

UNIVERSIDADE
BEIRA INTERIOR

Métodos Computacionais para Análise Estrutural

Estruturas Aeroespaciais II (10373/15095)

1º Ciclo/Mestrado Integrado em Engenharia
Aeronáutica

2024

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais
Faculdade de Engenharia



1. Introdução

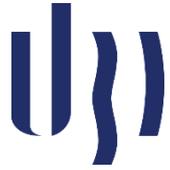
As estruturas aeronáuticas consistem numa grande quantidade de componentes arranjados de uma forma irregular.

Estas estruturas são normalmente contínuas e, por isso, possuem em teoria um número infinito de graus de liberdade e de redundâncias.

A análise é possível apenas se a estrutura real for substituída por um modelo ou uma aproximação idealizada.

Um procedimento destes já foi visto em Estruturas Aeroespaciais I, onde se verificou que quanto maior o grau de simplificação da idealização menos complexa mas mais imprecisa se torna a análise.

No projeto de aeronaves, onde o peso é de extrema importância, um conhecimento preciso do carregamento e das tensões nos componentes é essencial.



1. Introdução

Só é possível este grau de precisão se a estrutura idealizada representar corretamente a estrutura real.

Os métodos clássicos de análise estrutural **não conseguem lidar com a complexidade** destas representações e, por isso, foi necessário desenvolver métodos matriciais e ferramentas computacionais para as analisar.

Um problema estrutural pode ser formulado de duas formas:

- Uma forma usa os deslocamentos da estrutura como incógnitas, sendo as forças aplicadas conhecidas;
- Noutra forma, as forças são consideradas inicialmente desconhecidas.

Estas duas formas de solução são conhecidas como método de **rigidez** (ou de **deslocamentos**) e de **flexibilidade** (ou de **forças**), respetivamente.



1. Introdução

O método mais comumente usado é o método de rigidez e, por essa razão, é esse que se vai analisar.

Geralmente, as estruturas reais têm que ser idealizadas até certo ponto para poderem ser passíveis de análise.

A representação de uma treliça por elementos ligados por articulações é um bom exemplo da idealização de **estruturas tipo “esqueleto”**.

Assume-se que estas estruturas consistem num número de elementos ligados por nós.

O comportamento de cada elemento pode ser obtido com métodos básicos de análise estrutural e daí o comportamento da estrutura completa é obtido por sobreposição.

Estas operações podem ser feitas com os métodos matriciais como se vai ver.



1. Introdução

As **estruturas contínuas** são mais difíceis de idealizar: placas, cascas e revestimentos de asas ou fuselagens, por exemplo.

Para este tipo de estruturas, foi desenvolvido um método que estende o método matricial das estruturas tipo esqueleto para representar qualquer meio contínuo por elementos ligados por nós.

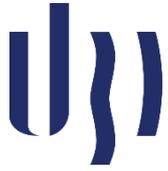
O método, chamado de método dos elementos finitos, foi desenvolvido na Boeing Aircraft Company e na University of Berkeley.

Os elementos podem ter qualquer forma mas os mais simples, usados em problemas de tensão plana, são o triângulo ou o quadrilátero.



2. Métodos Matriciais

Vamos ver o método da matriz de rigidez para estruturas tipo esqueleto e vigas.



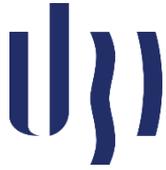
2. Métodos Matriciais

2.1. Notação

Em geral, consideram-se estruturas sujeitas às forças $F_{x,1}, F_{y,1}, F_{z,1}, F_{x,2}, F_{y,2}, F_{z,2}, \dots, F_{x,n}, F_{y,n}, F_{z,n}$, aplicadas nos nós $1, 2, \dots, n$, onde os deslocamentos são $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n$.

Os índices numéricos representam os nós, enquanto que as letras representam a direção num referencial com os eixos x, y, z .

Os deslocamentos u, v, w representam os deslocamentos no sentido positivo dos eixos x, y e z , respetivamente.



2. Métodos Matriciais

2.1. Notação

As forças e deslocamentos nodais são escritos como vetores coluna

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{z,1} \\ F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ F_{z,2} \\ \vdots \\ F_{x,n} \\ F_{y,n} \\ F_{z,n} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{array} \right\}$$

que, para um problema particular, podem ser abreviados na forma

$$\{F\} \quad \{\delta\}$$



2. Métodos Matriciais

2.1. Notação

As forças generalizadas $\{F\}$ podem conter momentos fletores M e momentos torsões T , para além das forças e, nesse caso, o vetor dos deslocamentos generalizados $\{\delta\}$ inclui rotações θ .

Para uma estrutura completa, as forças e os deslocamentos nodais são relacionados através da matriz de rigidez $[K]$.

No geral, pode ver-se que

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (2.01)$$

onde $[K]$ é uma matriz simétrica com a forma

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.02)$$



2. Métodos Matriciais

2.1. Notação

O elemento k_{ij} (localizado na linha i e na coluna j) é conhecido como o coeficiente de influência da rigidez.

Note-se que $k_{ij} = k_{ji}$.

Depois de se construir a matriz de rigidez $[K]$, a solução completa de um problema segue-se pela utilização de métodos numéricos de álgebra, na maior parte dos casos com recurso a um computador.



2. Métodos Matriciais

2.2. Matriz de rigidez de uma mola elástica

A criação da matriz de rigidez $[K]$ é o passo mais importante de qualquer problema estrutural.

