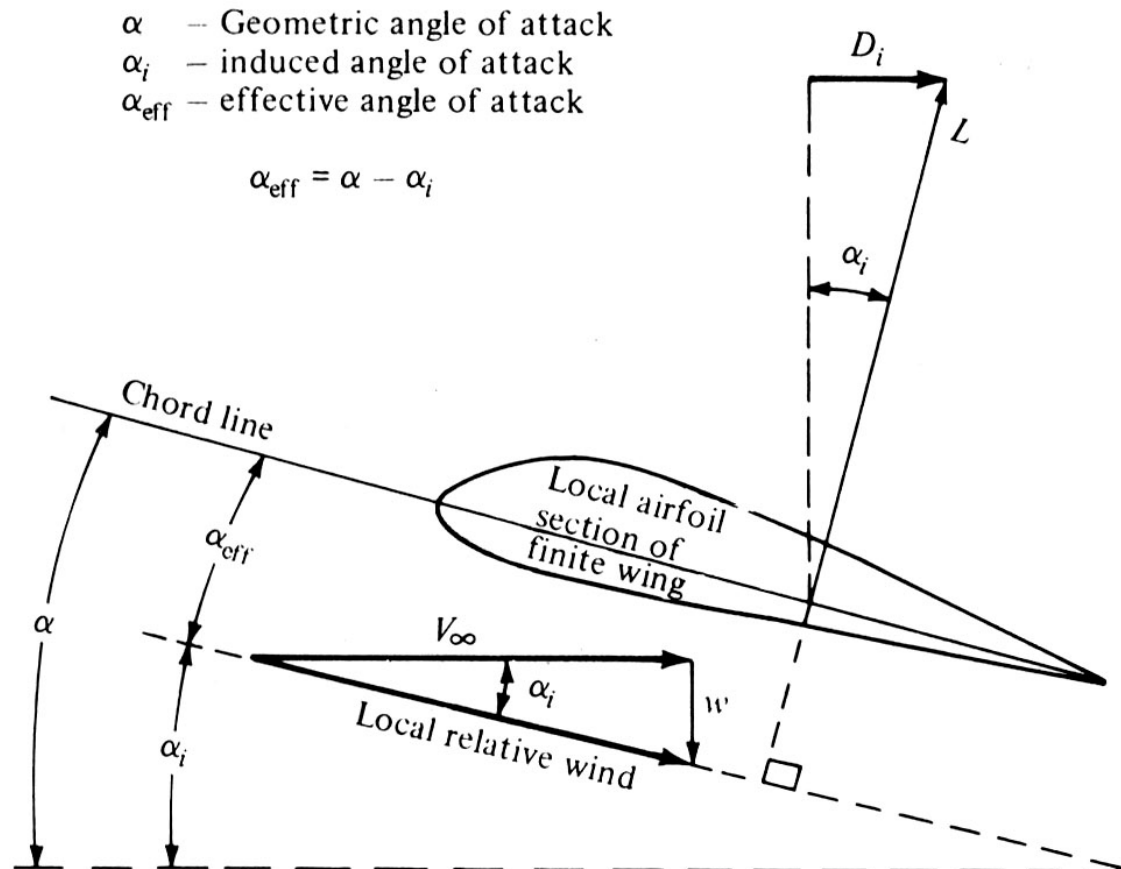
- A tendência que o escoamento tem em contornar a ponta da asa tem um outro efeito importante na aerodinâmica da asa.
- Este escoamento gera um movimento rotativo que se desloca para jusante da asa: forma-se um vórtice de arrasto em cada uma das pontas, como mostra a figura.



- Estes vórtices de ponta a jusante da asa induzem uma componente para baixo na velocidade do ar na proximidade da ponta.
- A figura abaixo mostra este efeito, onde se observam os vórtices a arrastar o ar circundante e a gerar uma pequena componente de velocidade para baixo na asa.



- Esta componente vertical chama-se *downwash* e escreve-se w .
- O downwash combina-se com a velocidade do escoamento livre V_{∞} e produz um vento relativo local inclinado para baixo na vizinhança de cada secção da asa.



- O ângulo formado entre a linha de corda e a direcção de V_{oo} é o ângulo de ataque.
- Este ângulo de ataque chama-se o *ângulo de ataque geométrico*.
- O vento relativo local está inclinado para baixo da direcção de V_{oo} pelo ângulo α_i , chamado *ângulo de ataque induzido*.
- O downwash e a inclinação do vento relativo tem dois efeitos importantes na secção local:
 - O ângulo de ataque visto pela secção local é o ângulo formado entre a corda e o vento relativo local – o *ângulo de ataque efectivo*

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$$

- O vector de sustentação local é perpendicular ao vento relativo local e por isso está inclinado para trás de α_i . Assim, existe uma componente do vector de sustentação na direcção de V_{oo} : existe arrasto devido à presença de w – o *arrasto induzido*, D_i .

- Pode ver-se que a presença do downwash numa asa finita reduz o ângulo de ataque que cada uma das suas secções vê de facto e cria uma componente de arrasto.
- Apesar do escoamento em questão ser invíscido e incompressível, onde não existe fricção ou separação, aparece uma componente de arrasto finita: o arrasto induzido.
- O arrasto total numa asa subsónica real é a soma do arrasto induzido, D_i , do arrasto de fricção, D_f , e do arrasto de pressão devido à separação, D_p .
- As duas últimas contribuições devem-se aos efeitos viscosos, como já foi visto.
- A soma destas duas contribuições viscosas chama-se arrasto de forma.

- No capítulo anteriores foram vistas curvas de coeficiente de arrasto parasita, C_d .
- Para ângulos de ataque moderados, o arrasto de forma de uma asa finita é praticamente igual ao das suas secções.
- Assim, definindo

$$C_d = \frac{D_f + D_p}{q_\infty S}$$

$$C_{Di} = \frac{D_i}{q_\infty S}$$

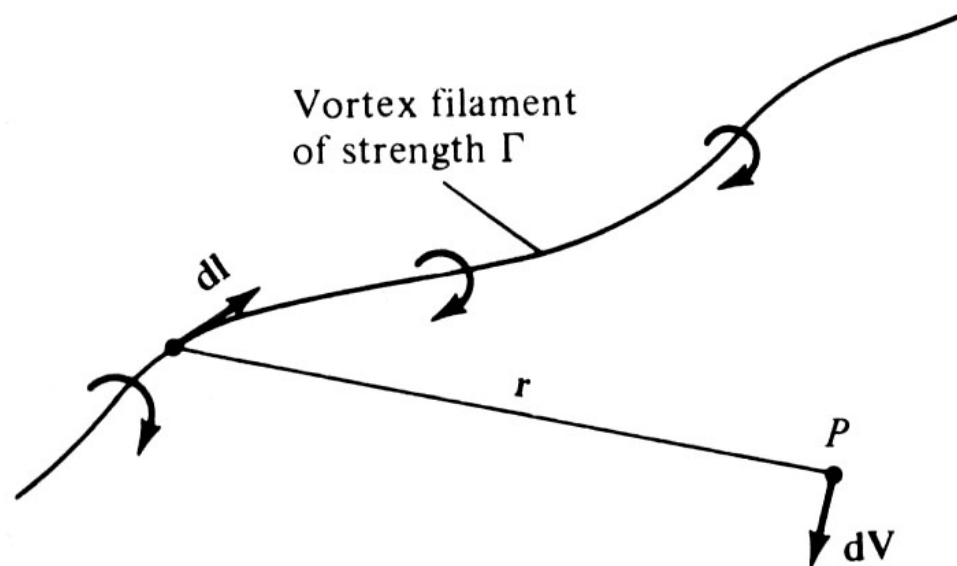
- O coeficiente de arrasto total é

$$C_D = C_d + C_{Di}$$

- O valor de C_d é normalmente obtido dos dados do perfil enquanto que o de C_{Di} pode ser calculado da teoria da asa finita descrita neste capítulo.

5.2. A Lei de Biot-Savart e os Teoremas de Helmholtz

- Para estabelecer uma teoria para a asa finita é necessário introduzir algumas ferramentas aerodinâmicas adicionais.
- Expandindo o conceito de linha de vórtice, pode ter-se uma linha de vórtice curva, como mostra a figura.

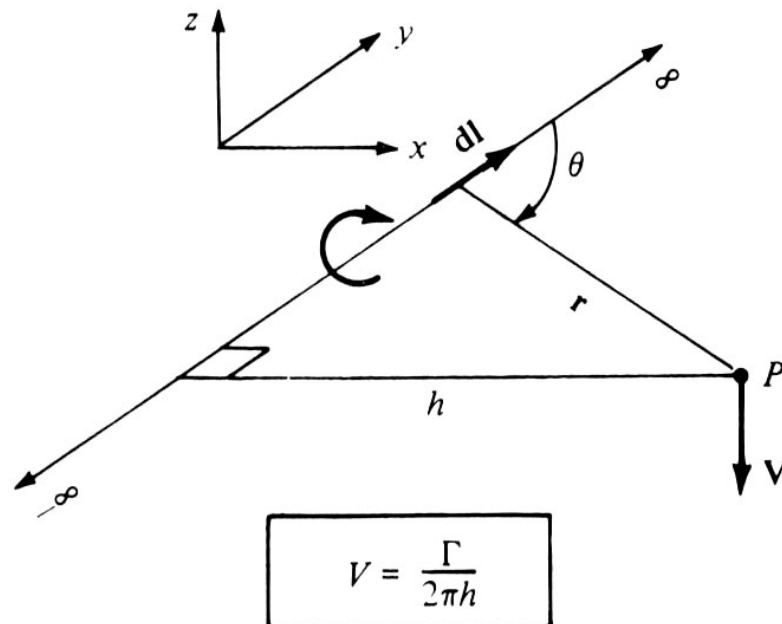


- A linha de vórtice induz um campo de velocidade no espaço circundante.
- Se a circulação é obtida em qualquer trajectória que envolva a linha, então, Γ é um valor constnate.
- Assim, a intensidade da linha de vórtice é definida com Γ .
- O vector raio desde dl até um ponto arbitrário P no espaço é r .
- O segmento dl induz uma velocidade em P igual a

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times r}{|r|^3}$$

- Esta equação é a *Lei de Biot-Savart* e é uma das expressões mais fundamentais na teoria de escoamento invíscido e incompressível.

- Um linha de vórtice isolada não tem qualquer aplicação.
- No entanto, usando várias linhas de vórtice em conjunto com um escoamento livre uniforme, é possível representar escoamentos com aplicações práticas.
- O escoamento em torno de uma asa finita é um bom exemplo.
- A figura abaixo mostra a lei de Biot-Savart aplicada a uma linha de vórtice recta com comprimento infinito.



- A intensidade da linha de vórtice é Γ .
- A velocidade induzida no ponto P pelo segmento dl é dado pela equação anterior.
- Assim, a velocidade induzida em P pela linha de vórtice completa é

$$\mathbf{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

- Pela definição de produto externo a direcção de $\mathbf{V}$ é para baixo.
- A magnitude da velocidade, $V = |\mathbf{V}|$, é dada por

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl$$

- Se h é a distância perpendicular desde o ponto P até à linha de vórtice então, da figura, tem-se.

$$r = \frac{h}{\sin \theta}$$

$$l = \frac{h}{\tan \theta}$$

$$dl = -\frac{h}{\sin^2 \theta} d\theta$$

- Substituindo estas expressões na equação anterior obtém-se

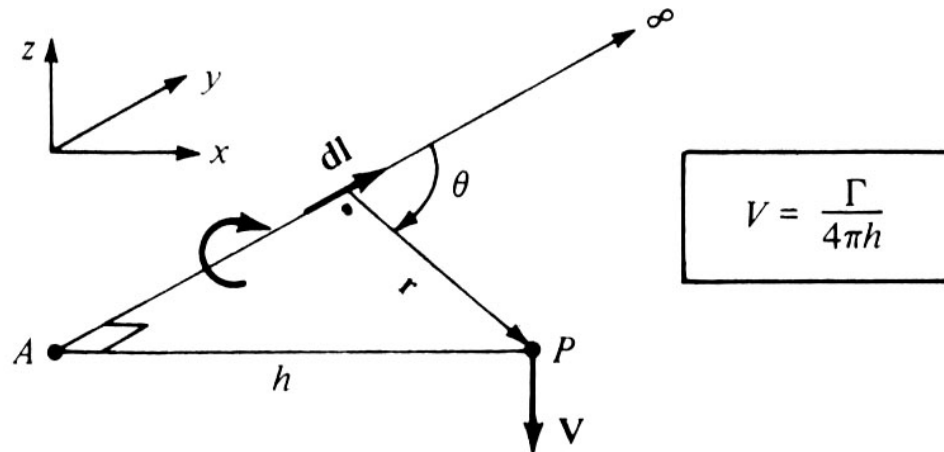
$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl = -\frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\pi}^0 \sin \theta d\theta$$

- Ou

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h}$$

- A figura abaixo representa um filamento de vórtice semi-infinito.
- O filamento estende-se desde o ponto A até infinito.
- Este ponto A pode ser considerado uma fronteira do escoamento.
- Se P for um ponto perpendicular à linha de vórtice no ponto A então, a velocidade induzida em P pela linha de vórtice semi-infinita é

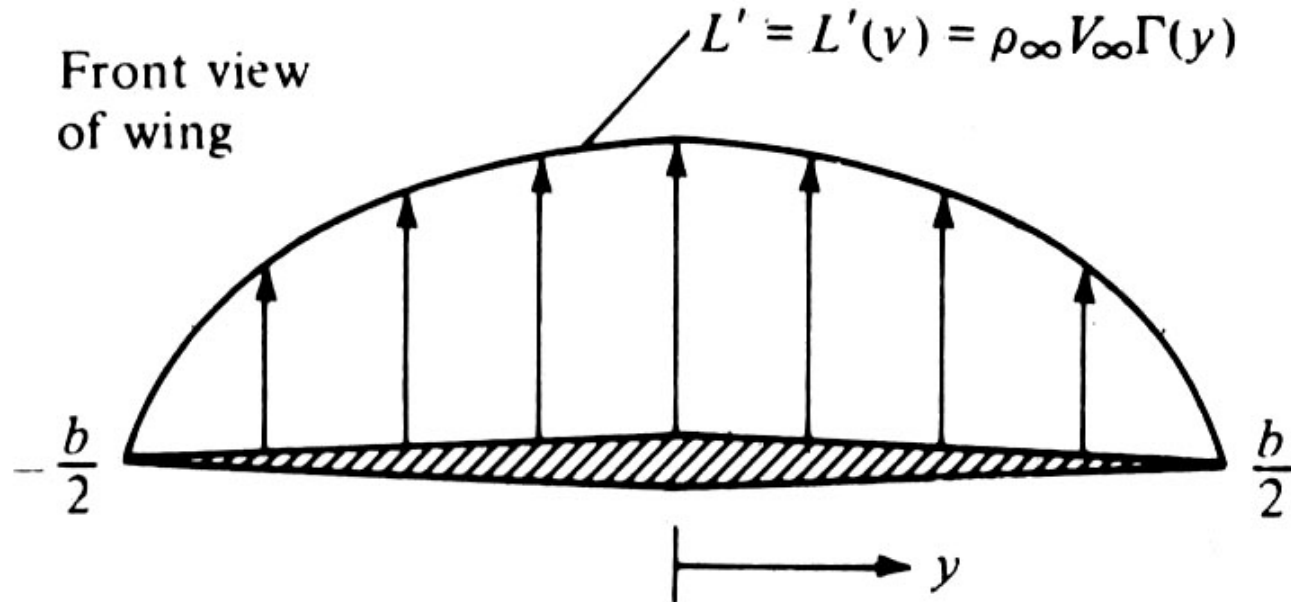
$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}$$



- O cientista alemão Hermann von Helmholtz foi o primeiro a usar o conceito da linha de vórtice na análise de escoamento invíscido e incompressível.
- Ele estabeleceu alguns princípios acerca das linhas de vórtice que ficaram conhecidos por teoremas de Helmholtz:
 - A intensidade de uma linha de vórtice é constante ao longo do seu comprimento;
 - Uma linha de vórtice não pode terminar num fluido: ela tem que se estender até aos limites do fluido (pode ser $\pm \infty$) ou formar um circuito fechado.
- Também convém mencionar o conceito de *distribuição de sustentação* ao longo da envergadura de uma asa.
- Numa dada posição na envergadura y_1 , a corda local é c , o ângulo de ataque geométrico local é α e o perfil tem uma dada forma.

