Exemplo 4.03:
Um elemento triangular com extensões constantes tem coordenadas dos cantos 1(0,0), 2(4,0) e 3(2,2) relativamente a um sistema e eixos cartesiano O*xy* e tem uma espessura unitária. Se a matriz de elasticidade tem elementos $D_{11} = D_{22} = a$, $D_{12} = D_{21} = b$, $D_{13} = D_{23} = D_{31} = D_{32} = 0$ e $D_{33} = c$, derive a matriz de rigidez do elemento.

Tendo em conta os dados do problema, o elemento finito tem a configuração da *figura 4.03-1*.

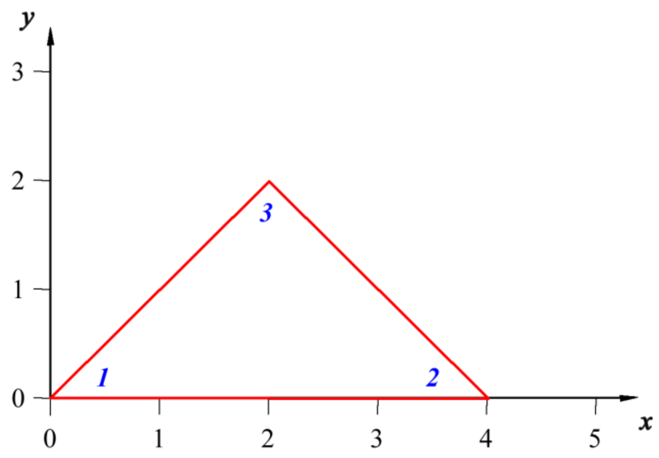

Figura 4.03-1 Elemento finito do *exemplo 4.03*.

Da *equação(4.55)* têm-se as funções de aproximação dos deslocamentos

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x,y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned}\right\}$$

Começando pelo deslocamento *u*, tem-se para o nó 1

$$u_1 = u(0,0) = \alpha_1 + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) = \alpha_1 \qquad \text{(i)}$$

para o nó 2

$$u_2 = u(4,0) = \alpha_1 + \alpha_2(4) + \alpha_3(0) = \alpha_1 + 4\alpha_2 \qquad \text{(ii)}$$

e para o nó 3

$$u_3 = u(2,2) = \alpha_1 + \alpha_2(2) + \alpha_3(2) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \qquad \text{(iii)}$$

Da *equação (i)*, obtém-se

$$\alpha_1 = u_1 \tag{iv}$$

das *equações (ii)* e *(iv)*, obtém-se

$$\alpha_2 = \frac{u_2 - \alpha_1}{4} = \frac{u_2 - u_1}{4} \tag{v}$$

e das *equações (iii)* e *(v)*, obtém-se

$$\alpha_3 = \frac{u_3 - \alpha_1 - 2\alpha_2}{2} = \frac{u_3 - u_1 - 2(u_2 - u_1)/4}{2} = \frac{2u_3 - 2u_1 - u_2 + u_1}{4} = \frac{2u_3 - u_1 - u_2}{4} \tag{vi}$$

Substituindo, agora, α_1, α_2 e α_3 na equação de u em *(4.55)*, tem-se

$$u = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{4}\right)x + \left(\frac{2u_3 - u_1 - u_2}{4}\right)y$$

ou

$$u = \left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)u_1 + \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)u_2 + \frac{y}{2}u_3 \tag{vii}$$

Nesta equação os coeficientes dos deslocamentos nodais são as funções de interpolação dos deslocamentos nodais.
A equação do deslocamento v obtém-se de forma similar a partir da segunda equação de *(4.55)*. Assim,

$$v = \left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)v_1 + \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)v_2 + \frac{y}{2}v_3 \tag{viii}$$

Agora, calculando as extensões, usando as *equações (4.61)*, tem-se

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{v_1}{4} - \frac{v_2}{4} + \frac{v_3}{2}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u_1}{4} - \frac{u_2}{4} + \frac{u_3}{2} - \frac{v_1}{4} + \frac{v_2}{4}$$

Com as extensões em função dos deslocamentos nodais, pode construir-se a *equação (4.62c)* na forma

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [B]\{\delta^e\}$$

Dos dados tem-se, para a matriz de elasticidade

$$[D] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

e, então

$$[D][B] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -a & -b & a & -b & 0 & 2b \\ -b & -a & b & -a & 0 & 2a \\ -c & -c & -c & c & 2c & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$[B]^T[D][B] = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} a+c & b+c & -a+c & b-c & -2c & -2b \\ b+c & a+c & -b+c & a-c & -2c & -2a \\ -a+c & -b+c & a+c & -b-c & -2c & 2b \\ b-c & a-c & -b-c & a+c & 2c & -2a \\ -2c & -2c & -2c & 2c & 4c & 0 \\ -2b & -2a & 2b & -2a & 0 & 4a \end{bmatrix}$$

Finalmente, da *equação (4.78)* pode escrever-se a matriz de rigidez do elemento

$$[K^e] = [[B]^T[D][B]At]$$

onde a área do elemento é $A = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ e a espessura é $t = 1$. Então

$$
\left[K^e\right] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} a+c & b+c & -a+c & b-c & -2c & -2b \\ b+c & a+c & -b+c & a-c & -2c & -2a \\ -a+c & -b+c & a+c & -b-c & -2c & 2b \\ b-c & a-c & -b-c & a+c & 2c & -2a \\ -2c & -2c & -2c & 2c & 4c & 0 \\ -2b & -2a & 2b & -2a & 0 & 4a \end{bmatrix}
$$

Notar as propriedades da matriz: se simétrica; ter todos os elementos da diagonal positivos; a soma de qualquer coluna e qualquer linha se nula.