Mais tarde vai ver-se como a matriz de rigidez da estrutura completa pode ser montada a partir da rigidez de cada um dos seus elementos.

Primeiro vamos criar a matriz de rigidez para uma simples mola que apresenta muitas das características de um elemento estrutural real.

A mola com constante elástica k mostrada na *figura 2.01* está alinhada com o eixo x e suporta as forças $F_{x,1}$ e $F_{x,2}$ nos nós 1 e 2, respetivamente, onde os deslocamentos são u_1 e u_2 .

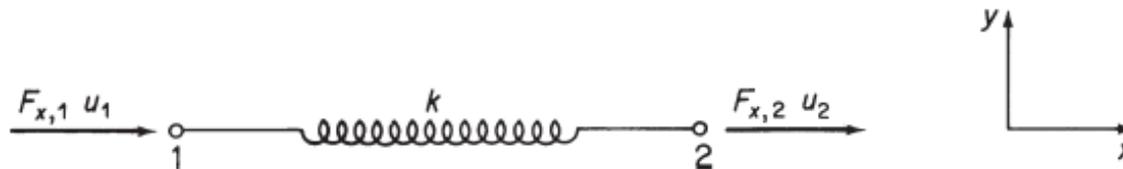


Figura 2.01
Determinação da matriz de rigidez para uma simples mola



2. Métodos Matriciais

2.2. Matriz de rigidez de uma mola elástica

A matriz de rigidez pode ser construída para este caso simples através do exame de estados diferentes dos deslocamentos nodais. Primeiro assume-se que o nó 2 está fixo de forma que $u_1=u_1$ e $u_2=0$. Assim,

$$F_{x,1} = ku_1$$

e, a partir do equilíbrio, pode ver-se que

$$F_{x,2} = -F_{x,1} = -ku_1 \quad (2.03)$$

O que indica que $F_{x,2}$ se tornou uma força de reação com sentido oposto a $F_{x,1}$.

Em segundo lugar, usamos o caso inverso onde $u_1=0$ e $u_2=u_2$.

Assim,

$$F_{x,2} = ku_2 = -F_{x,1} \quad (2.04)$$



2. Métodos Matriciais

2.2. Matriz de rigidez de uma mola elástica

Com a **sobreposição destas duas condições**, obtêm-se relações entre as forças aplicadas e os deslocamentos nodais para o caso em que $u_1 = u_1$ e $u_2 = u_2$.

Assim,

$$\begin{aligned} F_{x,1} &= ku_1 - ku_2 \\ F_{x,2} &= -ku_1 + ku_2 \end{aligned} \quad (2.05)$$

Escrevendo a *equação 2.05* na forma matricial, tem-se

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ F_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.06)$$

e comparando com a *equação 2.01*, vê-se que a matriz de rigidez deste elemento de mola é uma matriz simétrica 2x2 dada por

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (2.07)$$



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

Tendo em conta os resultados da secção anterior, pode usar-se inicialmente um processo idêntico para se obter a matriz de rigidez de um sistema de duas molas em série como o da *figura 2.02*.

Primeiro, suponha-se que $u_1 = u_1$ e $u_2 = u_3 = 0$.

Por comparação com o caso de uma mola, tem-se

$$F_{x,1} = k_a u_1 = -F_{x,2} \quad (2.08)$$

mas $F_{x,3} = 0$ pois $u_2 = u_3 = 0$.

Segundo, coloca-se $u_2 = u_2$ e $u_1 = u_3 = 0$.

Neste caso verifica-se que o movimento do nó 2 faz-se contra as rigidezes combinadas k_a e k_b .

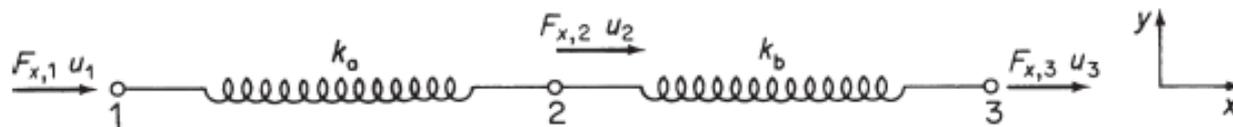


Figura 2.02 Matriz de rigidez de um sistema de duas molas.



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

Assim

$$\begin{aligned}F_{x,2} &= (k_a + k_b)u_2 \\F_{x,1} &= -k_a u_2 \\F_{x,3} &= -k_b u_2\end{aligned}\tag{2.09}$$

A força de reação $F_{x,1}$ ($=-k_a u_2$) não é afetada diretamente pelo facto de o nó 2 estar ligado ao nó 3 mas é determinada apenas pelo deslocamento do nó 2.

Pode concluir-se o mesmo para a força de reação $F_{x,3}$.

Finalmente, com $u_3 = u_3$ e $u_1 = u_2 = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned}F_{x,3} &= k_b u_3 = -F_{x,2} \\F_{x,1} &= 0\end{aligned}\tag{2.10}$$



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

Por **sobreposição dos três casos de deslocamento**, obtém-se para $u_1=u_1$, $u_2=u_2$ e $u_3=u_3$,

$$\begin{aligned}F_{x,1} &= k_a u_1 - k_a u_2 \\F_{x,2} &= -k_a u_1 + (k_a + k_b) u_2 - k_b u_3 \\F_{x,3} &= -k_b u_2 + k_b u_3\end{aligned}\quad (2.11)$$

Escrevendo a *equação 2.11* em forma matricial tem-se

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ F_{x,2} \\ F_{x,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}\quad (2.12)$$

Comparando a *equação 2.12* com a *equação 2.01* obtém-se a matriz de rigidez $[K]$ simétrica 3x3

$$[K] = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix}\quad (2.13)$$



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

É importante notar que a ordem da matriz de rigidez pode ser prevista com base no número de forças e deslocamentos nodais.