- A sustentação por unidade de envergadura nesta secção é $L'(y_1)$.
- Noutra secção, y_2 , na envergadura da asa tem-se c , α e um dado perfil podem ser diferentes dos anteriores.
 - A grande maioria das asas possuem cordas variáveis, com a excepção da asa rectangular;
 - Muitas asas têm torção geométrica pelo que α é diferente em diferentes posições da envergadura;
 - Se o α da ponta é inferior ao da raiz, a asa tem washout;
 - Se o α da ponta é superior ao da raiz, a asa tem washin;
 - Também existem asas com diferentes perfis ao longo da envergadura, com α_0 diferentes: estas asas têm torção aerodinâmica.
- A sustentação por unidade de envergadura nesta secção, $L'(y_2)$, é, geralmente, diferente de $L'(y_1)$.

- Desta forma, existe uma distribuição de sustentação por unidade de envergadura ao longo da asa, $L' = L'(y)$, como mostra a figura abaixo.
- Por sua vez, a circulação também é função de y , $\Gamma(y) = L'(y)/(\rho_{\infty} V_{\infty})$.
- A distribuição de sustentação é nula nas pontas da asa.
- Isto resulta do facto de não existir diferencial de pressão entre o intradorso e o extradorso em $y = -b/2$ e $y = b/2$.

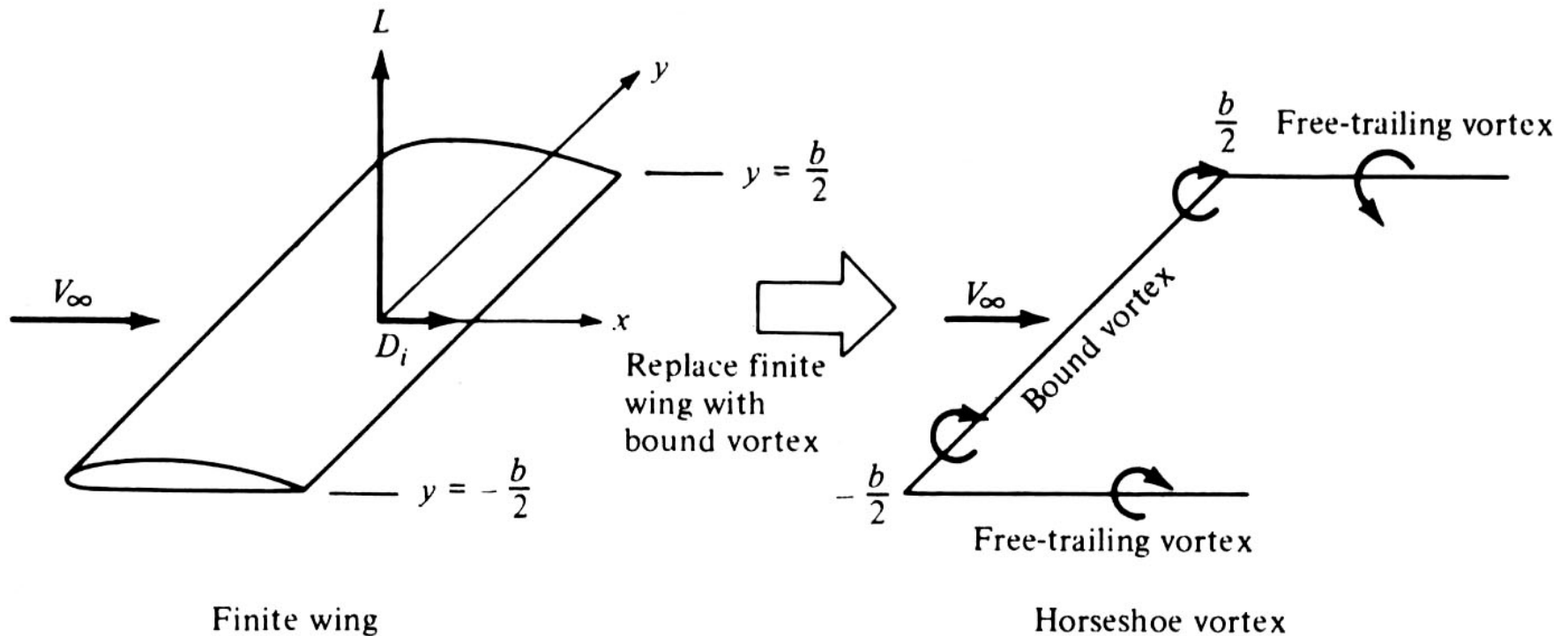


- O cálculo da distribuição de sustentação é um problema central na teoria da asa finita.
- Em resumo, deseja-se determinar o arrasto induzido, a sustentação total e a distribuição de sustentação de uma asa finita.

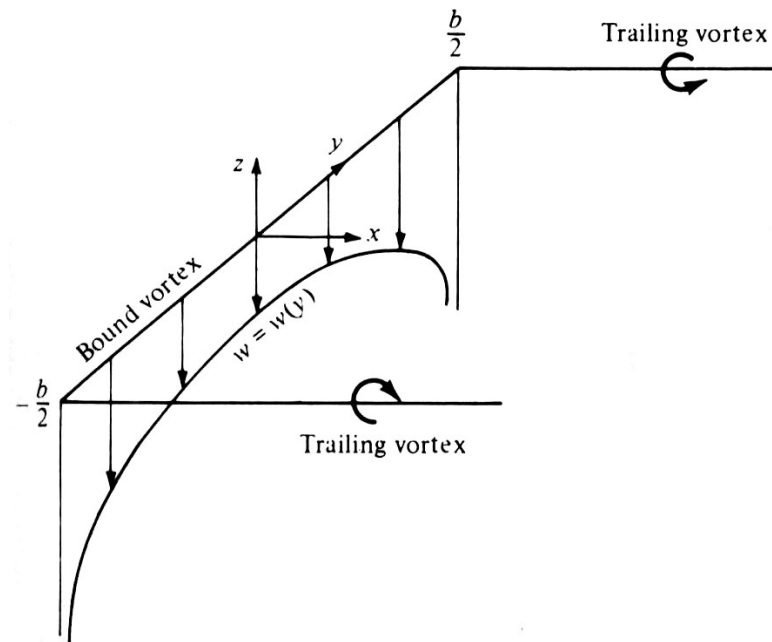
5.3. Teoria da Linha Sustentadora Clássica

- A primeira teoria prática para prever as características aerodinâmicas de uma asa finita foi desenvolvida por Ludwig Prandtl e pelos seus colegas.
- A importância da teoria de Prandtl é tal que ainda hoje é usada para cálculos preliminares das características de uma asa.
- Nesta secção esta teoria vai ser descrita.
- Uma linha de vórtice de intensidade Γ , que é limitada de alguma forma a uma posição fixa no escoamento, sofre uma força $L = \rho_{oo} V_{oo} \Gamma$ segundo o teorema de Kutta-Joukowski.

- Este vórtice limitado está em contraste com um vórtice livre que se move com os mesmos elementos de fluido pelo escoamento.
- Então, a asa finita com envergadura b é substituída por um vórtice limitado desde $y = -b/2$ até $y = b/2$, como mostra a figura.



- Mas, segundo o teorema de Helmholtz, uma linha de vórtice não pode terminar no fluido.
- Assim, esta linha de vórtice continua como dois vórtices livres deslocando-se para jusante desde as pontas da asa até ao infinito.
- O conjunto do vórtice limitado com os dois vórtices chama-se *vórtice de ferradura*.
- A figura abaixo mostra um vórtice de ferradura.



- Da figura pode ver-se que o vórtice limitado não induz velocidade em si próprio.
- No entanto, os dois vórtices livres contribuem para a velocidade induzida ao longo do vórtice limitado, e ambas as contribuições são para baixo.
- Considerando a origem dos eixos no centro do vórtice limitado, então a velocidade num ponto y ao longo do vórtice limitado induzida pelos vórtices livres semi-infinitos é

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi(b/2 + y)} - \frac{\Gamma}{4\pi(b/2 - y)}$$

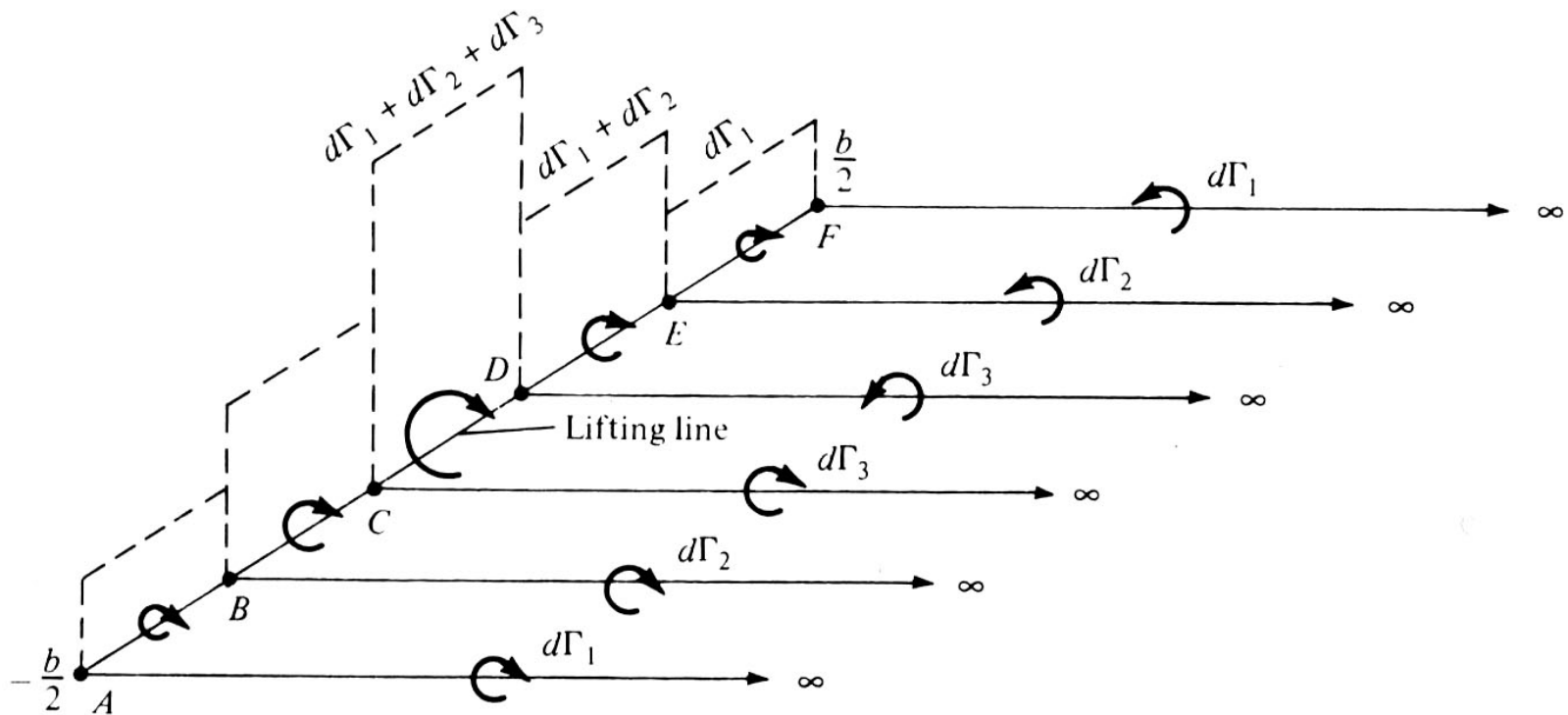
- O primeiro termo da direita é a contribuição do vórtice livre esquerdo (em $-b/2$) e o segundo termo é a contribuição do vórtice livre da direita (em $b/2$).

- Esta equação pode ser simplificada

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{(b/2)^2 - y^2}$$

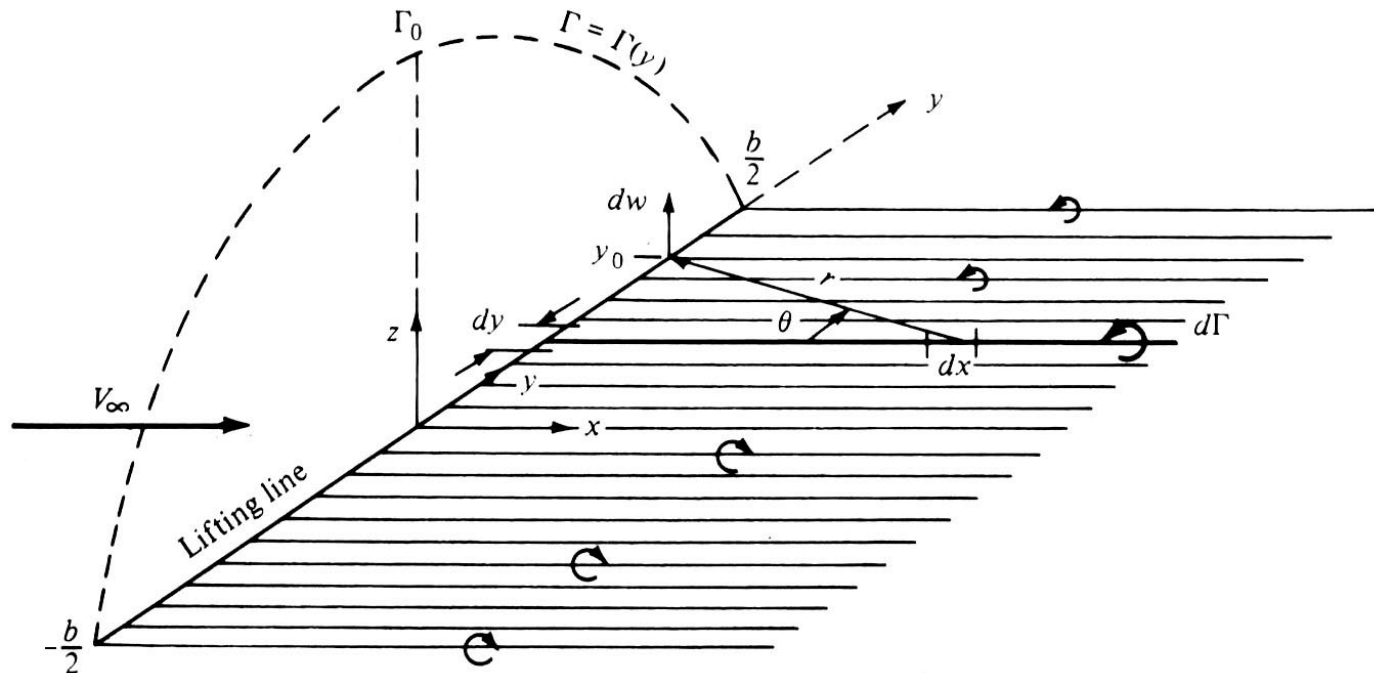
- Pode ver-se que w tende para infinito à medida que y tende para $-b/2$ ou $b/2$.
- Esta representação da distribuição do downwash não é realista para uma asa finita.
- Assim, em vez de se representar a asa por um único vórtice de ferradura, sobrepõem-se um número elevado de vórtices de ferradura cada um com diferentes comprimentos do vórtice limitado.
- Todos os vórtices limitados estão coincidentes numa única linha, chamada a *linha sustentadora*.

