Exemplo 2.09:

A *figura 2.12* mostra a secção transversal no plano *xz* de um laminado simétrico com quatro camadas ortotrópicas orientadas a 45º. Todas as camadas têm uma espessura de 0,15 mm. As propriedades da camada são: E_1 = 140000 N/mm^2, E_2 = 10000 N/mm^2, G_{12} = 5000 N/mm^2 e ν_{12} = 0,3. Calcular as constantes elásticas equivalentes do laminado.

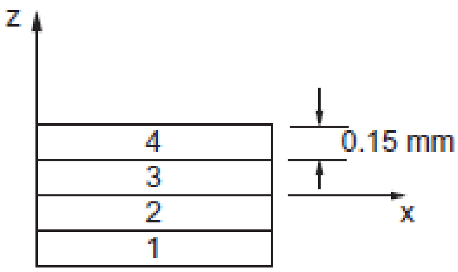

Figura 2.12 Laminado do *exemplo 2.09*.

Primeiro tem que se calcular o coeficiente de Poisson menor ν_{21}, usando a *equação (2.29)*. Então

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12} = \frac{10000}{140000} \times 0.3 = 0.021$$

Para uma camada ortrotópica, os termos reduzidos de rigidez K_{13} e K_{23} da *equação (2.43)* são zero. Da *equação (2.50)*, tem-se

$$K_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{140000}{1-0.3\times 0.021} = 140888 \text{ N/mm}^2$$
$$K_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{0.021\times 140000}{1-0.3\times 0.021} = 2959 \text{ N/mm}^2$$
$$K_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{10000}{1-0.3\times 0.021} = 10060 \text{ N/mm}^2$$
$$K_{33} = G_{12} = 5000 \text{ N/mm}^2$$

Os ângulos das camadas são θ = 45º, pelo que na *equação (2.50)* $m = \cos\theta = 1/\sqrt{2}$ e $n = \sin\theta = 1/\sqrt{2}$ .Assim, tem-se

$$\overline{K}_{11} = m^4 K_{11} + n^4 K_{22} + 2m^2 n^2 K_{12} + 4m^2 n^2 K_{33}$$
$$\overline{K}_{12} = m^2 n^2 K_{11} + m^2 n^2 K_{22} + \left(m^4 + n^4\right) K_{12} - 4m^2 n^2 K_{33}$$
$$\overline{K}_{13} = m^3 n K_{11} - mn^3 K_{22} + \left(mn^3 - m^3 n\right) K_{12} + 2\left(mn^3 - m^3 n\right) K_{33}$$
$$\overline{K}_{22} = n^4 K_{11} + m^4 K_{22} + 2m^2 n^2 K_{12} + 4m^2 n^2 K_{33}$$
$$\overline{K}_{23} = mn^3 K_{11} - m^3 n K_{22} + \left(m^3 n - mn^3\right) K_{12} + 2\left(m^3 n - mn^3\right) K_{33}$$
$$\overline{K}_{33} = m^2 n^2 K_{11} + m^2 n^2 K_{22} - 2m^2 n^2 K_{12} + \left(m^2 - n^2\right)^2 K_{33}$$

Substituindo os valores e resolvendo, obtém-se

$$\overline{K}_{11} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 2958 + 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 5000$$
$$= 44216 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 2958 - 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 5000$$
$$= 34216 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{13} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 0 \times 2958 + 2 \times 0 \times 5000 = 32707 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{22} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 2958 + 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 5000$$
$$= 44216 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{23} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 + 0 \times 2958 + 2 \times 0 \times 5000 = 32707 \text{ N/mm}^2$$
$$\overline{K}_{33} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 140888 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 10060 - 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \times 2958 + 0 \times 5000 = 36258 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.74)*, uma vez que se tem 4 camadas idênticas com 0,15 mm de espessura, tem-se

$$A_{11} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{11}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 44216 = 25296 \text{ N/mm}$$

$$A_{12} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{12}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 34216 = 20530 \text{ N/mm}$$

$$A_{13} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{13}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 32707 = 19624 \text{ N/mm}$$

$$A_{22} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{22}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 44216 = 25296 \text{ N/mm}$$

$$A_{23} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{23}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 32707 = 19624 \text{ N/mm}$$

$$A_{33} = \sum_{p=1}^{4} t_p \left(\overline{K}_{33}\right)_p = 4 \times 0.15 \times 36258 = 21755 \text{ N/mm}$$