Por exemplo, a mola simples tem dois deslocamentos, logo a matriz de rigidez é 2×2 e a mola dupla em série tem três deslocamentos, logo a matriz de rigidez é 3×3 .

No caso geral, n deslocamentos (ou graus de liberdade) implicam uma matriz de rigidez $n \times n$.

A metodologia usada anteriormente para obter a matriz de rigidez torna-se demasiado trabalhosa para casos com muitas molas, pelo que um método mais simples é preferível.

Para o caso do sistema de duas molas em série pode ver-se que a matriz de rigidez é

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

O elemento k_{11} desta matriz relaciona a força no nó 1 com o deslocamento no nó 1.

Em geral o elemento k_{ij} relaciona a força no nó i com o deslocamento no nó j .

Assim, para o elemento que liga o nó 1 ao 2, pode escrever-se

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

e para o elemento que liga o nó 2 ao 3, tem-se

$$[K_{23}] = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

No presente caso a rigidez da mola que liga o nó 1 ao nó 2 é k_a e a que liga o nó 2 ao nó 3 é k_b .



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

Comparando a *equação 2.07* com as *2.15* e *2.16* pode escrever-se

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \quad (2.17a)$$

$$[K_{23}] = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \quad (2.17b)$$

Substituindo na *equação 2.14* obtém-se

$$[K] = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix}$$

que é igual à *equação 2.13*.

Pode ver-se que apenas k_{22} (relacionando a força no nó 2 com o deslocamento no nó 2) tem contribuições das duas molas.



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

Isto acontece porque o nó 2 está diretamente ligado aos nós 1 e 3, enquanto que os nós 1 e 3 só estão ligados diretamente ao nó 2.

Os elementos k_{13} e k_{31} são nulos porque os nós 1 e 3 não estão diretamente ligados e, por isso, não são afetados pelo deslocamento do outro.

A formação da matriz de rigidez para uma estrutura torna-se um procedimento simples de sobreposição das matrizes individuais de cada elemento.

O procedimento pode ser resumido da seguinte forma: os termos k_{ii} na diagonal principal consistem na soma das rigidezes de todos os elementos estruturais que se encontram no nó i enquanto os elementos fora da diagonal k_{ij} consistem na soma das rigidezes de todos os elementos que ligam o nó i ao nó j .



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

Uma análise da matriz de rigidez revela algumas propriedades da mesma:

- A soma dos elementos de qualquer coluna é zero, indicando que as condições de equilíbrio são satisfeitas
- Os elementos não nulos estão concentrados perto da diagonal principal
- Todos os termos da diagonal principal são positivos
- Forças nodais positivas produzem deslocamentos nodais positivos, de acordo com o comportamento físico de qualquer estrutura

Também se verifica que a matriz de rigidez da *equação 2.13* é singular (o determinante é nulo) e, como resultado, a sua inversa não existe.



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

Desta forma, o sistema de equações simultâneas para os deslocamentos nodais desconhecidos associado à matriz de rigidez não tem solução, pelo facto de não haver qualquer limitação nos deslocamentos u_1 , u_2 e u_3 .

Assim, a aplicação das forças externas resulta no movimento do sistema como um corpo rígido.

É necessário aplicar um número de condições de fronteira suficiente para permitir ao sistema manter-se estável sob o carregamento.

Neste problema particular, pode demonstrar-se o procedimento de solução assumindo que o nó 1 está fixo, $u_1=0$.



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

O primeiro passo é reescrever a *equação 2.12* na forma particionada

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ F_{x,2} \\ F_{x,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Na *equação 2.18*, $F_{x,1}$ é a reação desconhecida no nó 1, u_2 e u_3 são deslocamentos nodais desconhecidos, enquanto $F_{x,2}$ e $F_{x,3}$ são as forças aplicadas conhecidas.

Expandindo a *equação 2.18*, obtém-se

$$\{F_{x,1}\} = [-k_a \quad 0] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.19a)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{x,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a + k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.19b)$$



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

A inversão da *equação 2.19b* dá u_2 e u_3 em função de $F_{x,2}$ e $F_{x,3}$.
Substituindo estes valores na *equação 2.19a* obtém-se $F_{x,1}$.

Então

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a + k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{x,3} \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/k_a & 1/k_a \\ 1/k_a & 1/k_b + 1/k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{x,3} \end{Bmatrix}$$

Daqui,

$$\{F_{x,1}\} = \begin{bmatrix} -k_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/k_a & 1/k_a \\ 1/k_a & 1/k_b + 1/k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{x,3} \end{Bmatrix}$$



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

o que dá

$$F_{x,1} = -F_{x,2} - F_{x,3}$$

como seria de esperar devido ao equilíbrio.

Nos problemas onde as reações não são necessárias, as equações que relacionam as forças aplicadas conhecidas com os deslocamentos desconhecidos podem ser obtidas eliminando as linhas e colunas da matriz $[K]$ que correspondem a deslocamentos nulos.

Este procedimento elimina a necessidade de rearranjar as linhas e colunas na matriz de rigidez original quando os nós fixos não estão agrupados.



