Exemplo 2.11:
O laminado de quatro camadas simétrico da *figura 2.14* tem camadas de espessura igual e duas orientações diferentes, 30º e 40º. Para as camadas 1 e 4 $E_1 = 200000$ N/mm^2, $E_2 = 15000$ N/mm^2, $G_{12} = 10000$ N/mm^2 e $\nu_{12} = 0,3$. Para as camadas 2 e 3 $E_1 = 140000$ N/mm^2, $E_2 = 10000$ N/mm^2, $G_{12} = 5000$ N/mm^2 e $\nu_{12} = 0,3$. Sabendo que o laminado está sujeito a uma única força por unidade de comprimento $N_x = 100$ N/mm, calcular as tensões nas camadas e verificar a resistência do laminado quando $X_t = 1500$ N/mm^2, $X_c = 1200$ N/mm^2, $Y_t = 50$ N/mm^2, $Y_c = 250$ N/mm^2 e $S = 70$ N/mm^2.

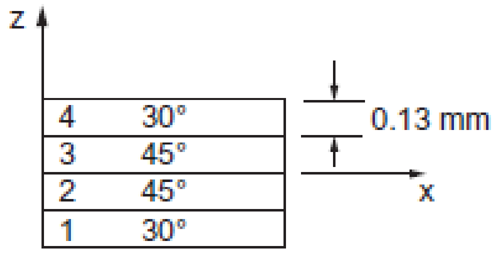

Figura 2.14 Laminado do *exemplo 2.11*.

As tensões da camada estão relacionadas com as extensões do laminado através da *equação (2.50)*, isto é

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13}\\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23}\\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} \tag{i}$$

Note-se que as extensões da camada e do laminado são iguais. Da *equação (2.76)* obtêm-se as extensões da camada em termos do carregamento aplicado

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} = [A]^{-1}\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{Bmatrix} \tag{ii}$$

Usando as *equações (i)* e *(ii)*, tem-se

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13}\\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23}\\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33}\end{bmatrix}[A]^{-1}\begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\end{Bmatrix} \tag{iii}$$

ou da *equação (2.79)*

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22} & \overline{K}_{23} \\ \overline{K}_{31} & \overline{K}_{32} & \overline{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \tag{iv}$$

Na *equação (iv)*, a matriz $\lfloor \overline{K}_{ij} \rfloor$ diz respeito a uma camada específica e a matriz $\lfloor a_{ij} \rfloor$ diz respeito ao laminado. Os termos da matriz $\lfloor \overline{K}_{ij} \rfloor$ foram calculados no *exemplo 2.09* e os termos da matriz $\lfloor a_{ij} \rfloor$ também. Neste exemplo N_x = 100 N/mm e $N_y = N_{xy}$ = 0.

Substituindo os valores relevantes na *equação (iv)* tem-se, para as camadas 1 e 4,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 123583 & 35908 & 58436 \\ 35908 & 39431 & 22232 \\ 58436 & 22232 & 41266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.43 & -0.10 & -6.85 \\ -0.10 & 10.92 & -6.57 \\ -6.85 & -6.57 & 17.67 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \tag{v}$$

o que dá

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 123583 & 35908 & 58436 \\ 35908 & 39431 & 22232 \\ 58436 & 22232 & 41266 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 643 \\ -10 \\ -685 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \tag{vi}$$

Finalmente,

$$\sigma_{x,1,4} = 390.8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{y,1,4} = 75.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{xy,1,4} = 90.8 \text{ N/mm}^2$$

As tensões da camada podem ser agora obtidas usando a *equação (2.45)* com θ = 30º, $m = \cos\theta = 0.866$ e $n = \sin\theta = 0.5$.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 & 0.866 \\ 0.25 & 0.75 & -0.866 \\ -0.433 & 0.433 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 390.8 \\ 75.6 \\ 90.8 \end{Bmatrix}$$

o que dá

$\sigma_{1,1,4} = 390.6 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{2,1,4} = 75.8 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{12,1,4} = -91.1 \text{ N/mm}^2$

Para as camadas 2 e 3, os termos a_{ij} são iguais aos da *equação (v)*, logo, usando os valores das camadas 2 e 3 da matriz $\left[\overline{K}_{ij}\right]$, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 44216 & 34216 & 32707 \\ 34216 & 44216 & 32707 \\ 32707 & 32707 & 36258 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 643 \\ -10 \\ -685 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} \qquad)$$

o que dá

$\sigma_{x,2,3} = 56.8 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{y,2,3} = -8.5 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{xy,2,3} = -41.3 \text{ N/mm}^2$

As tensões da camada podem ser agora obtidas usando a equação (2.45) com $\theta = 45°$, $m = \cos\theta = 1/\sqrt{2}$ e $n = \sin\theta = 1/\sqrt{2}$. Assim,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 56.8 \\ -8.5 \\ -41.3 \end{Bmatrix}$$

o que dá

$\sigma_{1,2,3} = -17.2 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{2,2,3} = 65.4 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{12,2,3} = -32.7 \text{ N/mm}^2$

A distribuição das tensões nas camadas está representada na *figura 2.14-1*.

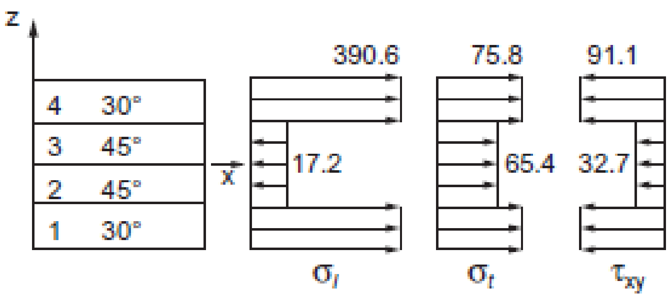

Figura 2.14-1 Distribuição das tensões das camadas (N/mm^2) no laminado do *exemplo 2.11*.

Depois de se ter obtido as tensões individuais de cada camada, pode investigar-se a resistência do laminado, usando a teoria da tensão máxima.

Para as camadas 1 e 4, tem-se

$$\frac{\sigma_1}{X_t} = \frac{390.6}{1500} = 0.26$$

$$\frac{\sigma_2}{Y_t} = \frac{75.8}{50} = 1.52$$

$$\frac{\sigma_{12}}{S} = \frac{|-91.1|}{70} = 1.30$$

Para as camadas 2 e 3, tem-se

$$\frac{\sigma_1}{X_c} = \frac{|-17.2|}{1200} = 0.01$$

$$\frac{\sigma_2}{Y_t} = \frac{65.4}{50} = 1.37$$

$$\frac{\sigma_{12}}{S} = \frac{|-32.7|}{70} = 0.45$$

Claramente existe falha à tração transversal em todas as quatro camadas e existe falha ao corte nas camadas 1 e 4.