- Este conceito está representado na figura abaixo, onde estão mostrados apenas três vórtices de ferradura, por simplicidade.
- Um vórtice de ferradura de intensidade $d\Gamma_1$ vai desde $-b/2$ a $b/2$ (do ponto A ao ponto F).
- Sobreposto a este está um segundo vórtice de ferradura de intensidade $d\Gamma_2$ desde o ponto B até ao ponto E .



- Finalmente, sobreposto a este está um terceiro vórtice de ferradura de intensidade $d\Gamma_3$ desde o ponto C até ao ponto D .
- Como resultado, a circulação varia ao longo dos vórtices limitados: a circulação varia ao longo da linha de sustentação.
- Da figura pode ver-se que a circulação em cada ponto é a soma das intensidades dos vórtices sobrepostos:
 - Em AB e EF a circulação é $d\Gamma_1$;
 - Em BC e DE a circulação é $d\Gamma_1 + d\Gamma_2$;
 - Em CD a circulação é $d\Gamma_1 + d\Gamma_2 + d\Gamma_3$.
- Também se vê que existe uma série de vórtices livres distribuídos ao longo da envergadura.
- A intensidade de cada vórtice livre é igual ao incremento da circulação ao longo da linha de sustentação.

- Se esta idéia for levada ao extremo pode ter-se um número infinito de vórtices de ferradura sobrepostos ao longo da linha de sustentação, cada um com uma intensidade pequena $d\Gamma$.
- A figura abaixo representa este caso.
- Agora tem-se uma distribuição contínua de $\Gamma(y)$ ao longo da linha de sustentação e o valor na origem é Γ_0 .



- Os vórtices livres formam uma folha de vórtice para trás da linha de sustentação.
- Esta folha de vórtice é paralela a V_{∞} .
- A intensidade total desta folha, integrada ao longo da envergadura, é nula uma vez que consiste em pares de vórtices livres com intensidade igual mas sentido contrário.
- Considere-se um segmento infinitamente pequeno na linha de sustentação, dy , posicionado em y .
- A circulação em y é $\Gamma(y)$ e o incremento da circulação sobre o segmento é $d\Gamma = (d\Gamma/dy)dy$.
- Por sua vez, a intensidade do vórtice livre em y tem que ser igual ao incremento da circulação $d\Gamma$ ao longo da linha de sustentação.
- Considere-se, também, a posição arbitrária y_0 ao longo da linha de sustentação.

- Qualquer segmento do vórtice livre, dx , induz uma velocidade em y_0 com magnitude e direcção dada pela lei de Biot-Savart.
- A velocidade dw em y_0 induzida pelo vórtice livre semi-infinito localizado em y já foi obtida anteriormente.
- Neste caso tem-se

$$dw = -\frac{(d\Gamma/dy)dy}{4\pi(y_0 - y)}$$

- A velocidade total w induzida em y_0 pela folha de vórtice completa é a soma de dw em todos os filamentos

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y}$$

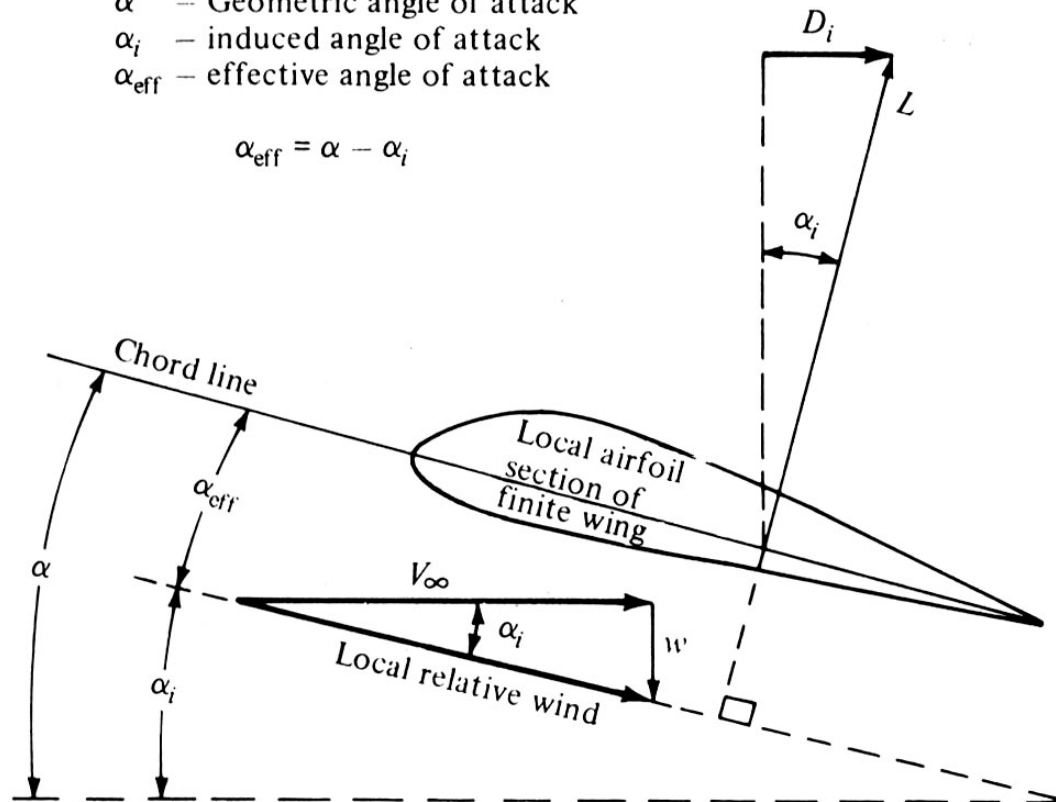
- Esta equação é importante porque fornece o valor do downwash em y_0 devido a todos os vórtices livres.

- Observando, novamente, a figura abaixo, e assumindo que a secção ilustrada se encontra numa posição da envergadura y_0 , então o ângulo de ataque induzido é

$$\alpha_i(y_0) = \tan^{-1} \left(\frac{-w(y_0)}{V_\infty} \right)$$

α — Geometric angle of attack
 α_i — induced angle of attack
 α_{eff} — effective angle of attack

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$$



- Geralmente, w é muito inferior a V_{∞} , logo α_i é um ângulo pequeno.

- Assim,

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{w(y_0)}{V_{\infty}}$$

- Substituindo $w(y_0)$ nesta equação, tem-se

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y}$$

- Esta expressão dá o ângulo de ataque induzido em função da distribuição de circulação $\Gamma(y)$ ao longo da asa.
- Como visto anteriormente, o ângulo de ataque visto pelo perfil local é α_{eff} .
- Uma vez que o downwash varia ao longo da envergadura, então α_{eff} também é variável: $\alpha_{\text{eff}} = \alpha_{\text{eff}}(y_0)$.

- O coeficiente de sustentação do perfil na posição y_0 é

$$C_l = a_0 [\alpha_{\text{eff}}(y_0) - \alpha_0] = 2\pi [\alpha_{\text{eff}}(y_0) - \alpha_0]$$

- Para uma asa com torção aerodinâmica α_0 varia com y_0 .
- Se não houver torção aerodinâmica α_0 é constante ao longo da envergadura.
- Em qualquer dos casos α_0 é uma característica conhecida dos perfis locais.
- Da definição de sustentação e do teorema de Kutta-Joukowski, tem-se, para o perfil local em y_0 ,

$$L' = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c(y_0) C_l = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma(y_0)$$

$$C_l = \frac{2\Gamma(y_0)}{V_{\infty} c(y_0)}$$

- Igualando as duas expressões de C_l e resolvendo em ordem a α_{eff} , obtém-se

$$\alpha_{\text{eff}} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_0$$

- Sabendo que $\alpha = \alpha_{\text{eff}} + \alpha_i$, obtém-se a expressão seguinte

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_0(y_0) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_0 - y}$$

- Esta é a *equação fundamental da teoria da linha de sustentação de Prandtl*.
- Ela mostra, simplesmente, que o ângulo de ataque geométrico é a soma do ângulo de ataque efectivo com o ângulo de ataque induzido.
- Na equação, a única variável é Γ .

- Todas as outras quantidades, a , c , V_{∞} , α_0 são conhecidas para uma determinada asa finita com um dado ângulo de ataque num escoamento de determinada velocidade.
- A solução desta equação fornece $G = G(y_0)$ onde y_0 varia de $-b/2$ a $b/2$.
- A solução de $G = G(y_0)$ permite obter as três principais características aerodinâmicas:
- Distribuição de sustentação:
 - A distribuição de sustentação é obtida com o teorema de Kutta-Joukowski

$$L'(y_0) = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma(y_0)$$

- Coeficiente de sustentação:
 - A sustentação total é o integral da equação acima ao longo da envergadura

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) dy = \rho_{\infty} V_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

- O coeficiente de sustentação é, então,

$$C_l = \frac{L}{q_{\infty} S} = \frac{2}{V_{\infty} S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

- Coeficiente de arrasto induzido:

- O arrasto induzido é obtido observando a figura anterior

$$D'_i = L' \sin \alpha_i$$

- Uma vez que α_i é pequeno tem-se

$$D'_i = L' \alpha_i$$

- O arrasto induzido total é o integral da equação acima ao longo da envergadura

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) \alpha_i(y) dy = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy$$

- O coeficiente de arrasto induzido é, então,

$$C_{Di} = \frac{D_i}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy$$

- A solução de $\Gamma(y)$ da equação fundamental da teoria da linha de sustentação de Prandtl é a chave para a obtenção das características aerodinâmicas da asa finita.

5.3.1. Distribuição de Sustentação Elíptica

- Considere-se a distribuição de circulação seguinte.

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

- Desta equação observa-se que:

Γ_0 é a circulação na origem;

- A circulação varia elipticamente com y . Logo, a distribuição de sustentação também é elíptica:

$$L'(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

- A circulação, logo a sustentação, é nula nas pontas da asa como desejado: $\Gamma(b/2) = \Gamma(-b/2) = 0$. Esta distribuição é assumida.

- Quais são as características aerodinâmicas de uma asa com distribuição de sustentação elíptica?
- Para começar, determina-se o downwash.
- Derivando a equação da circulação tem-se

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{4\Gamma_0}{b^2} \frac{y}{\sqrt{1-4y^2/b^2}}$$

- Substituindo $d\Gamma/dy$ na equação do downwash obtém-se

$$w(y_0) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y}{\sqrt{1-4y^2/b^2} (y_0 - y)} dy$$

- O integral pode ser calculado fazendo a substituição

$$y = \frac{b}{2} \cos \theta$$

$$dy = -\frac{b}{2} \sin \theta d\theta$$

- Então

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_{\pi}^0 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta} d\theta$$

- Ou

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta$$

- O integral tem a forma padrão já encontrada antes, para $n = 1$,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \equiv \frac{\pi \operatorname{senn} \theta_0}{\operatorname{sen} \theta_0}$$

- Então o downwash é

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}$$

- Este importante resultado mostra que o downwash, para uma distribuição de sustentação elíptica, é constante ao longo da envergadura.
- O ângulo de ataque induzido é

$$\alpha_i = -\frac{w}{V_\infty} = \frac{\Gamma_0}{2bV_\infty}$$

- Para uma distribuição de sustentação elíptica, o ângulo de ataque induzido também é constante ao longo da envergadura.
- À medida que a envergadura tende para infinito w e α_i tendem para zero, o que é consistente com a teoria do perfil analisada anteriormente.
- Pode obter-se uma expressão para α_i mais conveniente.

- Assim,

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1 - \frac{4y^2}{b^2}} dy$$

- Aplicando a transformação $y = (b/2)\cos\theta$ obtém-se

$$L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \frac{b}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \frac{b}{4} \pi$$

- Resolvendo, agora, em ordem a Γ_0 , tem-se

$$\Gamma_0 = \frac{4L}{\rho_{\infty} V_{\infty} b \pi}$$

- No entanto, $L = 0,5 \rho_{oo} V_{oo}^2 SC_L$, logo

$$\Gamma_0 = \frac{2V_{\infty} SC_L}{b \pi}$$

- Substituindo este resultado na equação do α_i , tem-se

$$\alpha_i = \frac{2V_\infty SC_L}{b\pi} \frac{1}{2bV_\infty} = \frac{SC_L}{\pi b^2}$$

- Uma característica importante de uma asa finita é a *razão de aspecto* ou *alongamento* definida como

$$A = \frac{b^2}{S}$$

- Assim, o ângulo de ataque induzido é dado por

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi A}$$

- Agora pode obter-se o coeficiente de arrasto induzido, tendo em conta que α_i é constante,

$$C_{Di} = \frac{2\alpha_i}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2\alpha_i \Gamma_0}{V_\infty S} \frac{b}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi \alpha_i \Gamma_0 b}{2V_\infty S}$$

- Substituindo as expressões de Γ_0 e α_i nesta equação obtém-se

$$C_{Di} = \frac{\pi b}{2V_\infty S} \left(\frac{C_L}{\pi A} \right) \frac{2V_\infty S C_L}{b \pi}$$

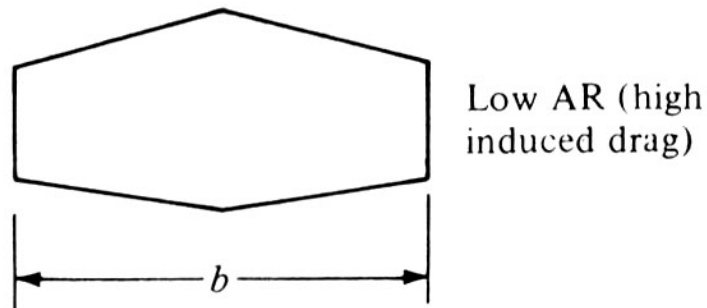
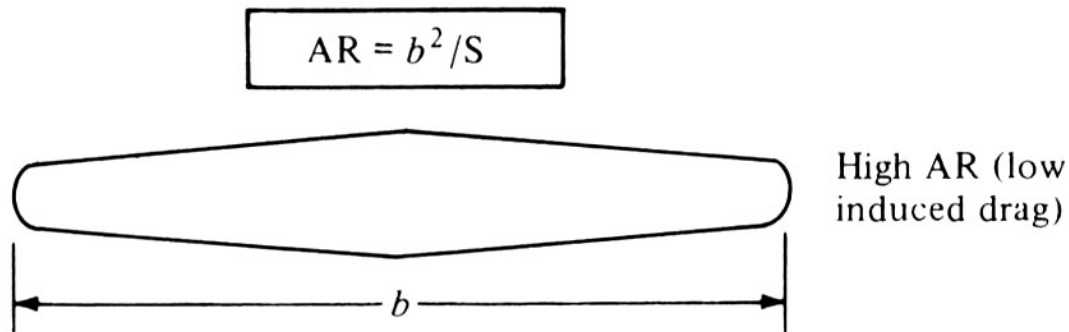
- Finalmente, simplificando, tem-se

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A}$$

- Este resultado é importante e mostra que o coeficiente de arrasto induzido é directamente proporcional ao quadrado do coeficiente de sustentação.
- Já se tinha visto que o arrasto induzido é um resultado da presença dos vórtices de ponta de asa que se formam devido à diferença de pressão entre o intradorso e o extradorso.