2. Métodos Matriciais

2.3. Matriz de rigidez de duas molas elásticas em série

Finalmente, as forças internas nas molas podem ser obtidas com as relações força-deslocamento de cada mola.

Assim, se S_a for a força na mola que liga os nós 1 e 2, então

$$S_a = k_a(u_2 - u_1)$$

De forma idêntica para a mola entre os nós 2 e 3, tem-se

$$S_b = k_b(u_3 - u_2)$$



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

A formação das matrizes de ridez de estruturas em treliça articuladas e a subsequente determinação dos deslocamentos nodais segue um procedimento idêntico ao descrito para o sistema de molas.

Um membro dessa estrutura assume-se como capaz de suportar forças axiais e obedece à relação única de força-deslocamento

$$F = \frac{AE}{L} \delta$$

onde F é a força axial no membro, δ é a variação do comprimento, A é a área da secção transversal, L é o comprimento sem carregamento e E é o módulo de elasticidade.



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

Esta expressão é equivalente às relações de deslocamento da mola das *equações 2.03 e 2.04*, pelo que se pode ver que a rigidez k de um membro é AE/L e a matriz de rigidez fica

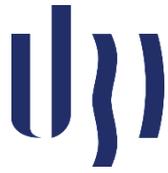
$$[K] = \begin{bmatrix} AE/L & -AE/L \\ -AE/L & AE/L \end{bmatrix}$$

ou

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Para um membro alinhado com o eixo x , que liga o nó i ao nó j e que está sujeito às forças nodais $F_{x,i}$ e $F_{x,j}$, tem-se a seguinte equação

$$\begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{x,j} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

Uma vez que os membros da treliça podem formar ângulos diferentes entre eles, é necessário modificar o procedimento visto anteriormente.

A *figura 2.03* mostra um membro da treliça inclinado um ângulo θ relativamente ao sistema de eixos de referência x, y .

Temos que nos referir ao elemento no sistema coordenado global quando se considera a estrutura completa.

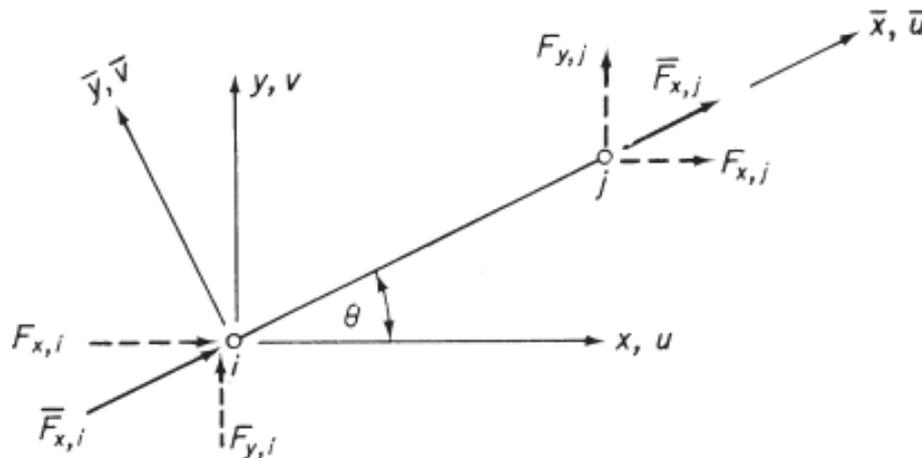


Figura 2.03 Sistemas coordenados local e global de um membro de uma estrutura em treliça articulada.



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

No entanto, usamos o sistema coordenado local \bar{x}, \bar{y} quando se considera um elemento individual.

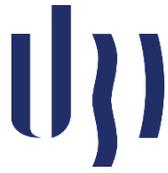
As forças e os deslocamentos nodais referentes às coordenadas locais escrevem-se \bar{F}, \bar{u} , etc., pelo que a *equação 2.21* fica, em coordenadas locais,

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x,i} \\ \bar{F}_{x,j} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

onde a matriz de rigidez escreve-se $[\bar{K}_{ij}]$.

Na *figura 2.03*, as forças externas $\bar{F}_{x,i}$ e $\bar{F}_{x,j}$ estão aplicadas nos nós i e j .

As forças $\bar{F}_{y,i}$ e $\bar{F}_{y,j}$ não existem uma vez que o elemento só suporta forças axiais.



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

No entanto, as forças $\bar{F}_{x,i}$ e $\bar{F}_{x,j}$ têm componentes $F_{x,i}$, $F_{x,j}$ e $F_{y,i}$, $F_{y,j}$, respectivamente, mostrando que duas forças locais resultam em quatro forças globais.

Assim, é necessário expandir a *equação 2.22* para estar consistente com as coordenadas globais, isto é

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x,i} \\ \bar{F}_{y,i} \\ \bar{F}_{x,j} \\ \bar{F}_{y,j} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Da *figura 2.03* vê-se que

$$\bar{F}_{x,i} = F_{x,i} \cos \theta + F_{y,i} \sin \theta$$

$$\bar{F}_{y,i} = -F_{x,i} \sin \theta + F_{y,i} \cos \theta$$



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

e que

$$\bar{F}_{x,j} = F_{x,j} \cos \theta + F_{y,j} \sin \theta$$

$$\bar{F}_{y,j} = -F_{x,j} \sin \theta + F_{y,j} \cos \theta$$

Escrevendo $\lambda = \cos \theta$ e $\mu = \sin \theta$, pode reescrever-se as equações acima na forma

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x,i} \\ \bar{F}_{y,i} \\ \bar{F}_{x,j} \\ \bar{F}_{y,j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

ou de forma abreviada

$$\{\bar{F}\} = [T]\{F\} \quad (2.25)$$

onde a matriz $[T]$ é a matriz de transformação.