Da *equação (2.81)*, tem-se

$$\begin{aligned} AA &= A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{23}A_{13} - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2 - A_{11}A_{23}^2 \\ &= 25296 \times 25296 \times 21755 + 2 \times 20530 \times 19624 \times 19624 - 25296 \times 19624^2 \\ &\quad - 21755 \times 20530^2 - 25296 \times 19624^2 \\ &= 1.08 \times 10^{12} \text{ N}^2/\text{mm}^2 \end{aligned}$$

e da *equação (2.80)*, os valores dos termos da inversa da matriz [A] ficam

$$a_{11} = \frac{A_{22}A_{33} - A_{23}^2}{AA} = \frac{25296 \times 21755 - 19624^2}{1.08 \times 10^{12}} = 1.53 \times 10^{-4}$$

$$a_{22} = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{AA} = \frac{25296 \times 21755 - 19624^2}{1.08 \times 10^{12}} = 1.53 \times 10^{-4}$$

$$a_{33} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{AA} = \frac{25296 \times 25296 - 20530^2}{1.08 \times 10^{12}} = 2.02 \times 10^{-4}$$

$$a_{12} = \frac{A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}}{AA} = \frac{19624 \times 19624 - 20530 \times 21755}{1.08 \times 10^{12}} = -0.57 \times 10^{-4}$$

$$a_{13} = \frac{A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}}{AA} = \frac{20530 \times 19624 - 25296 \times 19624}{1.08 \times 10^{12}} = -0.87 \times 10^{-4}$$

$$a_{23} = \frac{A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23}}{AA} = \frac{20530 \times 19624 - 25296 \times 19624}{1.08 \times 10^{12}} = -0.87 \times 10^{-4}$$

Agora, da *equação (2.83-1)*, o módulo longitudinal equivalente é dado por

$$E_x = \frac{1}{ta_{11}} = \frac{1}{4 \times 0.15 \times 1.53 \times 10^{-4}} = 10893 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.83-2)*, o módulo transversal equivalente é dado por

$$E_y = \frac{1}{ta_{22}} = \frac{1}{4 \times 0.15 \times 1.53 \times 10^{-4}} = 10893 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.83-3)*, o módulo de corte equivalente é dado por

$$G_{xy} = \frac{1}{ta_{33}} = \frac{1}{4 \times 0.15 \times 2.02 \times 10^{-4}} = 8251 \text{ N/mm}^2$$

Da *equação (2.83-4)*, o coeficiente de Poisson maior equivalente é dado por

$$\nu_{xy} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{\left(-0.57 \times 10^{-4}\right)}{1.53 \times 10^{-4}} = 0.37$$

Da *equação (2.83-5)*, o coeficiente de Poisson menor equivalente é dado por

$$\nu_{yx} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{\left(-0.57 \times 10^{-4}\right)}{1.53 \times 10^{-4}} = 0.37$$

Da *equação (2.83-6)*, o coeficiente de acoplamento m_x é dado por

$$m_x = -\frac{a_{13}}{a_{11}} = -\frac{\left(-0.87 \times 10^{-4}\right)}{1.53 \times 10^{-4}} = 0.57$$

Finalmente, da *equação (2.83-7)*, o coeficiente de acoplamento m_y é dado por

$$m_y = -\frac{a_{23}}{a_{22}} = -\frac{\left(-0.87 \times 10^{-4}\right)}{1.53 \times 10^{-4}} = 0.57$$

Uma vez que os coeficiente de acoplamento de corte têm valor diferente de zero, neste laminado, então os esforços diretos vão produzir extensões de corte e os esforços de corte vão produzir extensões diretas. No entanto, em muitas configurações de laminados, a orientação das camadas é escolhida de forma a que o acoplamento de corte seja eliminado.