**Exemplo 2.10:**
O laminado de quatro camadas simétrico da *figura 2.13* tem camadas de espessura igual e duas orientações diferentes, 30º e 40º. Para as camadas 1 e 4 $E_1$ = 200000 N/mm$^2$, $E_2$ = 15000 N/mm$^2$, $G_{12}$ = 10000 N/mm$^2$ e $\nu_{12}$ = 0,3. Para as camadas 2 e 3 $E_1$ = 140000 N/mm$^2$, $E_2$ = 10000 N/mm$^2$, $G_{12}$ = 5000 N/mm$^2$ e $\nu_{12}$ = 0,3. Calcular as constantes elásticas equivalentes do laminado.

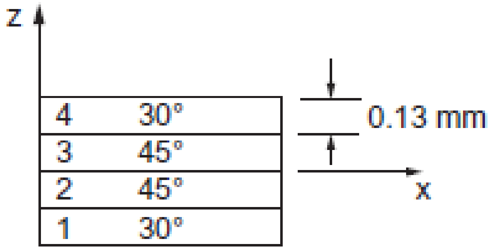


**Figura 2.13** Laminado do *exemplo 2.10*.

Vamos considerar primeiro as camadas 1 e 4.
O coeficiente de Poisson menor $\nu_{21}$, usando a *equação (2.29)*, é

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12} = \frac{15000}{200000}\times 0.3 = 0.023$$

Para uma camada ortrotópica, os termos reduzidos de rigidez $K_{13}$ e $K_{23}$ da *equação (2.43)* são zero. Da *equação (2.50)*, tem-se

$$K_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{200000}{1-0.3\times 0.023} = 201410 \text{ N/mm}^2$$
$$K_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{0.023\times 200000}{1-0.3\times 0.023} = 4632 \text{ N/mm}^2$$
$$K_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{15000}{1-0.3\times 0.023} = 15106 \text{ N/mm}^2$$
$$K_{33} = G_{12} = 10000 \text{ N/mm}^2$$

Os ângulos das camadas 1 e 4 são $\theta$ = 30º, pelo que na *equação (2.50)* $m = \cos\theta = 0.866$ e $n = \sin\theta = 0.5$.Assim, tem-se

$$\overline{K}_{11} = m^4 K_{11} + n^4 K_{22} + 2m^2 n^2 K_{12} + 4m^2 n^2 K_{33}$$
$$\overline{K}_{12} = m^2 n^2 K_{11} + m^2 n^2 K_{22} + \left(m^4 + n^4\right) K_{12} - 4m^2 n^2 K_{33}$$
$$\overline{K}_{13} = m^3 n K_{11} - mn^3 K_{22} + \left(mn^3 - m^3 n\right) K_{12} + 2\left(mn^3 - m^3 n\right) K_{33}$$
$$\overline{K}_{22} = n^4 K_{11} + m^4 K_{22} + 2m^2 n^2 K_{12} + 4m^2 n^2 K_{33}$$
$$\overline{K}_{23} = mn^3 K_{11} - m^3 n K_{22} + \left(m^3 n - mn^3\right) K_{12} + 2\left(m^3 n - mn^3\right) K_{33}$$
$$\overline{K}_{33} = m^2 n^2 K_{11} + m^2 n^2 K_{22} - 2m^2 n^2 K_{12} + \left(m^2 - n^2\right)^2 K_{33}$$

Substituindo os valores e resolvendo, obtém-se

$$\overline{K}_{11} = 0.866^4 \times 201410 + 0.5^4 \times 15106 + 2 \times 0.866^2 \times 0.5^2 \times 4632 + 4 \times 0.866^2 \times 0.5^2 \times 10000$$
$$= 123583 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{12} = 0.866^2 \times 0.5^2 \times 201410 + 0.866^2 \times 0.5^2 \times 15106 + \left(0.866^4 + 0.5^4\right) \times 4632$$
$$- 4 \times 0.866^2 \times 0.5^2 \times 10000 = 35908 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{13} = 0.866^3 \times 0.5 \times 201410 - 0.866 \times 0.5^3 \times 15106 + \left(0.866 \times 0.5^3 - 0.866^3 \times 0.5\right) \times 4632$$
$$+ 2 \times \left(0.866 \times 0.5^3 - 0.866^3 \times 0.5\right) \times 10000 = 58436 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{22} = 0.5^4 \times 201410 + 0.866^4 \times 15106 + 2 \times 0.866^2 \times 0.5^2 \times 4632 + 4 \times 0.866^2 \times 0.5^2 \times 10000$$
$$= 30431 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{23} = 0.866 \times 0.5^3 \times 201410 - 0.866^3 \times 0.5 \times 15106 + \left(0.866^3 \times 0.5 - 0.866 \times 0.5^3\right) \times 4632$$
$$+ 2 \times \left(0.866^3 \times 0.5 - 0.866 \times 0.5^3\right) \times 10000 = 22232 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{33} = 0.866^2 \times 0.5^2 \times 201410 + 0.866^2 \times 0.5^2 \times 15106 - 2 \times 0.866^2 \times 0.5^2 \times 4632$$
$$+ \left(0.866^2 - 0.5^2\right)^4 \times 10000 = 41266 \text{ N/mm}^2$$

Vamos considerar agora as camadas 2 e 3.
O coeficiente de Poisson menor $\nu_{21}$, usando a *equação (2.29)*, é

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} = \frac{10000}{140000} \times 0.3 = 0.021$$