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

Também existe uma relação idêntica para os deslocamentos nodais.

Assim, tem-se

$$\{\bar{\delta}\} = [T]\{\delta\} \quad (2.26)$$

Substituindo para $\{\bar{F}\}$ e $\{\bar{\delta}\}$ das *equações 2.25 e 2.26* na *equação 2.23*, obtém-se

$$[T]\{F\} = [\bar{K}_{ij}][T]\{\delta\}$$

Daqui,

$$\{F\} = [T]^{-1}[\bar{K}_{ij}][T]\{\delta\} \quad (2.27)$$

Pode verificar-se que a inversa da matriz de transformação é também a sua transposta e, assim, $[T]^{-1} = [T]^T$.

A *equação 2.27* fica

$$\{F\} = [T]^T[\bar{K}_{ij}][T]\{\delta\} \quad (2.28)$$



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

As forças nodais em coordenadas globais $\{F\}$ relacionam-se com os deslocamentos nodais correspondentes por

$$\{F\} = [K_{ij}]\{\delta\} \quad (2.29)$$

onde $[K_{ij}]$ é a matriz de rigidez do membro em coordenadas globais.

Comparando as equações 2.28 e 2.29, vê-se que

$$[K_{ij}] = [T]^T [\bar{K}_{ij}] [T]$$

Substituindo a definição de $[T]$ e a de $[\bar{K}_{ij}]$ tem-se

$$[K_{ij}] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Sabendo a orientação de cada membro, calcula-se λ e μ , e obtém-se a matriz de rigidez em coordenadas globais de cada membro.



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

Na *secção 2.3* obteve-se uma expressão para as forças internas numa mola.

Usando o mesmo raciocínio aplicado a cada membro da estrutura em treliça tem-se a força no elemento como

$$S_{ij} = \frac{AE}{L} (\bar{u}_j - \bar{u}_i) \quad (2.31)$$

onde

$$\bar{u}_i = \lambda u_i + \mu v_i$$

$$\bar{u}_j = \lambda u_j + \mu v_j$$

e

$$\bar{u}_j - \bar{u}_i = \lambda(u_j - u_i) + \mu(v_j - v_i)$$

Substituindo este resultado na *equação 2.31*, obtém-se

$$S_{ij} = \frac{AE}{L} [\lambda \quad \mu]_{ij} \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$



2. Métodos Matriciais

2.4. Análise matricial de estruturas em treliça articulada

Exemplo 2.01: Determinar as componentes horizontal e vertical das deflexões no nó 2 e as forças nos membros da estrutura em treliça articulada da *figura 2.04*. A rigidez axial AE é constante para todos os membros.

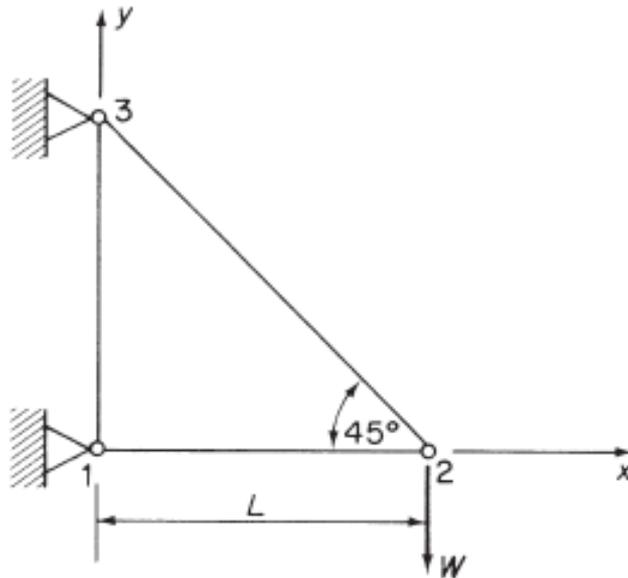


Figura 2.04 Estrutura em treliça articulada do exemplo 2.01.



2. Métodos Matriciais

2.5. Estruturas indeterminadas

Os métodos matriciais descritos anteriormente para a solução de sistemas de molas ou de treliças articuladas são gerais e, por isso, podem ser aplicados a qualquer problema estrutural.

Observa-se que no *exemplo 2.01* não surgem questões do grau de indeterminação da estrutura.

Problemas que envolvam estruturas estaticamente indeterminadas são resolvidos da mesma forma, sendo que as matrizes de rigidez dos membros redundantes são incluídos na matriz de rigidez completa como antes.



2. Métodos Matriciais

2.6. Análise matricial de estruturas espaciais (3D)

O procedimento para a análise matricial de estruturas 3D é idêntico ao caso das treliças 2D.

A diferença principal reside na transformação da matriz de rigidez dos membros das coordenadas locais para as coordenadas globais porque, como se pode ver na *figura 2.05*, as forças nodais $\bar{F}_{x,i}$ e $\bar{F}_{x,j}$ têm forças globais $F_{x,i}$, $F_{y,i}$, $F_{z,i}$ e $F_{x,j}$, $F_{y,j}$, $F_{z,j}$, respetivamente.