- A sustentação é produzida por essa diferença de pressão.
- Por isso, o arrasto induzido está relacionado com a produção de sustentação.
- Frequentemente chama-se ao arrasto induzido *arrasto devido à sustentação*.
- O arrasto induzido é o preço que se paga por gerar sustentação.
- O coeficiente de arrasto induzido aumenta rapidamente à medida que o coeficiente de sustentação aumenta.
- Quando a velocidade é baixa, que é o caso das fases de descolagem e aterragem, o C_L é elevado e o arrasto induzido torna-se uma componente significativa do arrasto total.
- Mesmo a velocidades maiores o arrasto induzido pode ser significativo.

- Outro aspecto do coeficiente de arrasto induzido é a sua proporcionalidade inversa com o alongamento.
- Assim, para reduzir o arrasto induzido, é desejável ter uma asa finita com o alongamento maior possível.
- A figura abaixo mostra uma asa com A elevado e outra com A reduzido.



- Na prática, o projecto de uma asa com elevado alongamento com o grau de resistência e rigidez estrutural desejado não é simples.
- Por isso o alongamento de uma asa convencional é um compromisso entre requisitos aerodinâmicos e estruturais.
- Existe outra característica da distribuição de sustentação elíptica.
- Considere-se uma asa sem torção geométrica (α é constante) e sem torção aerodinâmica (α_0 é constante).
- O ângulo de ataque induzido, α_i , é constante, como já foi visto.
- Então, o ângulo de ataque efectivo também é constante ($\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$).

- Sabendo que o coeficiente de sustentação de cada perfil é dado por

$$C_l = a_0 (\alpha_{\text{eff}} - \alpha_0)$$

- Assumindo que a_0 é igual para todas as secções ($a_0 = 2\pi$ da teoria do perfil fino), então o C_l é constante ao longo da envergadura.
- A sustentação por unidade de envergadura é

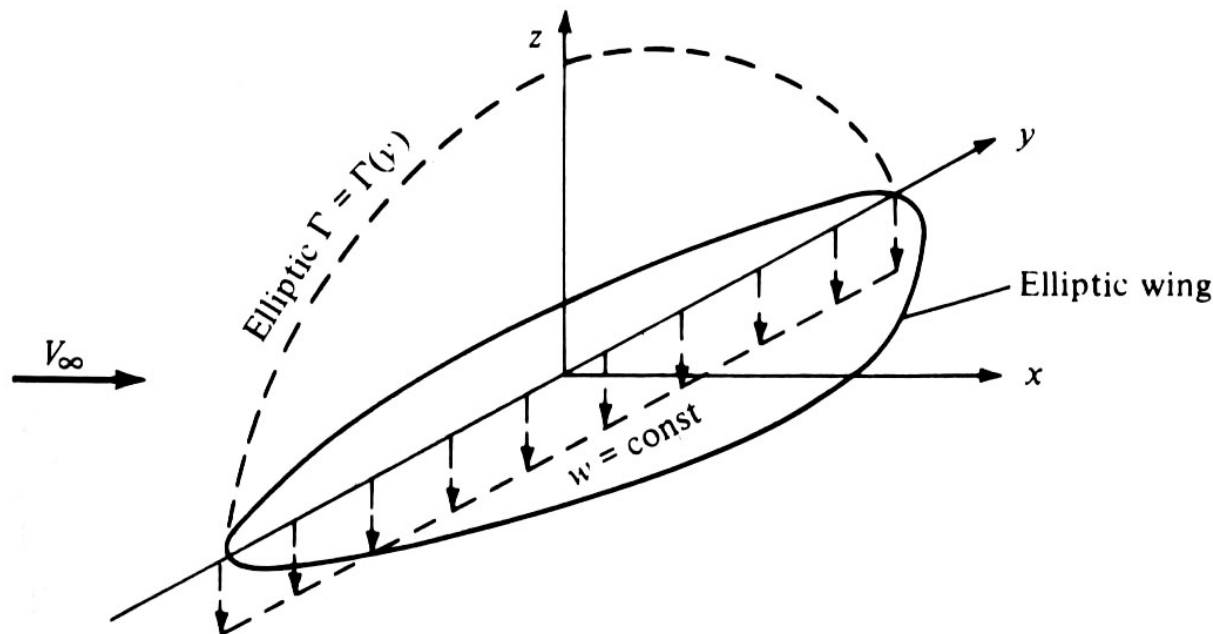
$$L'(y) = q_\infty c C_l$$

- Resolvendo em ordem a c tem-se

$$c = \frac{L'(y)}{q_\infty C_l}$$

- Nesta equação q_∞ e C_l não variam com y .

- Mas $L'(y)$ varia elípticamente ao longo da envergadura.
- Então, desta equação conclui-se que, para se ter a distribuição de sustentação elíptica, a corda da asa tem que variar elípticamente ao longo da envergadura.
- Ou seja, a forma em planta da asa tem que ser elíptica.
- A figura abaixo resume as características: distribuição de sustentação elíptica, distribuição de corda elíptica e downwash constante.



- Apesar da distribuição de sustentação elíptica parecer um caso restritivo e isolado, na realidade ela é uma aproximação razoável para o coeficiente de arrasto induzido de uma asa arbitrária.
- A expressão do C_{Di} é, apenas, modificada ligeiramente para o caso geral, como se vai ver em seguida.

5.3.2. Distribuição de Sustentação Geral

- Considere-se a transformação

$$y = -\frac{b}{2} \cos \theta$$

- A coordenada na direcção da envergadura é agora θ , em que θ varia entre 0 e π .
- A distribuição elíptica anterior fica

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta$$

- Esta equação sugere que uma série de Fourier com seno seria uma boa aproximação para a distribuição geral da circulação numa asa qualquer.

- Assim, para o caso geral, assume-se

$$\Gamma(\theta) = 2bV_{\infty} \sum_1^N A_n \text{senn} \theta$$

- Podem ter-se tantos termos N quantos necessários para a precisão desejada.
- Os coeficientes A_n ($n = 1, \dots, N$) são incógnitas, mas têm que satisfazer a equação fundamental da teoria da linha sustentadora de Prandtl.
- Derivando a equação acima em ordem a y , tem-se

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d\theta}{dy} = 2bV_{\infty} \sum_1^N nA_n \cos n\theta \frac{d\theta}{dy}$$

- Substituindo as duas equações acima na equação fundamental da linha sustentadora obtém-se

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)} \sum_1^N A_n \text{senn} \theta_0 + \alpha_0(\theta_0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sum_1^N nA_n \cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta$$

- Simplificando, tem-se

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)} \sum_1^N A_n \operatorname{senn} n\theta_0 + \alpha_0(\theta_0) + \sum_1^N nA_n \frac{\operatorname{senn} n\theta_0}{\operatorname{sen} \theta_0}$$

- Examinando bem esta equação vê-se que as únicas incógnitas são os coeficientes A_n .
- A equação escrita numa posição da envergadura (num θ_0 especificado) é uma equação algébrica com N incógnitas $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- No entanto, é necessário escolher N posições na envergadura e resolver a equação em cada estação.
- Assim, obtém-se um sistema de N equações independentes em N incógnitas.
- Desta forma, obtêm-se valores numéricos para os coeficientes A_n que garantem que a distribuição de circulação satisfaz a equação fundamental.

- Agora que $\Gamma(\theta)$ é conhecido, o coeficiente de sustentação da asa finita é

$$C_L = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2b^2}{S} \sum_1^N A_n \int_0^\pi \text{senn} \theta \text{sen} \theta d\theta$$

- O integral desta equação é

$$\int_0^\pi \text{senn} \theta \text{sen} \theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \neq 1 \end{cases}$$

- Então o C_L fica

$$C_L = A_1 \pi \frac{b^2}{S} = A_1 \pi A$$

- Pode ver-se que C_L depende, apenas, do primeiro coeficiente da série de Fourier.
- No entanto, para obter A_1 , é necessário resolver o sistema de equações para todos os A_n .

- O coeficiente de arrasto induzido é obtido da seguinte forma:

$$C_{Di} = \frac{2}{V_{\infty} S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy = \frac{2b^2}{S} \int_0^{\pi} \left(\sum_1^N A_n \text{senn} \theta \right) \alpha_i(\theta) \text{sen} \theta d\theta$$

- O ângulo de ataque induzido $\alpha_i(\theta)$ é obtido de

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy) dy}{y_0 - y} = \frac{1}{\pi} \sum_1^N n A_n \int_0^{\pi} \frac{\cos n \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta$$

- Resolvendo o integral padrão tem-se

$$\alpha_i(y_0) = \sum_1^N n A_n \frac{\text{senn} \theta}{\text{sen} \theta}$$

- Substituindo esta equação na equação do C_{Di} obtém-se

$$C_{Di} = \frac{2b^2}{S} \int_0^{\pi} \left(\sum_1^N A_n \text{senn} \theta \right) \left(\sum_1^N A_n \text{senn} \theta \right) d\theta$$

- Esta equação envolve o produto de dois somatórios.
- Do integral padrão

$$\int_0^\pi \sin m\theta \sin k\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq k \\ \pi/2 & \text{para } m = k \end{cases}$$

- Os termos do produto com índice diferente (como A_1A_2 , A_2A_4 , etc.) são zero. Logo

$$C_{Di} = \frac{2b^2}{S} \left(\sum_1^N nA_n^2 \right) \frac{\pi}{2} = \pi A \sum_1^N nA_n^2$$

$$C_{Di} = \pi A \left(A_1^2 + \sum_2^N nA_n^2 \right) = \pi A A_1^2 \left[1 + \sum_2^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right]$$

- Finalmente, substituindo para $A_1 = C_L/(\pi A)$, tem-se

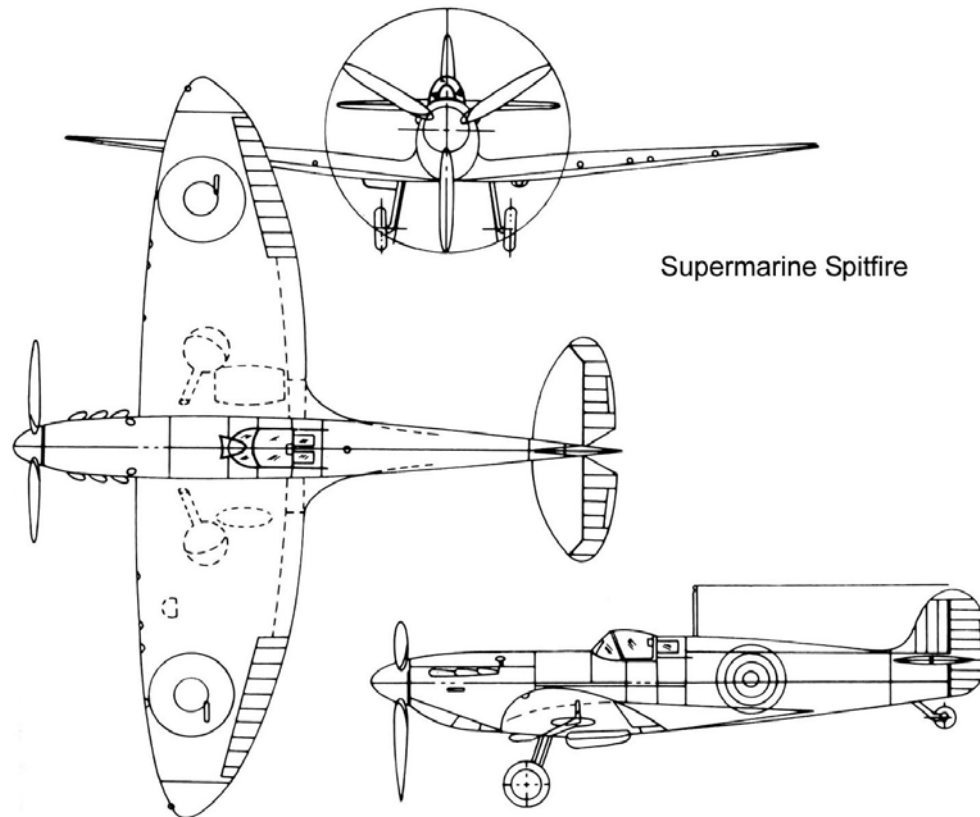
$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A} (1 + \delta)$$

- Nesta equação $\delta = \sum_2^N n(A_n/A_1)^2$.
- Uma vez que $\delta \geq 0$, então o factor $1 + \delta \geq 1$.
- Definindo a eficiência da envergadura como $e = (1 + \delta)^{-1}$, então

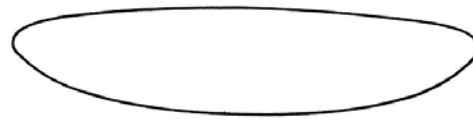
$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A e}$$

- Aqui $e \leq 1$.
- Comparando as equações do C_{Di} para a distribuição de sustentação geral e para a distribuição de sustentação elíptica, vê-se que $\delta = 0$ e $e = 1$ para a distribuição elíptica.
- Logo, a distribuição de sustentação que resulta no arrasto induzido mínimo é a distribuição elíptica.
- É por esta razão que existe grande interesse na distribuição de sustentação elíptica.

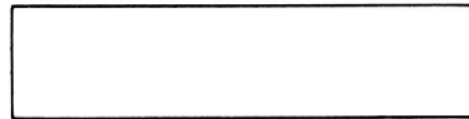
- Já foi visto que, para uma asa sem torção aerodinâmica nem torção geométrica, a distribuição de sustentação elíptica é gerada por uma asa com forma em planta elíptica.
- A figura abaixo mostra o famoso Spitfire da WWII, que tinha uma asa elíptica.



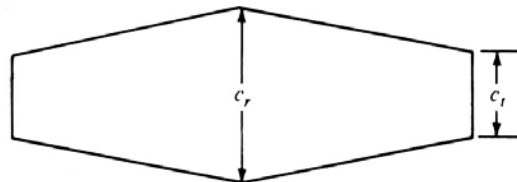
- No entanto, as asas elípticas têm um fabrico mais caro do que uma asa rectangular.
- Mas a distribuição de sustentação da asa rectangular está longe do óptimo.
- Um compromisso é a asa trapezoidal ou afilada, em que o afilaemnto pode ser escolhido por forma a que a distribuição de sustentação se aproxime da forma elíptica.



