Exemplo 4.01:
Determinar as componentes horizontal e vertical das deflexões no nó 2 e as forças nos membros da estrutura em treliça articulada da *figura 4.04*. A rigidez axial *AE* é constante para todos os membros.

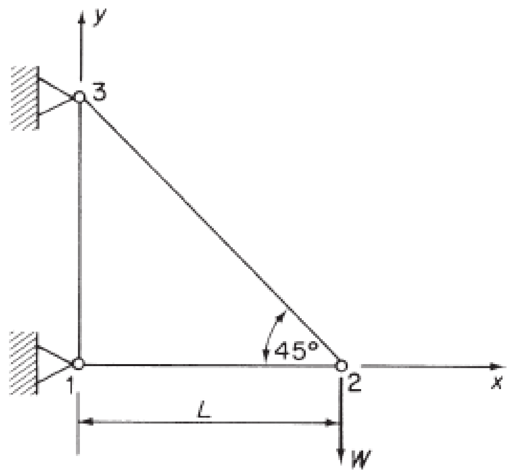

Figura 4.04 Estrutura em treliça articulada do *exemplo 4.01*.

Pode ver-se que os nós 1 e 3 estão fixos e, por isso, têm deslocamento nulo. Assim, com o sistema de eixos global tem-se

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$$

As forças externas estão aplicadas no nó 2 com $F_{x,2} = 0$ e $F_{y,2} = -W$. As forças nodais em 1 e 3 são reações desconhecidas.

O primeiro passo da solução é montar a matriz de rigidez para a estrutura completa escrevendo as matrizes de rigidez de cada membro em coordenadas globais, usando a *equação (4.30)*. Os cosenos diretores λ e μ têm valores diferentes para cada um dos membros. Considerando que o ângulo θ é medido relativamente ao sentido positivo de *x*, tem-se os valores da *tabela 4.04-1*.

Tabela 4.04-1 Cosenos diretores e comprimentos dos membros da treliça.

Membro	comprimento	θ, graus	λ	μ
1-2	L	0	1	0
1-3	L	90	0	1
2-3	$\sqrt{2}L$	135	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

As matrizes de rigidez dos membros dadas por

$$[K_{ij}] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}$$

ficam

$$[K_{12}] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{i}$$

$$[K_{13}] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{ii}$$

$$[K_{23}] = \frac{AE}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{iii}$$

O próximo passo consiste em adicionar as matrizes de rigidez para se obter a matriz de rigidez da estrutura completa. Como existem seis possíveis forças nodais que produzem seis possíveis deslocamentos, a matriz de rigidez global tem dimensão 6x6. É preciso ter cuidado para posicionar os elementos da matriz na posição correta. A matriz de rigidez global tem a seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & [k_{23}] \\ [k_{31}] & [k_{32}] & [k_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{iv}$$

Esta matriz está dividida em amtrizes $[k_{ij}]$ de 2x2 relacionando as forças $F_{x,i}$ e $F_{y,j}$ com os deslocamentos u_i e v_j.

Vamos escrever, agora, as matrizes *(i) (ii)* e *(iii)* nesta forma.

$$[K_{12}] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & k_{11} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & k_{12} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & k_{21} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & k_{22} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \text{(v)}$$

$$[K_{13}] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & k_{11} & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & k_{13} & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & k_{31} & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & k_{33} & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \text{(vi)}$$

$$[K_{23}] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & k_{22} & \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & k_{23} & \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & k_{32} & \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & k_{33} & \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \text{(vii)}$$

Colocando cada submatriz das matrizes *(v)*, *(vi)* e *(vii)* na posição correta da matrizde rigidez em *(iv)*, somando as coincidentes, obtém-se

$$[K]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+0 & & 0+0 \\ & k_{11} & \\ 0+0 & & 0+1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & k_{12} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & k_{13} & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & k_{21} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & & 0-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & k_{22} & \\ 0-\frac{1}{2\sqrt{2}} & & 0+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & k_{23} & \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & k_{31} & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & k_{32} & \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0+\frac{1}{2\sqrt{2}} & & 0-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ & k_{33} & \\ 0-\frac{1}{2\sqrt{2}} & & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{(viii)}$$

Realizando as operações e substituindo a matriz [K] em *(iv)* obtém-se o sistema de equações final.

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,2}=0 \\ F_{y,2}=-W \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1=0 \\ v_1=0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3=0 \\ v_3=0 \end{Bmatrix} \quad \text{(ix)}$$

Pode ver-se que a matriz de rigidez é simétrica, todos os elementos da diagonal são positivos e a soma de cada linha ou coluna é zero.

Se agora apagarmos as linhas e colunas da matriz de rigidez que correspondem a deslocamentos nulos, obtêm-se os deslocamentos nodais desconhecidos u_2 e v_2 em função das forças aplicadas:

$$\begin{Bmatrix} F_{x,2}=0 \\ F_{y,2}=-W \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \text{(x)}$$

Invertendo, tem-se

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,2}=0 \\ F_{y,2}=-W \end{Bmatrix} \quad \text{(xi)}$$

De onde se tira

$$u_2 = \frac{L}{AE}\left(F_{x,2} + F_{y,2}\right) = \frac{L}{AE}\left(0 - W\right) = -\frac{WL}{AE} \qquad \text{(xii)}$$

$$v_2 = \frac{L}{AE}\left[F_{x,2} + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)F_{y,2}\right] = \frac{L}{AE}\left[0 - \left(1 + 2\sqrt{2}\right)W\right] = -\frac{WL}{AE}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) \qquad \text{(xiii)}$$

As reações nos nós 1 e 3 podem ser calculados substituindo u_2 e v_2 de *(xi)* em *(ix)*

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \frac{L}{AE}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{y,2} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{y,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{y,2} \end{Bmatrix}$$

o que dá

$$F_{x,1} = -F_{x,2} - F_{y,2} = W$$
$$F_{y,1} = 0$$
$$F_{x,3} = F_{y,2} = -W$$
$$F_{y,3} = W$$

Finalmente, as forças nos membros da estrutura, usando a *equação (4.32)*,

$$S_{ij} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \lambda & \mu \end{bmatrix}_{ij}\begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$$

e os resultados de *(xii)* e *(xiii)*, são

$$S_{12} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\frac{WL}{AE} - 0 \\ -\frac{WL}{AE}\left(1+2\sqrt{2}\right) - 0 \end{Bmatrix} = -W \quad \text{(compressão)}$$

$$S_{13} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1\end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0-0 \\ 0-0\end{Bmatrix} = 0 \text{ (como esperado)}$$

$$S_{23} = \frac{AE}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2\end{Bmatrix} = \frac{AE}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0 + \frac{WL}{AE} \\ 0 + \frac{WL}{AE}\left(1 + 2\sqrt{2}\right)\end{Bmatrix} = \sqrt{2}W \text{ (tração)}$$