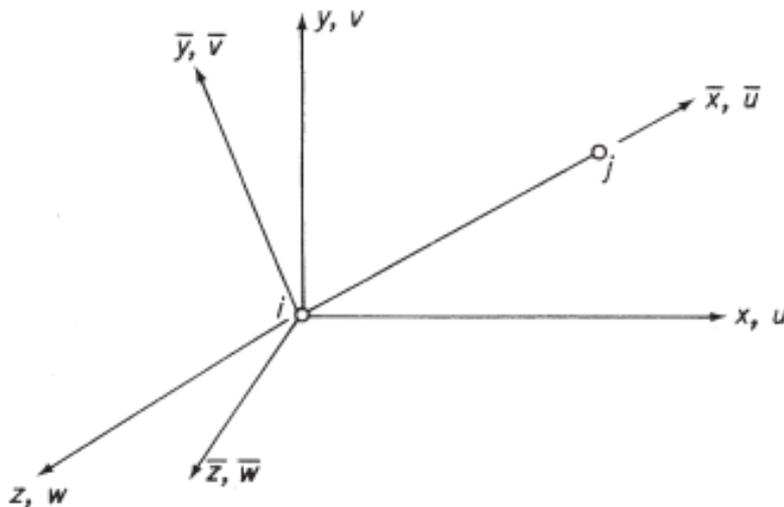


Figura 2.05 Sistemas local e global de um membro de uma estrutura articulada 3D.



2. Métodos Matriciais

2.6. Análise matricial de estruturas espaciais (3D)

A matriz de rigidez de um membro em coordenadas globais é de ordem 6x6, pelo que $[K_{ij}]$ da *equação 2.22* tem que ser expandida para a mesma ordem.

Assim,

$$[\bar{K}_{ij}] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Na *figura 2.05*, o membro ij tem comprimento L , área da secção transversal A e módulo elástico E .



2. Métodos Matriciais

2.6. Análise matricial de estruturas espaciais (3D)

Suponha-se que

$$\theta_{x\bar{x}} = \hat{\text{ângulo entre } x \text{ e } \bar{x}}$$

$$\theta_{x\bar{y}} = \hat{\text{ângulo entre } x \text{ e } \bar{y}}$$

⋮

$$\theta_{z\bar{y}} = \hat{\text{ângulo entre } z \text{ e } \bar{y}}$$

⋮

Então, as forças nodais nos dois sistemas de eixos relacionam-se da seguinte forma

$$\bar{F}_x = F_x \cos \theta_{x\bar{x}} + F_y \cos \theta_{x\bar{y}} + F_z \cos \theta_{x\bar{z}}$$

$$\bar{F}_y = F_x \cos \theta_{y\bar{x}} + F_y \cos \theta_{y\bar{y}} + F_z \cos \theta_{y\bar{z}} \quad (2.34)$$

$$\bar{F}_z = F_x \cos \theta_{z\bar{x}} + F_y \cos \theta_{z\bar{y}} + F_z \cos \theta_{z\bar{z}}$$



2. Métodos Matriciais

2.6. Análise matricial de estruturas espaciais (3D)

Se escrevermos

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}} &= \cos \theta_{x\bar{x}}, & \lambda_{\bar{y}} &= \cos \theta_{y\bar{y}}, & \lambda_{\bar{z}} &= \cos \theta_{z\bar{z}} \\ \mu_{\bar{x}} &= \cos \theta_{y\bar{x}}, & \mu_{\bar{y}} &= \cos \theta_{x\bar{y}}, & \mu_{\bar{z}} &= \cos \theta_{z\bar{y}} \\ \nu_{\bar{x}} &= \cos \theta_{z\bar{x}}, & \nu_{\bar{y}} &= \cos \theta_{z\bar{y}}, & \nu_{\bar{z}} &= \cos \theta_{z\bar{z}}\end{aligned}\tag{2.35}$$

então

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x,i} \\ \bar{F}_{y,i} \\ \bar{F}_{z,i} \\ \bar{F}_{x,j} \\ \bar{F}_{y,j} \\ \bar{F}_{z,j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{z,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \\ F_{z,j} \end{Bmatrix}\tag{2.36}$$

ou na forma abreviada

$$\{\bar{F}\} = [T]\{F\}$$



2. Métodos Matriciais

2.6. Análise matricial de estruturas espaciais (3D)

A matriz de rigidez fica

$$[K_{ij}] = [T]^T [\bar{K}_{ij}] [T]$$

Substituindo para $[T]$ e $[\bar{K}_{ij}]$ das equações 2.36 e 2.33, obtém-se

$$[K_{ij}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}}^2 & \lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\lambda_{\bar{x}}^2 & -\lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & -\lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} \\ \lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}^2 & \mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}}^2 & -\mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} \\ \lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}}^2 & -\lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\nu_{\bar{x}}^2 \\ -\lambda_{\bar{x}}^2 & -\lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & -\lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}^2 & \lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} \\ -\lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}}^2 & -\mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}^2 & \mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} \\ -\lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\nu_{\bar{x}}^2 & \lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}}^2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$



2. Métodos Matriciais

2.6. Análise matricial de estruturas espaciais (3D)

Todos os subscritos da *equação 2.37* são \bar{x} , pelo que se pode simplificar a equação

$$[K_{ij}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu & -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu \\ \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu & -\lambda\mu_{\bar{x}} & -\mu^2 & -\mu\nu \\ \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 & -\lambda\nu & -\mu\nu & -\nu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu & \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & -\mu\nu & \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu \\ -\lambda\nu & -\mu\nu & -\nu^2 & \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

onde λ , μ e ν são os cossenos diretores entre os eixos x , y , z e o eixo \bar{x} , respetivamente.