Elliptic wing

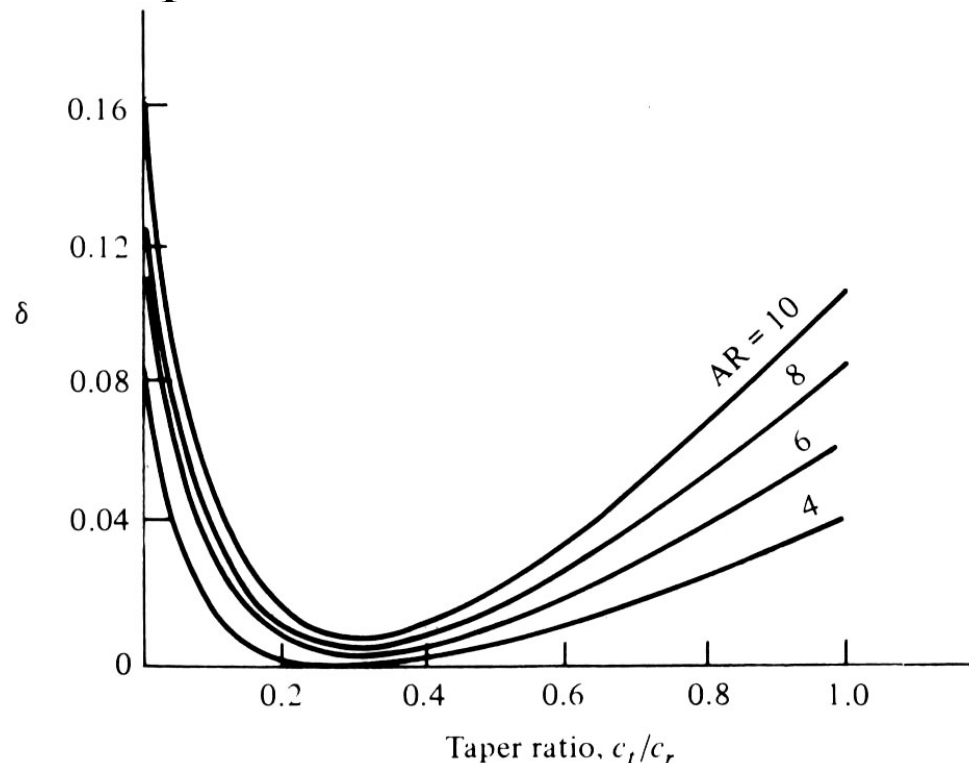


Rectangular wing



Tapered wing

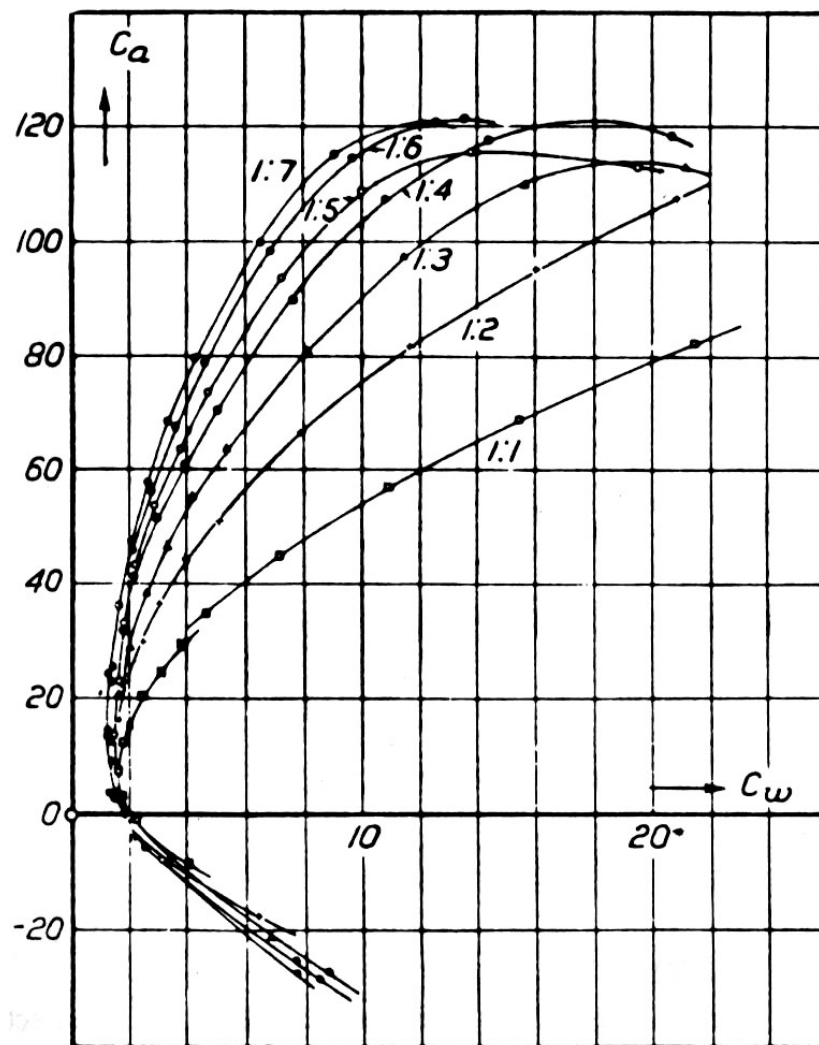
- A figura abaixo mostra a variação de δ com o afilamento para asas com alongamentos diferentes.
- O aerodinamicista inglês Hermann Glauert foi o primeiro a realizar este tipo de cálculo para δ .
- Uma asa afilada pode ter um coeficiente de arrasto bastante perto do mínimo, sendo bastante mais fácil de construir do que uma asa elíptica.



5.3.3. Efeito do Alongamento

- Como foi visto, o coeficiente de arrasto induzido de uma asa finita é inversamente proporcional ao alongamento.
- O alongamento, que varia tipicamente entre 6 e 22 para aviões e palnadores convencionais subsónicos, tem um efeito maior no C_{Di} do que δ .
- Assim, o factor principal de projecto para minimizar o arrasto induzido, não é a proximidade da distribuição de sustentação elíptica mas sim um grande alongamento.
- Prandtl verificou a proporcionalidade inversa de C_{Di} com A através de uma série de experiências clássicas em que mediu a sustentação e arrasto de sete asas rectangulares com alongamentos diferentes.

- A figura abaixo mostra os resultados obtidos.



- O coeficiente de arrasto total de uma asa finita é dado por

$$C_D = C_d + \frac{C_L^2}{\pi A e}$$

- A variação parabólica de C_D com C_L é reflectida na figur anterior.
- Considerando duas asas com alongamentos diferentes A_1 e A_2 , então C_{D1} e C_{D2} são

$$C_{D1} = C_d + \frac{C_L^2}{\pi A_1 e}$$

$$C_{D2} = C_d + \frac{C_L^2}{\pi A_2 e}$$

- Assume-se que ambas as asa têm o mesmo C_L .
- Sendo o perfil constante para as duas asas C_d é o mesmo nos dois casos.

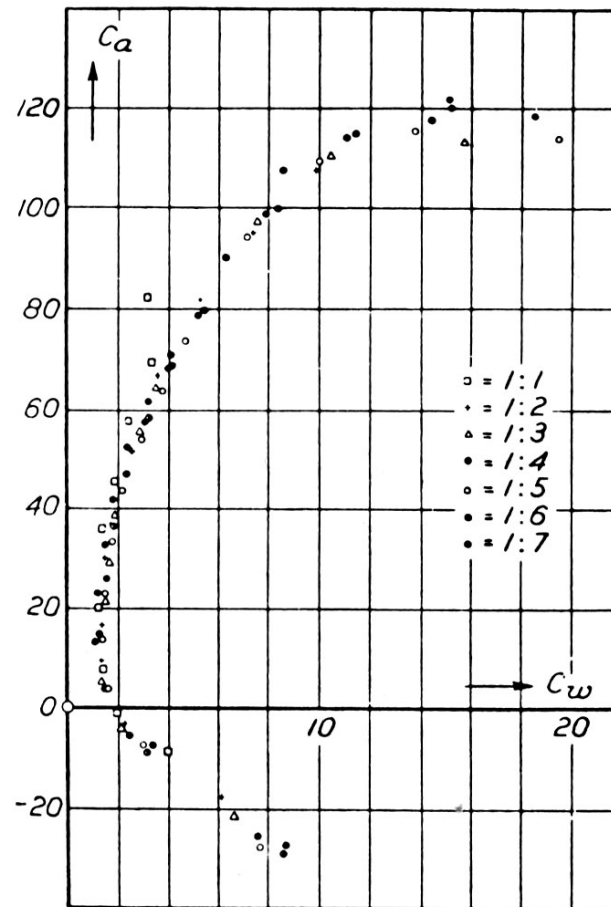
- A variação de e entre as duas asas é pequena e pode ser ignorada.
- Subtraindo C_{D2} a C_{D1} , tem-se

$$C_{D1} = C_{D2} + \frac{C_L^2}{\pi e} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)$$

- Esta equação pode ser usada para uniformizar os dados de uma asa com alongamento A_2 com outra asa com alongamento A_1 .
- Prandtl uniformizou os dados da figura anterior com uma asa de alongamento 5.
- Neste caso tem-se

$$C_{D1} = C_{D2} + \frac{C_L^2}{\pi e} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{A_2} \right)$$

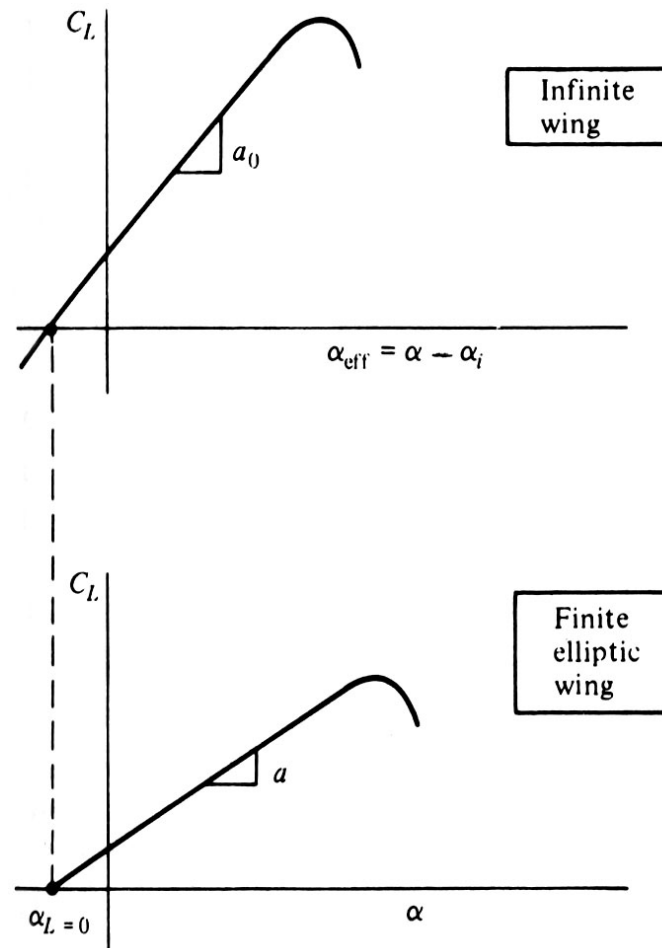
- Substituindo, nesta equação, os valores respectivos de C_{D2} e A_2 da figura, Prandtl descobriu que os dados resultantes de C_{D1} em função de C_L praticamente coincidiram na mesma curva.
- A figura abaixo mostra os resultados, obtidos em 1915.



- Existem duas diferenças principais entre as características de um perfil alar e uma asa finita.
- Já foi vista uma diferença: uma asa finita gera arrasto induzido.
- A outra diferença aparece no declive da curva de sustentação.
- O declive de sustentação dum perfil alar foi definido como $a_0 = dCl/d\alpha$.
- Agora, define-se o declive de sustentação de uma asa finita com $a = dCL/d\alpha$.
- Quando o declive de sustentação de uma asa finita é comparado com o de um perfil vê-se que $a < a_0$.
- Para visualizar melhor, é necessário compreender a influência do downwash no escoamento em torno de um perfil local da asa finita.

- Apesar de o ângulo de ataque geométrico da asa ser α , o perfil alar sente um ângulo de ataque inferior α_{eff} , em que $\alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i$.
- Considerando uma asa elíptica a_i e a_{eff} são constantes ao longo da envergadura.
- Por outro lado C_l é constante ao longo da envergadura, logo $C_L = C_l$.
- Representando o C_L da asa finita em função de α_{eff} obtém-se o primeiro gráfico da figura seguinte.
- Uma vez que se usa α_{eff} o declive de sustentação corresponde à asa infinita, a_0 .
- Na prática, só conseguimos observar, à vista desarmada, o ângulo de ataque geométrico, logo para uma asa finita C_l é representado em função de α , como mostra o segundo gráfico da figura seguinte.

- Como $\alpha > \alpha_{\text{eff}}$ a abscissa do segundo gráfico é esticada, tornado a curva de sustentação menos inclinada.
- A curva de sustentação tem um declive a em que $a < a_0$.
- O efeito da asa finita é reduzir o declive de sustentação.



- Para sustentação nula não existem efeitos induzidos, ou seja $\alpha_i = C_{Di} = 0$.
- Assim, quando $C_L = 0$, $\alpha = \alpha_{\text{eff}}$.
- Como resultado, α_0 é o mesmo para a asa finita e para a asa infinita.
- Os valores de a_0 e a podem ser relacionados da seguinte forma.

$$\frac{dC_L}{d(\alpha - \alpha_i)} = a_0$$

- Integrando, tem-se

$$C_L = a_0(\alpha - \alpha_0) + \text{const}$$

- Substituindo $\alpha_i = C_L/(\pi A)$ obtém-se

$$C_L = a_0 \left(\alpha - \frac{C_L}{\pi A} \right) + \text{const}$$

- Derivando esta equação em ordem a α , e resolvendo para $dC_L/d\alpha$, obtém-se

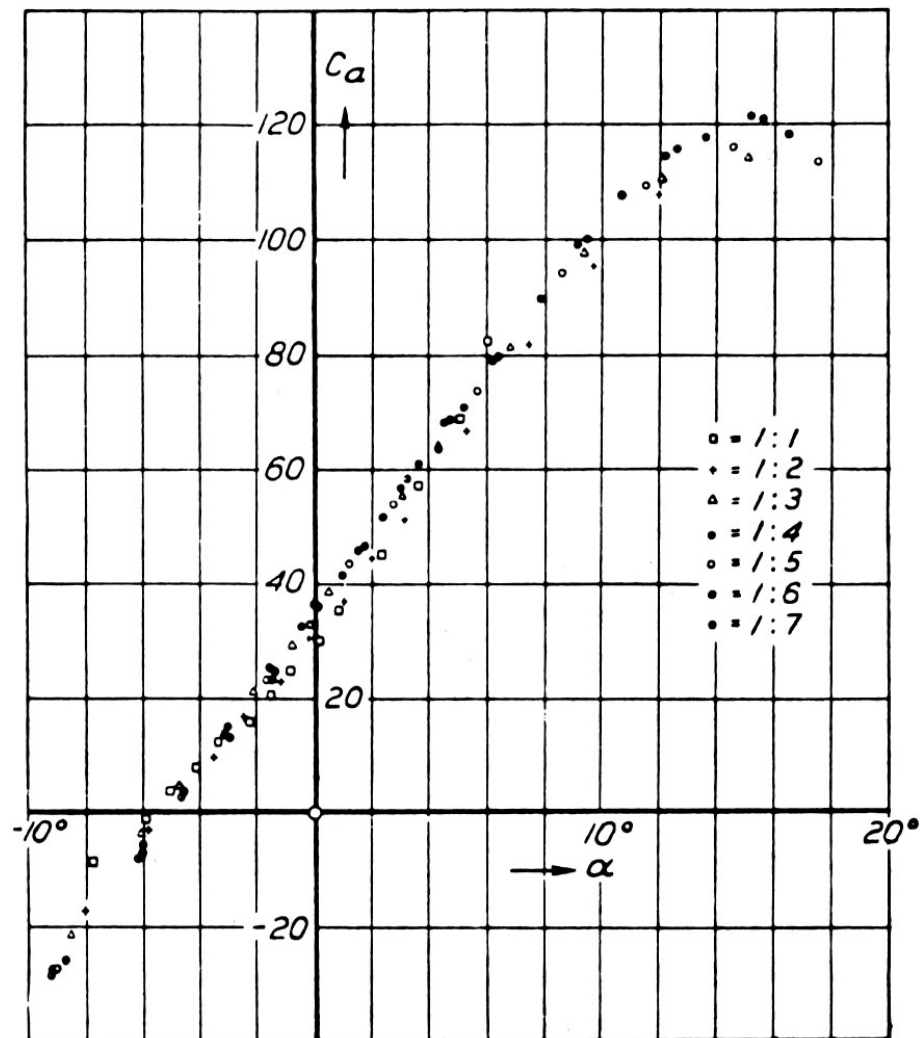
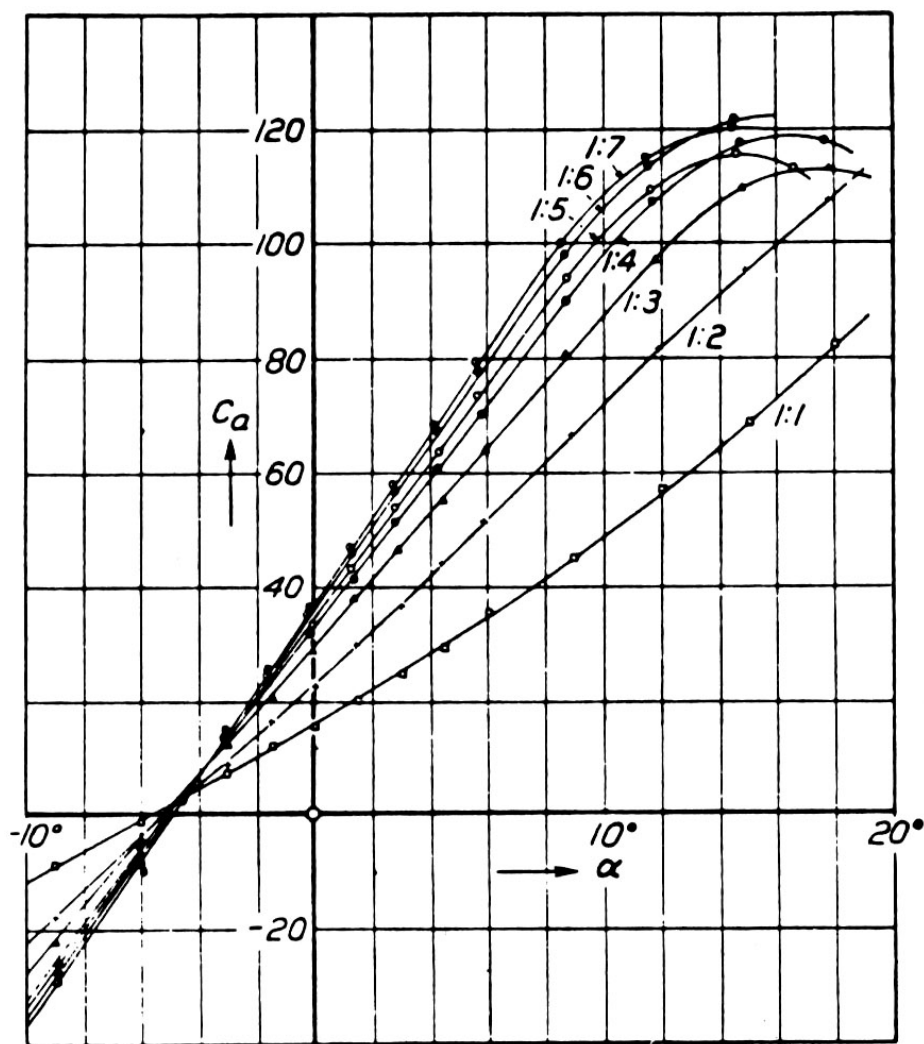
$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a = \frac{a_0}{1 + a_0/\pi A}$$

