Exemplo 3.02:
Determinar os deslocamentos nodais e as forças na viga da *figura 3.11*. A viga tem secção uniforme.

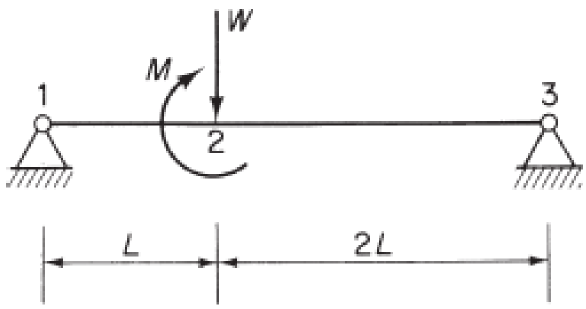

Figura 3.11 Viga do *exemplo 4.02*.

A viga pode ser idealizada para ter dois elementos de viga, 1-2 (elemento *a*) e 2-3 (elemento *b*). Da *figura 3.11*, pode ver-se que $v_1 = v_3 = 0$, $F_{y,2} = -W$ e $M_2 = +M$. A matriz de rigidez neste caso vem da *equação(4.53)*

$$[K] = E\begin{bmatrix} \frac{12I_a}{L_a^3} & -\frac{6I_a}{L_a^2} & -\frac{12I_a}{L_a^3} & -\frac{6I_a}{L_a^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6I_a}{L_a^2} & \frac{4I_a}{L_a} & \frac{6I_a}{L_a^2} & \frac{2I_a}{L_a} & 0 & 0 \\ -\frac{12I_a}{L_a^3} & \frac{6I_a}{L_a^2} & 12\left(\frac{I_a}{L_a^3}+\frac{I_b}{L_b^3}\right) & 6\left(\frac{I_a}{L_a^2}-\frac{I_b}{L_b^2}\right) & -\frac{12I_b}{L_b^3} & -\frac{6I_b}{L_b^2} \\ -\frac{6I_a}{L_a^2} & \frac{2I_a}{L_a} & 6\left(\frac{I_a}{L_a^2}-\frac{I_b}{L_b^2}\right) & 4\left(\frac{I_a}{L_a}+\frac{I_b}{L_b}\right) & \frac{6I_b}{L_b^2} & \frac{2I_b}{L_b} \\ 0 & 0 & -\frac{12I_b}{L_b^3} & \frac{6I_b}{L_b^2} & \frac{12I_b}{L_b^3} & \frac{6I_b}{L_b^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6I_b}{L_b^2} & \frac{2I_b}{L_b} & \frac{6I_b}{L_b^2} & \frac{4I_b}{L_b} \end{bmatrix}$$

onde o elemento *a* é o 1-2, o elemento *b* é o 2-3, $I_a = I_b = I$, $L_a = L$ e $L_b = 2L$. Substituindo tem-se

$$
[K] = EI\begin{bmatrix}
\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 \\
-\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\
-\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 12\left(\frac{1}{L^3}+\frac{1}{8L^3}\right) & 6\left(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{4L^2}\right) & -\frac{12}{8L^3} & -\frac{6}{4L^2} \\
-\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 6\left(\frac{1}{L^2}-\frac{1}{4L^2}\right) & 4\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{2L}\right) & \frac{6}{4L^2} & \frac{2}{2L} \\
0 & 0 & -\frac{12}{8L^3} & \frac{6}{4L^2} & \frac{12}{8L^3} & \frac{6}{4L^2} \\
0 & 0 & -\frac{6}{4L^2} & \frac{2}{2L} & \frac{6}{4L^2} & \frac{4}{2L}
\end{bmatrix}
$$

$$
= EI\begin{bmatrix}
\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 \\
-\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\
-\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{27}{2L^3} & \frac{9}{2L^2} & -\frac{12}{8L^3} & -\frac{6}{4L^2} \\
-\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{9}{2L^2} & \frac{6}{L} & \frac{6}{4L^2} & \frac{2}{2L} \\
0 & 0 & -\frac{12}{8L^3} & \frac{6}{4L^2} & \frac{12}{8L^3} & \frac{6}{4L^2} \\
0 & 0 & -\frac{6}{4L^2} & \frac{2}{2L} & \frac{6}{4L^2} & \frac{4}{2L}
\end{bmatrix}
$$