Note-se que esta matriz é simétrica, tal como nos casos anteriores.

A matriz de rigidez da estrutura 3D completa obtém-se através da sobreposição das matrizes de todos os membros.



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

Até agora foram vistas estruturas com membros capazes de resistir apenas a forças axiais.

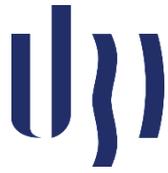
No entanto, muitas estruturas consistem em arranjos de vigas em que cada membro resiste a forças de corte e momentos fletores para além das forças axiais.

Vamos derivar a matriz de rigidez de uma viga uniforme e considerar a solução de estruturas rígidas formadas por arranjos de vigas.

A *figura 2.06* mostra um elemento tipo viga ij com rigidez de flexão EI e comprimento L sujeito a forças nodais $F_{y,i}$, $F_{y,j}$ e momentos M_i , M_j no plano xy .

A viga sofre deslocamentos nodais v_i , v_j e rotações θ_i e θ_j .

Não se incluem as forças axiais, uma vez que o seu efeito já foi determinado anteriormente.



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

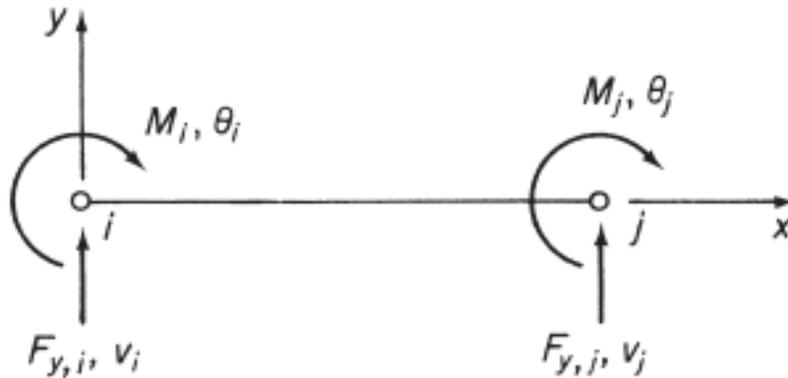


Figura 2.06 Forças e momentos num elemento tipo viga.

A matriz de rigidez $[K_{ij}]$ pode ser construída considerando vários estados defletidos da viga e sobrepondo os resultados, como se fez inicialmente para o sistema de molas.

Alternativamente, pode escrever-se diretamente a partir das relações declive-deflexão da viga.



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

A partir da teoria de declive-deflexão, tem-se

$$M_i = -\frac{6EI}{L^2}v_i + \frac{4EI}{L}\theta_i + \frac{6EI}{L^2}v_j + \frac{2EI}{L}\theta_j \quad (2.39)$$

$$M_j = -\frac{6EI}{L^2}v_i + \frac{2EI}{L}\theta_i + \frac{6EI}{L^2}v_j + \frac{4EI}{L}\theta_j \quad (2.40)$$

Considerando o equilíbrio vertical, tem-se

$$F_{y,i} + F_{y,j} = 0 \quad (2.41)$$

e para o equilíbrio de momentos em torno do nó j , tem-se

$$F_{y,i}L + M_i + M_j = 0 \quad (2.42)$$

Assim, a solução das equações 2.39 a 2.42 dá

$$-F_{y,i} = F_{y,j} = -\frac{12EI}{L^3}v_i + \frac{6EI}{L^2}\theta_i + \frac{12EI}{L^3}v_j + \frac{6EI}{L^2}\theta_j \quad (2.43)$$



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

Escrevendo as *equações 2.39, 2.40 e 2.43* na forma matricial dá

$$\begin{Bmatrix} F_{y,i} \\ M_i \\ F_{y,j} \\ M_j \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

ou seja

$$\{F\} = [K_{ij}]\{\delta\}$$

onde $[K_{ij}]$ é a matriz de rigidez da viga.



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

É possível escrever a *equação 2.44* numa forma alternativa

$$\begin{Bmatrix} F_{y,i} \\ M_i/L \\ F_{y,j} \\ M_j/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i L \\ v_j \\ \theta_j L \end{Bmatrix}$$

que é particularmente útil quando, em cálculos numéricos, se faz a montagem de várias vigas com EI/L^3 constante.

A *equação 2.44* foi derivada para uma viga cujo eixo está alinhado com o eixo x , pelo que, de facto, a matriz da *equação 2.44* é $[\bar{K}_{ij}]$, a matriz de rigidez em eixos locais.

No caso de a viga estar no plano xy com um ângulo de inclinação relativamente ao eixo x , é necessário transformar a matriz para eixos globais.



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

Assim, primeiro é necessário expandir a matriz para permitir ter-se os deslocamentos \bar{u}_i e \bar{u}_j , que apesar de serem irrelevantes em coordenadas locais têm as componentes u_i , v_i e u_j , v_j em coordenadas globais.

Então

$$[\bar{K}_{ij}] = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

Podemos deduzir uma matriz de transformação a partir da *equação 2.24*, observando que u e v se transformam da mesma maneira que no caso das estruturas em treliça articuladas e que as rotações θ permanecem inalteradas.

Assim

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

onde $\lambda = \cos \theta$ e $\mu = \sin \theta$.