Para uma camada ortrotópica, os termos reduzidos de rigidez $K_{13}$ e $K_{23}$ da *equação (2.43)* são zero. Da *equação (2.50)*, tem-se

$$K_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{140000}{1-0.3\times 0.021} = 140888 \text{ N/mm}^2$$

$$K_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{0.021\times 140000}{1-0.3\times 0.021} = 2959 \text{ N/mm}^2$$

$$K_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{10000}{1-0.3\times 0.021} = 10060 \text{ N/mm}^2$$

$$K_{33} = G_{12} = 5000 \text{ N/mm}^2$$

Os ângulos das camadas são $\theta = 45º$, pelo que na *equação (2.50)* $m = \cos\theta = 1/\sqrt{2}$ e $n = \sin\theta = 1/\sqrt{2}$ .Assim, tem-se

$$\overline{K}_{11} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 2958 + 4\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 5000$$
$$= 44216 \text{ N/mm}^2$$

$$\overline{K}_{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 2958 - 4\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 5000$$
$$= 34216 \text{ N/mm}^2$$

$$\overline{K}_{13} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 0\times 2958 + 2\times 0\times 5000 = 32707 \text{ N/mm}^2$$

$$\overline{K}_{22} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 2958 + 4\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 5000$$
$$= 44216 \text{ N/mm}^2$$

$$\overline{K}_{23} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 0\times 2958 + 2\times 0\times 5000 = 32707 \text{ N/mm}^2$$

$$\overline{K}_{33} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 - 2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 2958 + 0\times 5000 = 36258 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.74)*, uma vez que se tem camadas idênticas duas a duas com 0,13 mm de espessura, tem-se

$$A_{11} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{11}\right)_p = 2\times 0.13\times(123583 + 44216) = 43628 \text{ N/mm}$$

$$A_{12} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{12}\right)_p = 2\times 0.13\times(35908 + 34216) = 18232 \text{ N/mm}$$

$$A_{13} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{13}\right)_p = 2\times 0.13\times(58436 + 32707) = 23697 \text{ N/mm}$$

$$A_{22} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{22}\right)_p = 2\times 0.13\times(30431 + 44216) = 19408 \text{ N/mm}$$

$$A_{23} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{23}\right)_p = 2\times 0.13\times(22232 + 32707) = 14284 \text{ N/mm}$$

$$A_{33} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{33}\right)_p = 2\times 0.13\times(41266 + 36258) = 20156 \text{ N/mm}$$

Da *equação (2.81)*, tem-se

$$\begin{aligned}
AA &= A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{23}A_{13} - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2 - A_{11}A_{23}^2 \\
&= 43628\times 19408\times 20156 + 2\times 18232\times 14284\times 23697 - 19408\times 23697^2 \\
&\quad - 20156\times 18232^2 - 43628\times 14284^2 \\
&= 2.91\times 10^{12} \text{ N}^2/\text{mm}^2
\end{aligned}$$

e da *equação (2.80)*, os valores dos termos da inversa da matriz [$A$] ficam

$$a_{11} = \frac{A_{22}A_{33} - A_{23}^2}{AA} = \frac{19408\times 20156 - 14284^2}{2.91\times 10^{12}} = 6.43\times 10^{-5}$$

$$a_{22} = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{AA} = \frac{43628\times 20156 - 23697^2}{2.91\times 10^{12}} = 10.92\times 10^{-5}$$

$$a_{33} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{AA} = \frac{43628\times 19408 - 18232^2}{2.91\times 10^{12}} = 17.67\times 10^{-5}$$

$$a_{12} = \frac{A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}}{AA} = \frac{23697\times 14284 - 18232\times 20156}{2.91\times 10^{12}} = -0.10\times 10^{-5}$$

$$a_{13} = \frac{A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}}{AA} = \frac{18232\times 14284 - 19408\times 23697}{2.91\times 10^{12}} = -6.85\times 10^{-5}$$

$$a_{23} = \frac{A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23}}{AA} = \frac{18232\times 23697 - 43628\times 14284}{2.91\times 10^{12}} = -6.57\times 10^{-5}$$

Agora, da *equação (2.83-1)*, o módulo longitudinal equivalente é dado por

$$E_x = \frac{1}{ta_{11}} = \frac{1}{4\times 0.13\times 6.43\times 10^{-5}} = 29908 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.83-2)*, o módulo transversal equivalente é dado por

$$E_y = \frac{1}{ta_{22}} = \frac{1}{4\times 0.13\times 10.92\times 10^{-5}} = 17611\ \text{N/mm}^2$$

Da *equação (2.83-3)*, o módulo de corte equivalente é dado por

$$G_{xy} = \frac{1}{ta_{33}} = \frac{1}{4\times 0.13\times 17.67\times 10^{-5}} = 10883\ \text{N/mm}^2$$

Da *equação (2.83-4)*, o coeficiente de Poisson maior equivalente é dado por

$$\nu_{xy} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{\left(-0.10\times 10^{-5}\right)}{6.43\times 10^{-5}} = 0.016$$

Da *equação (2.83-5)*, o coeficiente de Poisson menor equivalente é dado por

$$\nu_{yx} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{\left(-0.10\times 10^{-5}\right)}{10.92\times 10^{-5}} = 0.009$$

Da *equação (2.83-6)*, o coeficiente de acoplamento $m_x$ é dado por

$$m_x = -\frac{a_{13}}{a_{11}} = -\frac{\left(-6.85\times 10^{-5}\right)}{6.43\times 10^{-5}} = 1.07$$

Finalmente, da *equação (2.83-7)*, o coeficiente de acoplamento $m_y$ é dado por

$$m_y = -\frac{a_{23}}{a_{22}} = -\frac{\left(-6.57\times 10^{-5}\right)}{10.92\times 10^{-5}} = 0.64$$