- Esta equação dá a relação desejada entre a_0 e a para uma asa finita elíptica.
- Para uma asa finita de forma em planta geral esta equação é ligeiramente modificada para

$$a = \frac{a_0}{1 + (a_0/\pi A)(1 + \tau)}$$

- O coeficiente τ é uma função dos coeficientes de Fourier A_n .
- Glauert foi o primeiro a calcular valores para τ no início da década de 1920.

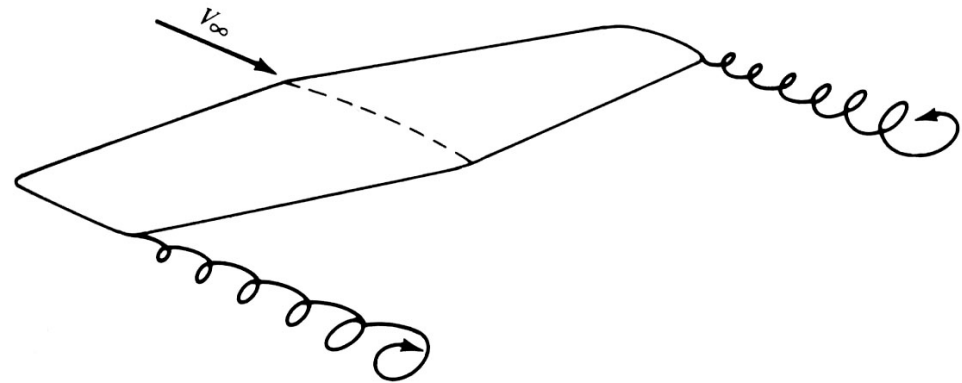
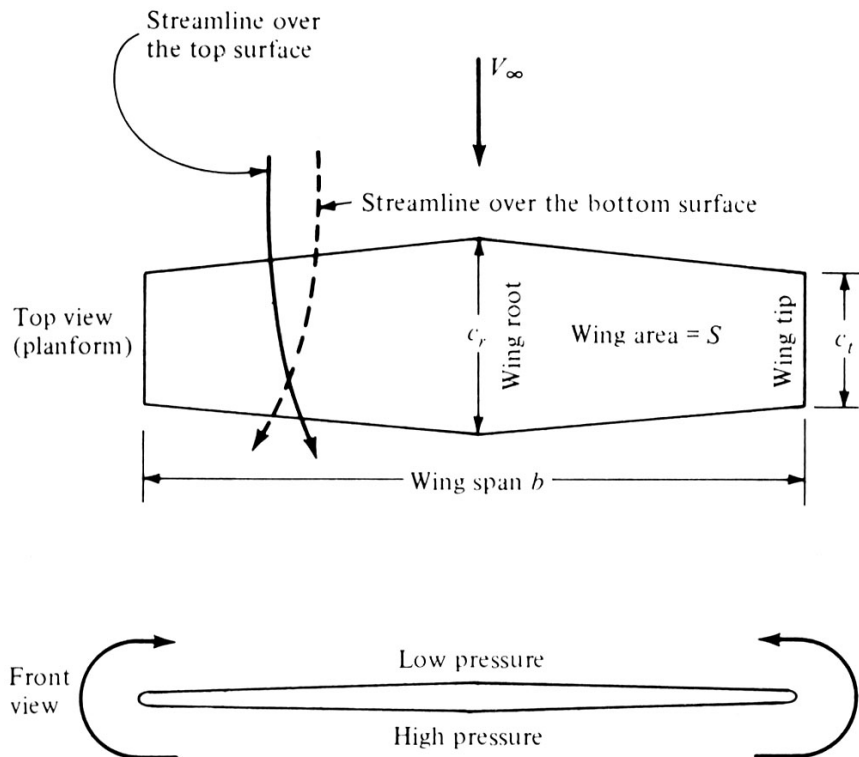
- Valores típicos de τ vão desde 0,05 a 0,25.
- O efeito do alongamento é de grande importância nesta equação.
- Para asas com alongamento pequeno, existe uma diferença significativa entre a_0 e a .
- No entanto, quando $A \rightarrow \infty$, $a \rightarrow a_0$.
- O efeito do alongamento na curva de sustentação é ilustrado na figura seguinte.
- À medida que A reduz o $dC_L/d\alpha$ também reduz.
- Também se pode ver a uniformização dos resultados para um alongamento de 5, que mostra uma coincidência dos valores.



5.3.4. Significado Físico

- Considere-se, novamente, o modelo da teoria da linha sustentadora de Prandtl.
- Um número infinito de vórtices de ferradura são sobrepostos de tal forma que geram um linha de sustentação na envergadura da asa juntamente com uma folha de vórtice que se estende para jusante.
- Esta folha de vórtice é o instrumento que induz downwash na linha sustentadora.
- À primeira vista, poder-se-ia considerar este modelo como sendo abstracto: uma conveniência matemática que de alguma forma produz bons resultados.
- Mas, pelo contrário, o modelo tem significado físico.

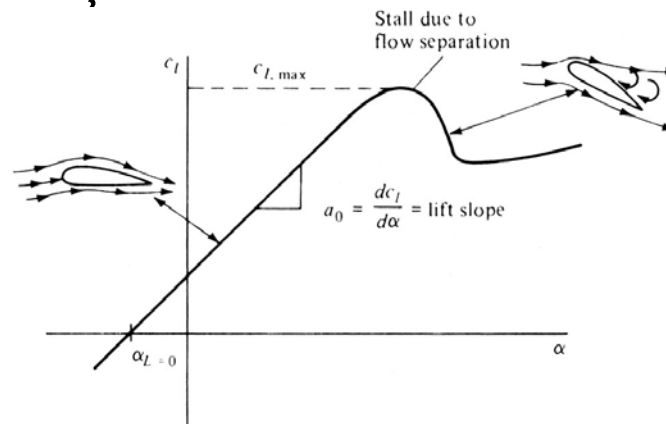
- No escoamento tridimensional em torno duma asa finita, as linhas de corrente que deixam o bordo de fuga no extradorso e intradorso possuem direcções diferentes: existe uma descontinuidade na velocidade tangencial no bordo de fuga.



- No capítulo anterior, viu-se que é possível, teoricamente, uma mudança descontínua de velocidade tangencial através de uma folha de vórtice.
- Na vida real, tais descontinuidades não existem.
- As velocidades diferentes no bordo de fuga geram uma região fina com grandes gradientes de velocidade: uma região fina de escoamento de corte com grande vorticidade.
- Assim, de facto uma folha de vorticidade estende-se para jusante a partir do bordo de fuga da asa finita.
- A folha tende a enrolar nas extremidades, ajudando a formar os vórtices de ponta de asa.
- O modelo da linha de sustentação de Prandtl é, então, fisicamente consistente com escoamento real a jusante da asa finita.

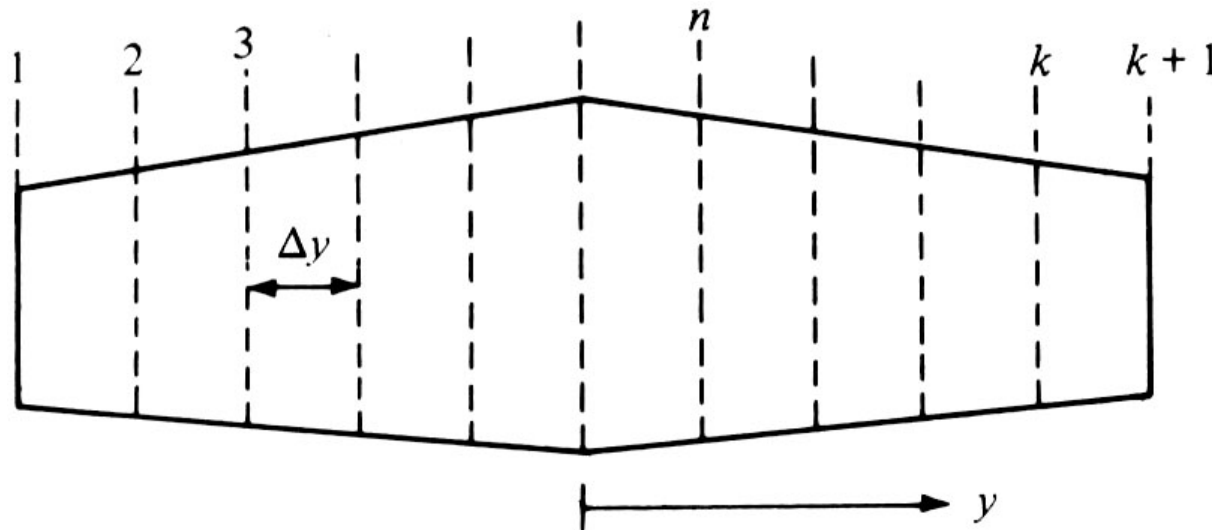
5.4. Método Numérico Não Linear da Linha de Sustentação

- O método clássico da teoria da linha de sustentação de Prandtl assume uma variação linear de C_l com α_{eff} .
- Mas, à medida que o ângulo de ataque se aproxima e excede o ângulo de perda, a curva de sustentação torna-se não linear.
- Nesta secção vai fazer-se uma extensão simples da teoria clássica de Prandtl para ter em conta a parte não linear da curva de sustentação.



- A teoria clássica é essencialmente analítica: os resultados são equações analíticas e não uma solução puramente numérica.
- É claro que, no fim, os coeficientes de Fourier A_n para uma dada asa têm que ser obtidos da solução do sistema de equações lineares algébricas.
- Com o uso de computadores, os coeficientes podem ser obtidos usando métodos de matriz padrão.
- No entanto, esta teoria permite facilmente a obtenção de uma solução puramente numérica, que permite a inclusão dos efeitos não lineares.
- Considere-se uma asa finita genérica com forma em planta e torção geométrica conhecidas e com perfis diferentes em estações diferentes da envergadura.

- Dados experimentais da curva de sustentação de todos os perfis, incluindo as zonas não lineares, são conhecidos.
- Um método numérico iterativo para obter as características da asa finita desenvolve-se da seguinte forma:
 - 1– Divide-se a asa num dado número de estações ao longo da envergadura. A figura abaixo mostra $k+1$ estações em que n designa qualquer estação desejada.
 - 2– Para a asa dada com um determinado α , assume-se a distribuição de sustentação ao longo da envergadura (assumem-se valores para $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots, \Gamma_{k+1}$). A distribuição elíptica é uma boa escolha.



- 3– Com a distribuição de Γ assumida, calcula-se o ângulo de ataque induzido α_i em cada estação.

$$\alpha_i(y_n) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy)dy}{y_n - y}$$

- O integral é calculado numericamente. Usando a regra de Simpson, tem-se

$$\alpha_i(y_n) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \frac{\Delta y}{3} \sum_{j=2,4,6}^k \frac{(d\Gamma/dy)_{j-1}}{(y_n - y_{j-1})} + 4 \frac{(d\Gamma/dy)_j}{(y_n - y_j)} + \frac{(d\Gamma/dy)_{j+1}}{(y_n - y_{j+1})}$$

- A distância entre estações é Δy . Quando $y_n = y_{j-1}, y_j, y_{j+1}$, existe uma singularidade. Ela pode ser evitada substituindo o termo em questão pela média das duas secções adjacentes.
- 4– Usando α_i do passo 3, obtém-se o ângulo de ataque efectivo α_{eff} para cada estação

$$\alpha_{\text{eff}}(y_n) = \alpha - \alpha_i(y_n)$$

- 5– Com a distribuição de α_{eff} do passo 4, obtém-se o coeficiente de sustentação $(C_l)_n$, em cada estação, da curva de sustentação.

- 6– Com o $(C_l)_n$ do passo 5, calcula-se uma nova distribuição de circulação com o teorema de Kutta-Joukowski e a definição de coeficiente de sustentação.

$$L'(y_n) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_n) = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c_n (C_l)_n$$

- Logo

$$\Gamma(y_n) = \frac{1}{2} V_\infty c_n (C_l)_n$$

- A corda local é c_n . Não esquecer que n varia entre 1 e $k+1$.
- 7– A nova distribuição de Γ obtida em 6 é comparada com os valores usados no passo 3. Se os resultados do passo 6 não concordarem com as entradas do passo 3, gera-se uma nova entrada. Designando a entrada anterior no passo 2 por Γ_{old} e o resultado do passo 6 por Γ_{new} , então a nova entrada para o passo 3 é

$$\Gamma_{\text{input}} = \Gamma_{\text{old}} + D(\Gamma_{\text{new}} - \Gamma_{\text{old}})$$

- D é um factor de relaxação para as iterações.