As equações ficam

$$
\begin{Bmatrix} F_{y,1} \\ M_1 \\ F_{y,2} \\ M_2 \\ F_{y,3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{27}{2L^3} & \frac{9}{2L^2} & -\frac{3}{2L^3} & -\frac{3}{2L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{9}{2L^2} & \frac{6}{L} & \frac{3}{2L^2} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2L^3} & \frac{3}{2L^2} & \frac{3}{2L^3} & \frac{3}{2L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2L^2} & \frac{1}{L} & \frac{3}{2L^2} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}
$$

Relembrando que $v_1 = v_3 = 0$, $F_{y,2} = -W$ e $M_2 = +M$. Pode eliminar-se as linhas e colunas correspondentes, e

$$
\begin{Bmatrix} M_1 = 0 \\ F_{y,2} = -W \\ M_2 = M \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 4/L & 6/L^2 & 2/L & 0 \\ 6/L^2 & 27/2L^3 & 9/2L^2 & -3/2L^2 \\ 2/L & 9/2L^2 & 6/L & 1/L \\ 0 & -3/2L^2 & 1/L & 2/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{i}
$$

Rearranjando para tornar a matriz de rigidez puramente numérica, tem-se

$$
\begin{Bmatrix} M_1/L = 0 \\ F_{y,2} = -W \\ M_2/L = M/L \\ M_3/L = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{2L^3} \begin{bmatrix} 8 & 12 & 4 & 0 \\ 12 & 27 & 9 & -3 \\ 4 & 9 & 12 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 L \\ v_2 \\ \theta_2 L \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \tag{ii}
$$

Separando este sistema de quatro equações em dois sistemas de duas equações, fica-se com

$$
\begin{Bmatrix} -W \\ M/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{2L^3} \left(\begin{bmatrix} 27 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 L \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \right) \tag{iii}
$$

$$
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{2L^3} \left(\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 L \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \right) \tag{iv}
$$

A *equação (iv)* dá

$$
\begin{Bmatrix} \theta_1 L \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} \tag{v}
$$

Substituindo a *equação (v)* na *equação (iii)*, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} -W \\ M/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{2L^3}\left(\begin{bmatrix} 27 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -W \\ M/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{2L^3} \begin{bmatrix} \frac{27}{4} & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} \tag{vi}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{9EI} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -W \\ M/L \end{Bmatrix}$$

Daqui tira-se que os deslocamentos no nó 2 são

$$v_2 = \frac{4}{9}\frac{WL^3}{EI} - \frac{2}{9}\frac{ML^2}{EI}$$
$$\theta_2 = -\frac{2}{9}\frac{WL^2}{EI} + \frac{1}{3}\frac{ML}{EI}$$

Usando a *equação (v)* também se obtém

$$\theta_1 = \frac{7}{9}\frac{WL^2}{EI} - \frac{1}{2}\frac{ML}{EI}$$
$$\theta_3 = \frac{4}{9}\frac{WL^2}{EI} - \frac{1}{3}\frac{ML}{EI}$$

Note-se que a solução foi obtida através da inversão de duas matrizes 2x2 em vez de uma 4x4 da *equação (ii)*. Esta simplificação foi possível porque $M_1 = M_3 = 0$.

A força de corte interna e o momento fletor interno podem ser obtidos da *equação (3.50)*. Para o elemento de viga 1-2, tem-se

$$\begin{Bmatrix} S_y \\ M \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2}x + \frac{4}{L} & \frac{12}{L^3}x + \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2}x + \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Para o elemento de viga 1-2, tem-se

$$S_{y,12} = EI\left(\frac{12}{L^3}v_1 - \frac{6}{L^2}\theta_1 - \frac{12}{L^3}v_2 - \frac{6}{L^2}\theta_2\right) = -\frac{26}{3}W + \frac{11}{3}\frac{M}{L}$$

e

$$M_{12} = EI\left[\left(\frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2}\right)v_1 + \left(-\frac{6}{L^2}x + \frac{4}{L}\right)\theta_1 + \left(\frac{12}{L^3}x + \frac{6}{L^2}\right)v_2 + \left(-\frac{6}{L^2}x + \frac{2}{L}\right)\theta_2\right]$$
$$= \left(-\frac{26}{3}W + \frac{11}{3}\frac{M}{L}\right)x$$