Exemplo 2.08:
A *figura 2.11* mostra a secção transversal no plano *xz* de um laminado simétrico com quatro camadas ortotrópicas orientadas a 0º. Todas as camadas têm uma espessura de 0,15 mm. As propriedades da camada são: E_1 = 140000 N/mm^2, E_2 = 10000 N/mm^2, G_{12} = 5000 N/mm^2 e ν_{12} = 0,3. Calcular as constantes elásticas equivalentes do laminado.

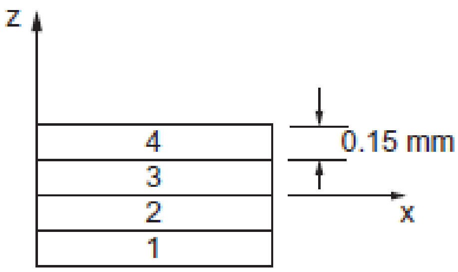

Figura 2.11 Laminado do *exemplo 2.08*.

Primeiro tem que se calcular o coeficiente de Poisson menor ν_{21}, usando a *equação (2.29)*. Então

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12} = \frac{10000}{140000}\times 0.3 = 0.021$$

Para uma camada ortrotópica, os termos reduzidos de rigidez K_{13} e K_{23} da *equação (2.43)* são zero. Da *equação (2.50)*, tem-se

$$K_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{140000}{1-0.3\times 0.021} = 140888 \text{ N/mm}^2$$
$$K_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{0.021\times 140000}{1-0.3\times 0.021} = 2959 \text{ N/mm}^2$$
$$K_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{10000}{1-0.3\times 0.021} = 10060 \text{ N/mm}^2$$
$$K_{33} = G_{12} = 5000 \text{ N/mm}^2$$

Os ângulos das camadas são $\theta = 0$, pelo que na *equação (2.50)* $m = \cos\theta = 1$ e $n = \sin\theta = 0$.Assim, tem-se

$$\overline{K}_{11} = K_{11} = 140888 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{12} = K_{12} = 2959 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{13} = K_{13} = 0$$
$$\overline{K}_{22} = K_{22} = 10060 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{23} = K_{23} = 0$$
$$\overline{K}_{33} = 5000 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.74)*, uma vez que se tem 4 camadas idênticas com 0,15 mm de espessura, tem-se

$$A_{11} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{11}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 140888 = 84533 \text{ N/mm}$$
$$A_{12} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{12}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 2959 = 1775 \text{ N/mm}$$
$$A_{13} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{13}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 0 = 0$$
$$A_{22} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{22}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 10060 = 6036 \text{ N/mm}$$
$$A_{23} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{23}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 0 = 0$$
$$A_{33} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{33}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 5000 = 3000 \text{ N/mm}$$

Da *equação (2.80)*, os valores dos termos da inversa da matriz [A] são

$$a_{11} = \left(A_{22}A_{33} - A_{23}^2\right)/AA = A_{22}A_{33}/AA$$
$$a_{22} = \left(A_{11}A_{33} - A_{13}^2\right)/AA = A_{11}A_{33}/AA$$
$$a_{33} = \left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)/AA$$
$$a_{12} = \left(A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}\right)/AA = -A_{12}A_{33}/AA$$
$$a_{13} = \left(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}\right)/AA = 0$$
$$a_{23} = \left(A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23}\right)/AA = 0$$

onde

$$AA = A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{23}A_{13} - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2 - A_{11}A_{23}^2 = A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2$$

Então,

$$a_{11} = \frac{A_{22}A_{33}}{\left(A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2\right)} = \frac{A_{22}}{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)} = \frac{6036}{84533 \times 6036 - 1775^2} = 11.9 \times 10^{-6}$$

$$a_{12} = \frac{-A_{12}A_{33}}{\left(A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2\right)} = \frac{-A_{12}}{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)} = \frac{-1775}{84533 \times 6036 - 1775^2} = -3.5 \times 10^{-6}$$

$$a_{13} = 0$$

$$a_{22} = \frac{A_{11}A_{33}}{\left(A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2\right)} = \frac{A_{11}}{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)} = \frac{84533}{84533 \times 6036 - 1775^2} = 166.5 \times 10^{-6}$$

$$a_{23} = 0$$

$$a_{33} = \frac{\left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)}{\left(A_{11}A_{22}A_{33} - A_{33}A_{12}^2\right)} = \frac{1}{A_{33}} = \frac{1}{3000} = 333.3 \times 10^{-6}$$

Agora, da *equação (2.83-1)*, o módulo longitudinal equivalente é dado por

$$E_x = \frac{1}{ta_{11}} = \frac{1}{4 \times 0.15 \times 11.9 \times 10^{-6}} = 140000 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.83-2)*, o módulo transversal equivalente é dado por

$$E_y = \frac{1}{ta_{22}} = \frac{1}{4 \times 0.15 \times 166.5 \times 10^{-6}} = 10000 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.83-4)*, o coeficiente de Poisson maior equivalente é dado por

$$\nu_{xy} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{-3.5 \times 10^{-6}}{11.9 \times 10^{-6}} = 0.3$$

Da *equação (2.83-5)*, o coeficiente de Poisson menor equivalente é dado por

$$\nu_{yx} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{-3.5 \times 10^{-6}}{166.5 \times 10^{-6}} = 0.021$$

Da *equação (2.83-3)*, o módulo de corte equivalente é dado por

$$G_{xy} = \frac{1}{ta_{33}} = \frac{1}{4 \times 0.15 \times 333.3 \times 10^{-6}} = 5000 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.83-6)*, o coeficiente de acoplamento m_x é dado por

$$m_x = -\frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{0}{23.8 \times 10^{-6}} = 0$$

Finalmente, da *equação (2.83-7)*, o coeficiente de acoplamento m_y é dado por

$$m_y = -\frac{a_{23}}{a_{22}} = \frac{0}{166.5\times10^{-6}} = 0$$

Pode ver-se, como no exemplo anterior, que as constantes elásticas equivalentes são idênticas aos valores dados para as constantes da camada. Isto era expectável e deduzível sem qualquer cálculo, uma vez que as camadas são idênticas e possúem a mesma orientação.