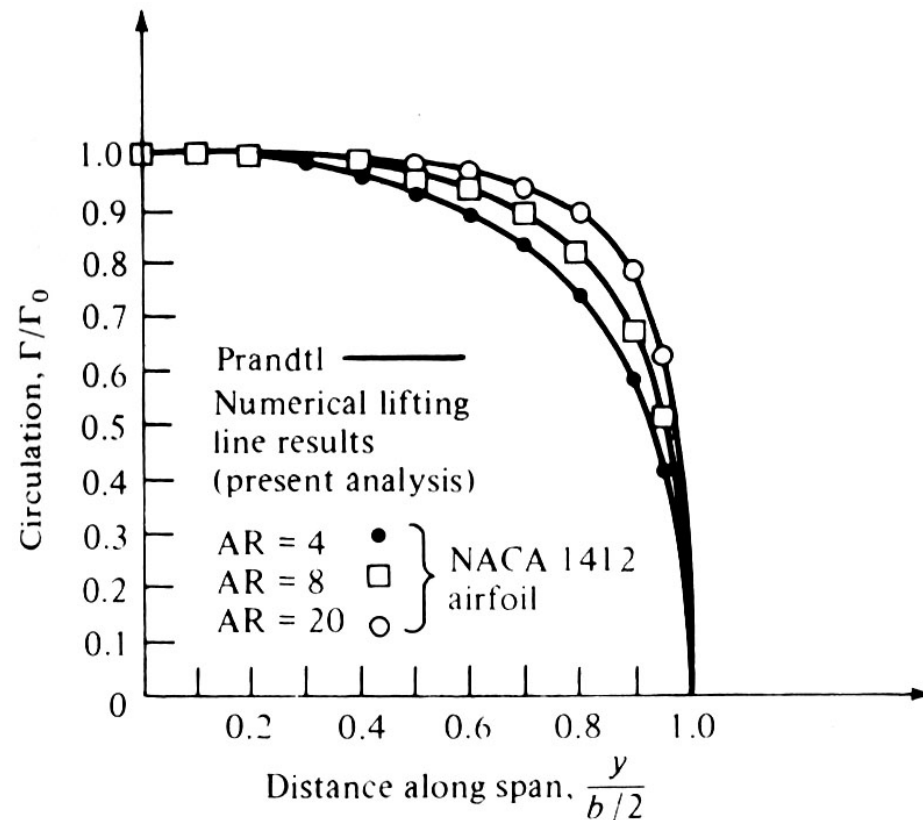
- O processo iterativo requer grande amortecimento com valores de D na ordem de 0,05..
- 8– Os passos de 3 a 7 são repetidos em número suficiente para Γ_{new} e Γ_{old} concordem em cada estação da envergadura com o grau de precisão necessário.
- 9– Com o valor convergido de $\Gamma(y)$, os coeficientes de sustentação e arrasto induzido são obtidos com as equações

$$C_L = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

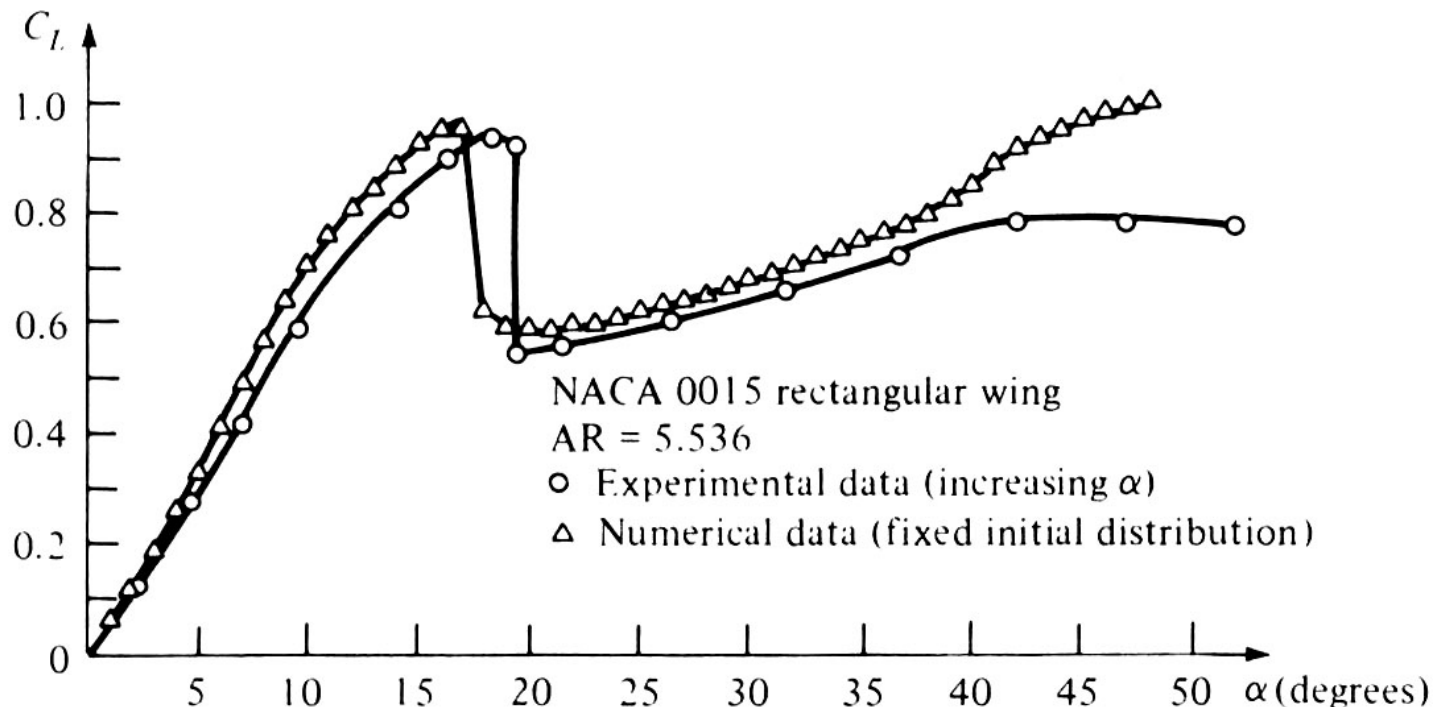
$$C_{Di} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy$$

- O integral pode ser calculado usando a regra de Simpson.
- A figura seguinte mostra resultados típicos deste método, onde a distribuição de circulação foi calculada para três asas rectangulares de alongamentos diferentes.

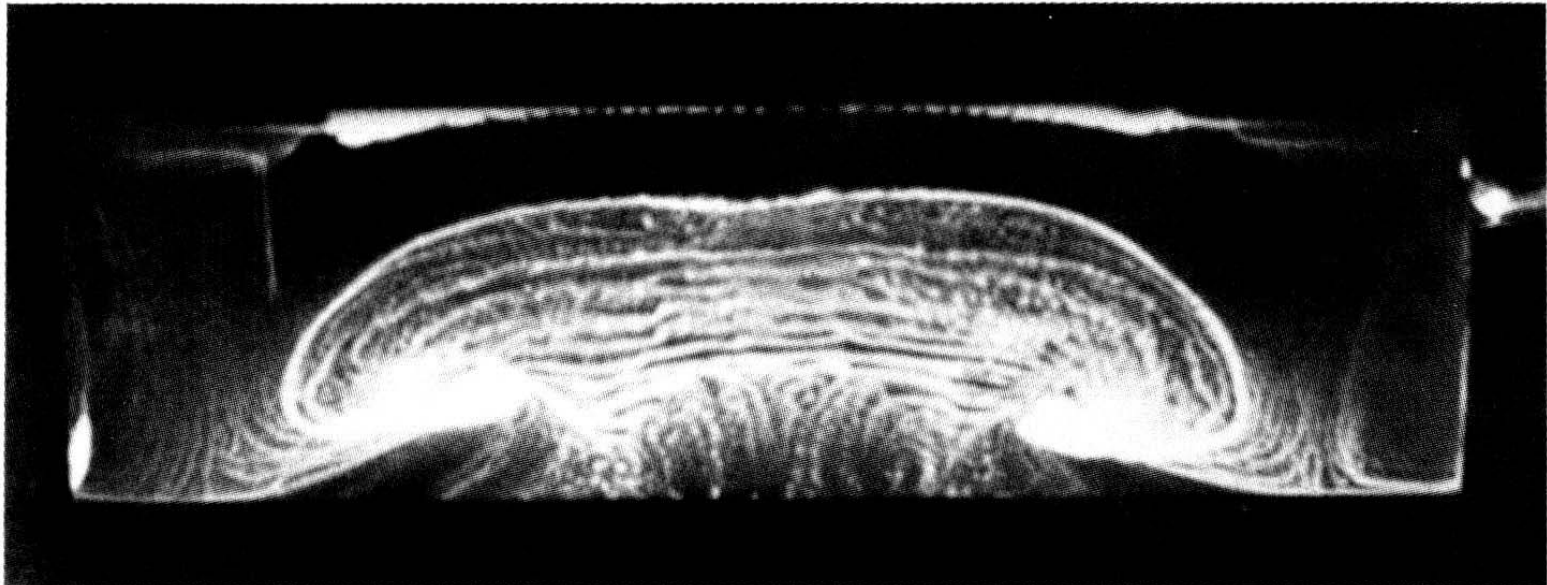
- As linhas a cheio obtiveram-se com a teoria clássica de Prandtl e os símbolos obtiveram-se com o método numérico descrito acima.
- Pode ver-se que a distribuição de circulação tem um valor relativamente alto na raiz da asa e cai para zero na ponta da asa.



- Outro exemplo do uso deste método numérico está ilustrado na figura abaixo, que inclui o regime não linear.
- O C_L vs α é mostrado para uma asa rectangular até um ângulo de ataque de 50° , muito acima da perda.
- Os resultados numéricos divergem dos resultados experimentais no máximo 20 %.

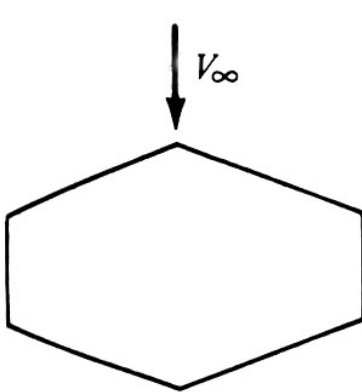


- Para estudos preliminares o método dá bons resultados na região pós perda.
- No entanto, não é aconselhável aplicar a teoria da linha sustentadora em casos tão extremos, uma vez que o escoamento é grandemente 3D.
- A figura abaixo mostra isto, sendo visível a existência de escoamento transverso e uma grande zona de escoamento separado.

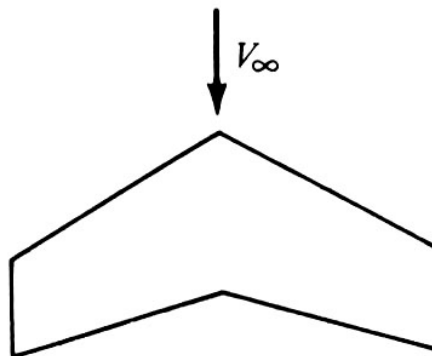


5.5. Teoria da Superfície Sustentadora

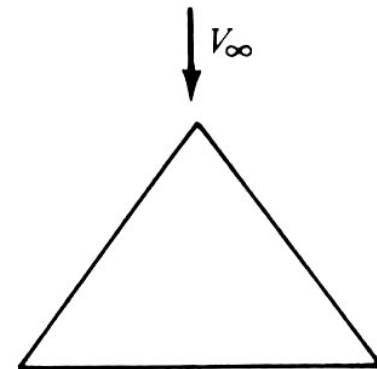
- A teoria da linha sustentadora clássica de Prandtl dá resultados razoáveis para asas rectas com alongamento de moderado até alto.
- Para asas rectas de baixo alongamento, asa enflechadas e asas delta, a teoria da linha sustentadora clássica é inapropriada.



Low aspect ratio
straight wing

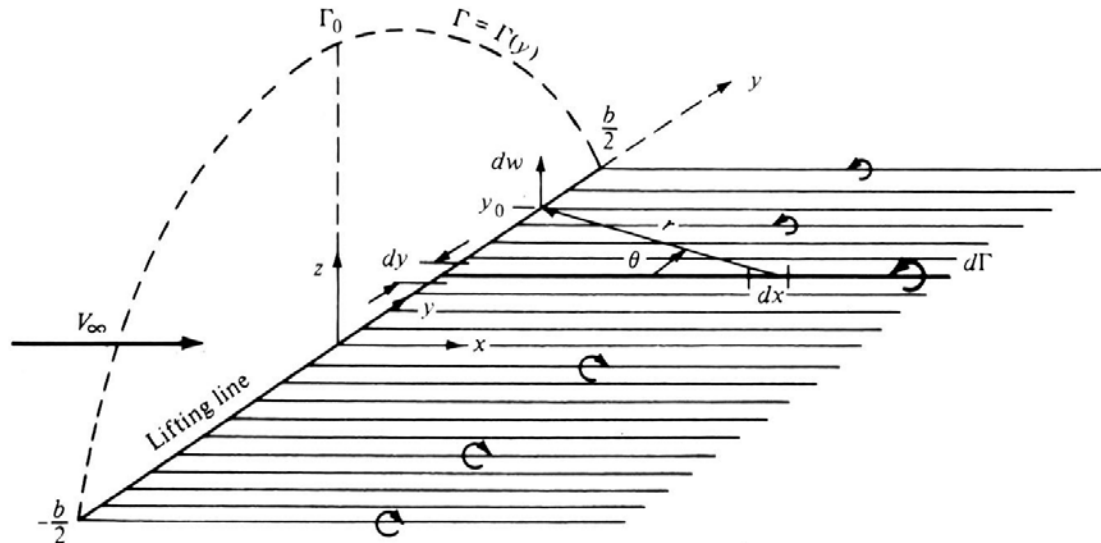


Swept wing

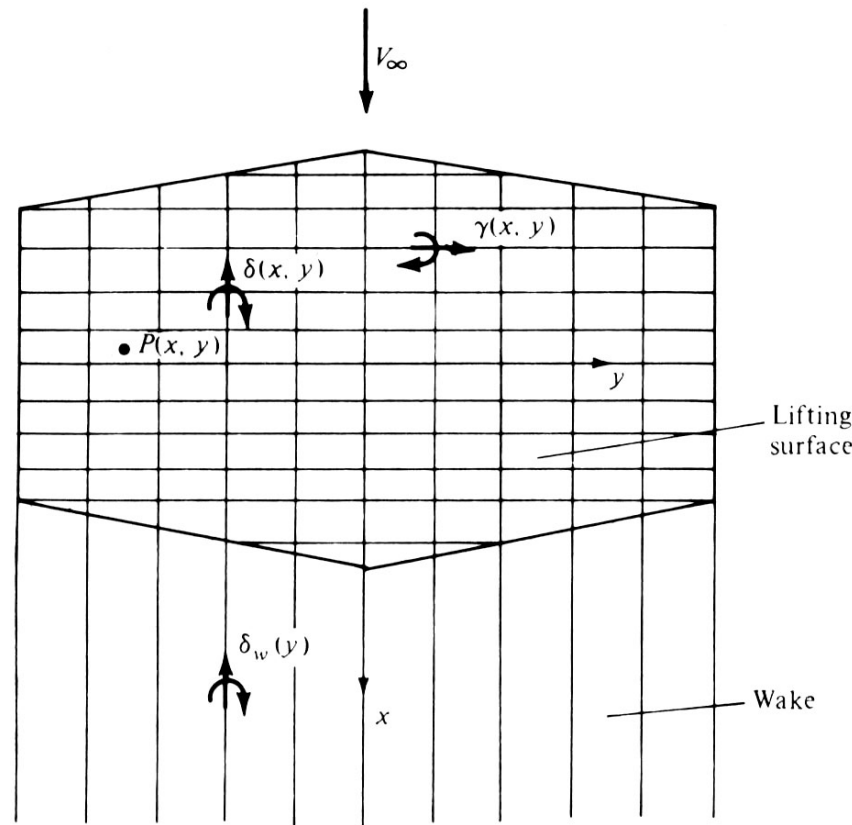


Delta wing

- Para tais asas é necessário um modelo mais completo.
- Nesta secção é, então, introduzido um destes modelos e a sua implementação.
- Voltando à figura abaixo, a asa é representada por uma linha sustentadora com os seus vórtices livres.
- A circulação Γ varia com y ao longo da linha sustentadora.
- Pode extender-se este modelo, colocando uma série de linhas sustentadoras no plano da asa em diferentes posições da corda.



