Exemplo 2.07:
A *figura 2.10* mostra a secção transversal no plano *xz* de um laminado simétrico com quatro camadas isotrópicas orientadas na mesma direção. Todas as camadas têm uma espessura de 0,15 mm. Sabendo que o módulo de Young das camadas é 70000 N/mm^2 e que o coeficiente de Poisson é 0,3, calcular as constantes elásticas equivalentes do laminado para o caso de carregamento no plano.

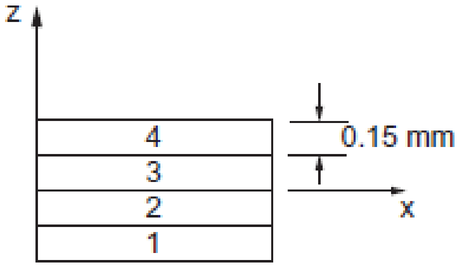

Figura 2.10 Laminado do *exemplo 2.07*.

Uma vez que o laminado é simétrico e isotrópico as constantes elásticas para cada camada são:

$$E_1 = E_2 = E = 70000 \text{ N/mm}^2$$
$$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu = 0.3$$

Para um laminado isotrópico também se tem

$$G_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{70000}{2(1+0.3)} = 26923 \text{ N/mm}^2 \tag{i}$$

Para uma camada isotrópica, que é um caso especial da camada ortrotópica, os termos reduzidos de rigidez $\overline{K}_{13}$ e $\overline{K}_{23}$ da *equação (2.50)* são zero. Também, da *equação (2.43)*, tem-se

$$\overline{K}_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{70000}{1-0.3^2} = 76923 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} = \frac{0.3\times 70000}{1-0.3^2} = 23077 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{70000}{1-0.3^2} = 76923 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{33} = G = 26923 \text{ N/mm}^2$$

Para uma camada isotrópica não existe ângulo da camada, ou seja, $\theta = 0$, e na *equação (2.50)*, tem-se

$$\overline{K}_{11} = K_{11}$$
$$\overline{K}_{12} = K_{12}$$
$$\overline{K}_{22} = K_{12}$$
$$\overline{K}_{33} = K_{33}$$

Da *equação (2.74)*, uma vez que se tem 4 camadas idênticas com 0,15 mm de espessura, tem-se

$$A_{11} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{11}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 76923 = 46154 \text{ N/mm}$$
$$A_{12} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{12}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 23077 = 13846 \text{ N/mm}$$
$$A_{22} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{22}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 76923 = 46154 \text{ N/mm}$$
$$A_{33} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{33}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 26923 = 16154 \text{ N/mm}$$

Da *equação (2.80)*, os valores dos termos da inversa da matriz [A] são

$$a_{11} = \left(A_{22}A_{33} - A_{23}^2\right)/AA = A_{22}A_{33}/AA$$
$$a_{22} = \left(A_{11}A_{33} - A_{13}^2\right)/AA = A_{11}A_{33}/AA$$
$$a_{33} = \left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)/AA$$
$$a_{12} = \left(A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}\right)/AA = -A_{12}A_{33}/AA$$
$$a_{13} = \left(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}\right)/AA = 0$$
$$a_{23} = \left(A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23}\right)/AA = 0$$

onde

$$AA = A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{23}A_{13} - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2 - A_{11}A_{23}^2 = A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2$$

então

$$a_{11} = \frac{A_{22}A_{33}}{\left(A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2\right)} = \frac{A_{22}}{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)} = \frac{46154}{46154 \times 46154 - 13846^2} = 23.8 \times 10^{-6}$$

$$a_{22} = \frac{A_{11}A_{33}}{\left(A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2\right)} = \frac{A_{11}}{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)} = \frac{46154}{46154 \times 46154 - 13846^2} = 23.8 \times 10^{-6}$$

$$a_{33} = \frac{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)}{\left(A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2\right)} = \frac{1}{A_{33}} = \frac{1}{16154} = 61.9 \times 10^{-6}$$

$$a_{12} = \frac{-A_{12}A_{33}}{\left(A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2\right)} = \frac{-A_{12}}{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)} = \frac{-13846}{46154 \times 46154 - 13846^2} = -7.1 \times 10^{-6}$$

$$a_{13} = 0$$

$$a_{23} = 0$$

Agora, da *equação (2.83-1)*, o módulo de Young equivalente é dado por

$$E_x = \frac{1}{ta_{11}} = \frac{1}{4 \times 0.15 \times 23.8 \times 10^{-6}} = 70000 \text{ N/mm}^2$$

e, da *equação (2.83-4)*, o coeficiente de Poisson equivalente é dado por

$$\nu_{xy} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{-7.1 \times 10^{-6}}{23.8 \times 10^{-6}} = 0.3$$

Finalmente, da *equação (2.83-3)*, o módulo de corte equivalente é dado por

$$G_{xy} = \frac{1}{ta_{33}} = \frac{1}{4 \times 0.15 \times 61.9 \times 10^{-6}} = 26923 \text{ N/mm}^2$$

e, da *equação (2.83-6)*, o coeficiente de acoplamento m_x é dado por

$$m_x = -\frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{0}{23.8 \times 10^{-6}} = 0$$

Pode ver-se que as constantes elásticas equivalentes são idênticas aos valores dados para as constantes da camada. Isto era expectável e deduzível sem qualquer cálculo, uma vez que para uma camada isotrópica as constantes elásticas são independentes da espessura do laminado. No entanto, este exemplo serve para ilustrar o método.