- Assim, coloca-se um grande número de linhas sustentadoras todas paralelas ao eixo y e localizadas em diferentes valores de x , como mostra a figura abaixo.
- No limite, com um número infinito de linhas com intensidade infinitesimal, obtém-se uma folha de vórtice em que as linhas de vórtice estão paralelas ao eixo y .



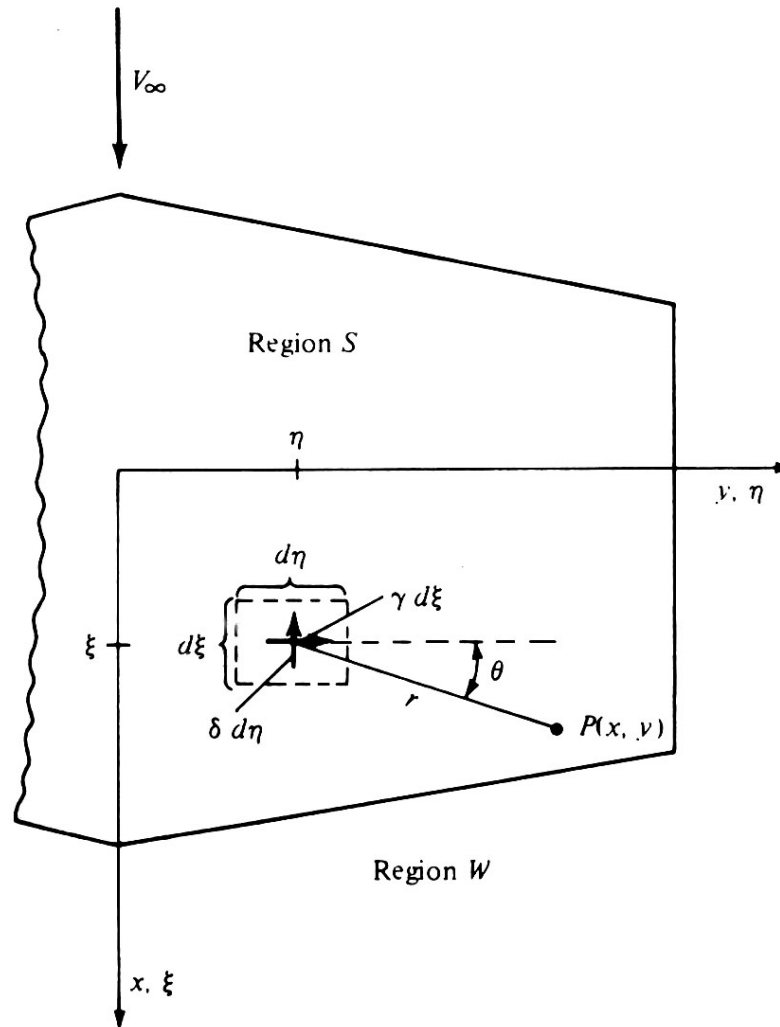
- A intensidade desta folha (por unidade de comprimento na direcção x) é γ , em que γ varia na direcção de y .
- Cada linha sustentadora tem, em geral, uma intensidade total diferente, pelo que γ também varia com x .
- Então, $\gamma = \gamma(x, y)$.
- Cada linha sustentadora tem um sistema de vórtices livres, logo a série de linhas sustentadoras é intersectada por uma série de vórtices livres sobrepostos paralelos ao eixo x .
- No limite, com um número infinito de vórtices infinitesimamente fracos, estes vórtices livres formam outra folha de vórtices de intensidade δ (por unidade de comprimento na direcção y).

- Considerando uma única linha paralela ao eixo x , e movendo-nos ao longo desta do bordo de ataque para o de fuga, encontramos um novo vórtice livre sobreposto cada vez que se atravessa uma linha sustentadora.
- Logo, δ varia com x .
- Os vórtices livres são simplesmente parte dos sistemas de vórtice de ferradura, cujos bordos de ataque formam as várias linhas sustentadoras.
- Uma vez que a circulação em torno de cada linha sustentadora varia na direcção y , as intensidades de vórtices livres diferentes são, em geral, diferentes.
- Então, $\delta = \delta(x,y)$, como mostra a figura anterior.
- As duas folhas de vórtice resultam numa superfície sustentadora distribuída por toda a superfície da asa.

- Em qualquer ponto na superfície, a intensidade da superfície sustentadora é dada por γ e δ , que são funções de x e y .
- Assim, $\gamma = \gamma(x,y)$ é a distribuição da intensidade do vórtice ao longo da envergadura e $\delta = \delta(x,y)$ é a distribuição da intensidade do vórtice ao longo da corda.
- A jusante do bordo de fuga, só existem vórtices livres (não existem vórtices paralelos a y).
- Então, a esteira consiste, apenas, nos vórtices na direcção da corda.
- A intensidade da folha de vórtice da esteira é δ_w (por unidade de comprimento na direcção y).
- Uma vez que, na esteira, os vórtices livres não cruzam nenhuma linha de vórtice a sua intensidade é constante em x .

- Então, na esteira, δ_w depende apenas de y e é igual ao valor no bordo de fuga.
- Considere-se, agora, o ponto P com posição (x,y) na asa.
- A superfície sustentadora e a folha de vórtice da esteira induzem uma componente normal da velocidade $w(x,y)$ no ponto P .
- Deseja-se que a superfície da asa seja uma superfície de corrente do escoamento: a soma de $w(x,y)$ e a componente normal da velocidade do escoamento uniforme tem que ser zero em todos os pontos da asa.
- O cerne da teoria da superfície sustentadora é encontrar $\chi(x,y)$ e $\delta(x,y)$ para que o escoamento seja puramente tangencial em todos os pontos da asa ($\delta_w(y)$ não é uma verdadeira incógnita porque é igual a $\delta(x,y)$ no bordo de fuga).

- É necessário, então, obter uma expressão para a velocidade induzida normal $w(x,y)$ em função de γ , δ e δ_w .
- A figura abaixo mostra parte da planta de uma asa.



- Considere-se o ponto com coordenadas (ξ, η) .
- Neste ponto, a intensidade do vórtice ao longo da envergadura é $\gamma(\xi, \eta)$.
- Considere-se uma fina tira da folha de vórtice ao longo da envergadura com comprimento $d\xi$ na direcção x .
- A intensidade deste filamento é $\gamma d\xi$ e estende-se na direcção y (ou η).
- Considere-se, também, o ponto P localizado em (x, y) a uma distância r do ponto (ξ, η) .
- Da lei de Biot-Savart, a velocidade incremental induzida em P por um segmento $d\eta$ desta tira de vórtice de intensidade $\gamma d\xi$ é

$$|dV| = \left| \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right| = \frac{\gamma d\xi (d\eta) r \sin \theta}{4\pi r^3}$$

- Examinando a figura anterior e usando a regra da mão direita para a intensidade γ , $|dV|$ é induzido para baixo, no sentido negativo de z .
- Então, $(dw)_\gamma = -|dV|$.
- Sabendo que $\sin\theta = (x-\xi)/r$ tem-se

$$(dw)_\gamma = -\frac{\gamma}{4\pi} \frac{(x-\xi)d\xi d\eta}{r^3}$$

- Considerando a contribuição do vórtice elementar na direcção da corda com intensidade $\delta d\eta$, a velocidade induzida em P é

$$(dw)_\delta = -\frac{\delta}{4\pi} \frac{(y-\eta)d\xi d\eta}{r^3}$$

- A velocidade induzida em P por toda a superfície sustentadora é obtida integrando sobre toda a superfície S .

- A velocidade induzida em P pela esteira completa é dada por uma equação idêntica a esta equação, mas substituindo δ por δ_w e integrando sobre a superfície W .
- Sabendo que

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

- A velocidade normal induzida em P pela superfície sustentadora e pela esteira é

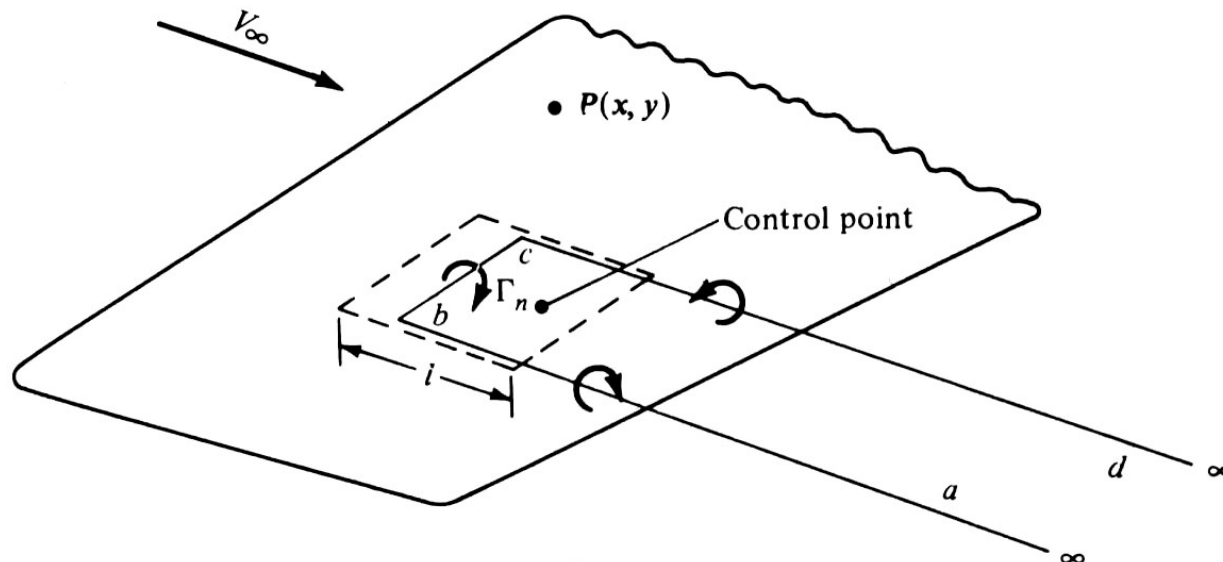
$$w(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(x - \xi)y(\xi, \eta) + (y - \eta)\delta(\xi, \eta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iint_W \frac{(y - \eta)\delta_w(\xi, \eta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta$$

- Agora, é necessário resolver esta equação em ordem a $\chi(\xi, \eta)$ e $\delta(\xi, \eta)$ de forma que a soma de $w(x, y)$ com a componente normal de V_{oo} seja zero.
- Ou seja, para que o escoamento seja tangente à superfície S .
- A solução é obtida numericamente com um procedimento idêntico ao caso 2D.
- A superfície da asa é dividida num número de painéis.
- Em cada painel escolhe-se a variação de γ e δ (pode ser constante, linear, etc.).
- Escolhem-se pontos de controlo onde a velocidade normal tem que ser zero.
- Com uma equação semelhante à anterior para cada painel forma-se um sistema de equações simultâneas que é resolvido para γ e δ em todos os painéis.

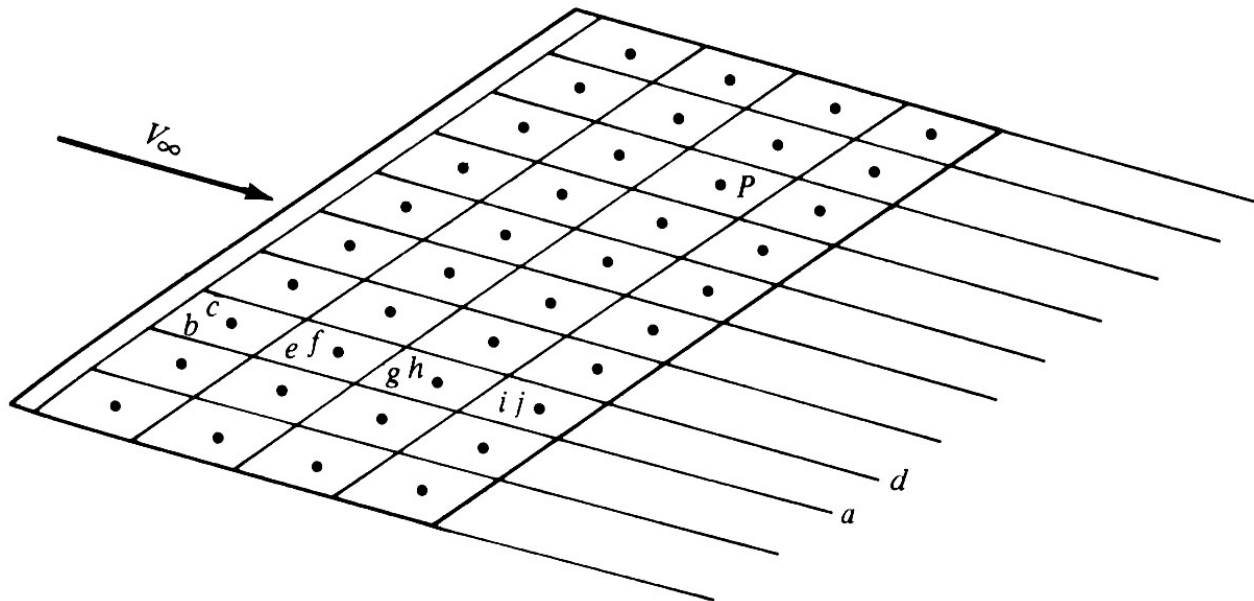
Método “Vortex Lattice”

- Existe um método relacionado mas mais simples que consiste em sobrepor um número finito de vórtices de ferradura com intensidades diferentes Γ_n na superfície da asa.
- A figura abaixo mostra parte de uma asa finita.



- As linhas a traço interrompido definem um painel na superfície da asa em que l é o comprimento do painel na direcção do escoamento.
- O painel é trapezoidal (não necessita de ser quadrado ou rectangular).
- Um vórtice de ferradura, $abcd$, de intensidade Γ_n é colocado no painel de forma ao segmento bc estar a uma distância $l/4$ da frente do painel.
- A $3l/4$ da frente do painel coloca-se o ponto de controlo.
- A velocidade induzida num ponto P por um vórtice de ferradura pode ser obtido pela lei de Biot-Savart considerando as linhas de vórtice ab , bc e cd separadamente.
- Agora, cobre-se a asa completamente por vórtices de ferradura.

- A figura abaixo mostra uma asa com um número finito de painéis.
- Num painel, no bordo de ataque, tem-se o vórtice de ferradura $abcd$.
- No painel atrás deste tem-se o vórtice $aefd$.
- No seguinte, tem-se $aghd$, e no seguinte, tem-se $aijd$, etc..
- Toda a asa está coberta por esta rede de vórtices de ferradura com intensidade Γ_n .



- Em qualquer ponto de controlo P , a velocidade normal induzida por todos os vórtices de ferradura obtém-se da lei de Biot-Savart.
- A a condição de escoamento tangente é aplicada em todos os pontos de controlo, resulta um sistema de equações algébricas simultâneas que é resolvido para as incógnitas Γ_n .
- Este método numérico chama-se *vortex lattice method* (VLM) e está bastante difundido para a análise das características de asas finitas.