2. Métodos Matriciais

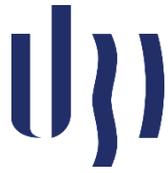
2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

Então, lembrando que

$$[K_{ij}] = [T]^T [\bar{K}_{ij}] [T]$$

tem-se

$$[K_{ij}] = EI \begin{bmatrix} \frac{12\mu^2}{L^3} & -\frac{12\lambda\mu}{L^3} & \frac{6\mu}{L^2} & -\frac{12\mu^2}{L^3} & \frac{12\lambda\mu}{L^3} & \frac{6\mu}{L^2} \\ \frac{12\lambda\mu}{L^3} & \frac{12\lambda^2}{L^3} & -\frac{6\lambda}{L^2} & \frac{12\lambda\mu}{L^3} & -\frac{12\lambda^2}{L^3} & -\frac{6\lambda}{L^2} \\ \frac{6\mu}{L^2} & -\frac{6\lambda}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6\mu}{L^2} & \frac{6\lambda}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{12\mu^2}{L^3} & \frac{12\lambda\mu}{L^3} & -\frac{6\mu}{L^2} & \frac{12\mu^2}{L^3} & -\frac{12\lambda\mu}{L^3} & -\frac{6\mu}{L^2} \\ \frac{12\lambda\mu}{L^3} & -\frac{12\lambda^2}{L^3} & \frac{6\lambda}{L^2} & -\frac{12\lambda\mu}{L^3} & \frac{12\lambda^2}{L^3} & \frac{6\lambda}{L^2} \\ \frac{6\mu}{L^2} & -\frac{6\lambda}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6\mu}{L^2} & \frac{6\lambda}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

A matriz de rigidez para a estrutura completa é montada a partir das matrizes de cada membro, as condições de fronteira são aplicadas e o sistema de equações resultante é resolvido para os deslocamentos nodais desconhecidos.

As forças de corte e os momentos fletores internos numa viga são obtidos a partir dos deslocamentos nodais calculados.

Para uma viga com nós i e j , obtêm-se os valores de v_i , θ_i e v_j , θ_j .

As forças nodais $F_{y,i}$ e M_i são depois obtidas pela *equação 2.44* se a viga estiver alinhada com o eixo x .

Assim

$$F_{y,i} = EI \left(\frac{12}{L^3} v_i - \frac{6}{L^2} \theta_i - \frac{12}{L^3} v_j - \frac{6}{L^2} \theta_j \right) \quad (2.48a)$$

$$M_i = EI \left(-\frac{6}{L^2} v_i + \frac{4}{L} \theta_i + \frac{6}{L^2} v_j + \frac{2}{L} \theta_j \right) \quad (2.48b)$$



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

Expressões idênticas são obtidas para as forças no nó j .

Da *figura 2.06* pode ver-se que a força de corte S_y e o momento fletor M na viga são dadas por

$$S_y = F_{y,i} \quad (2.49a)$$

$$M = F_{y,i}x + M_i \quad (2.49b)$$

Substituindo as *equações 2.48* nas *equações 2.49* e escrevendo na forma matricial, tem-se

$$\begin{Bmatrix} S_y \\ M \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2}x + \frac{4}{L} & -\frac{12}{L^3}x + \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2}x + \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$



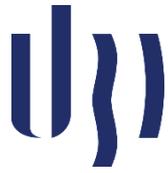
2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

A análise matricial da viga da *figura 2.06* baseia-se na condição que as forças externas estão aplicadas nos nós.

Obviamente, em casos práticos a viga suporta uma variedade de carregamentos ao longo do seu comprimento, pelo que essas vigas têm que ser idealizadas num conjunto de elementos tipo viga para os quais essa condição é verdade.

A idealização é feita simplesmente especificando nós nos pontos ao longo da viga de forma que os elementos entre nós adjacentes só suportem forças de corte uniformes e momentos fletores lineares.



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

Por exemplo, a viga da *figura 2.07* é idealizada em elementos tipo viga 1-2, 2-3 e 3-4 em que os deslocamentos desconhecidos são v_2 , θ_2 , θ_3 , v_4 e θ_4 ($v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$).

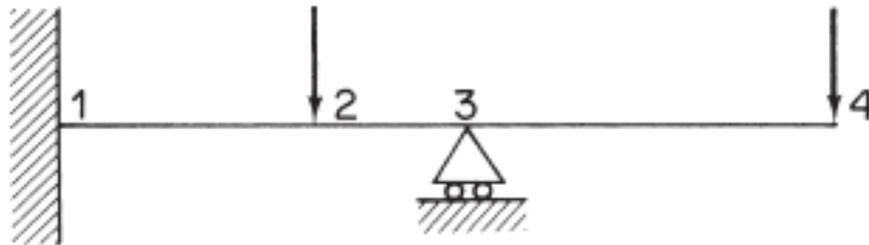
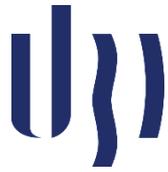


Figura 2.07 Idealização de uma viga em elementos tipo viga.

A vigas com carregamentos distribuídos necessitam que os carregamento distribuído seja substituído por uma série de forças estaticamente equivalentes num dado conjunto de nós.

Obviamente, quanto maior for o número de nós selecionado mais preciso e mais complicado será o problema, resultando em mais tempo de cálculo.



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

A *figura 2.08* mostra uma idealização típica de uma viga com um carregamento uniformemente distribuído.

Muitos problemas simples podem ser idealizados numa combinação de dois elementos tipo viga e três nós.

Alguns exemplos são mostrados na *figura 2.09*.

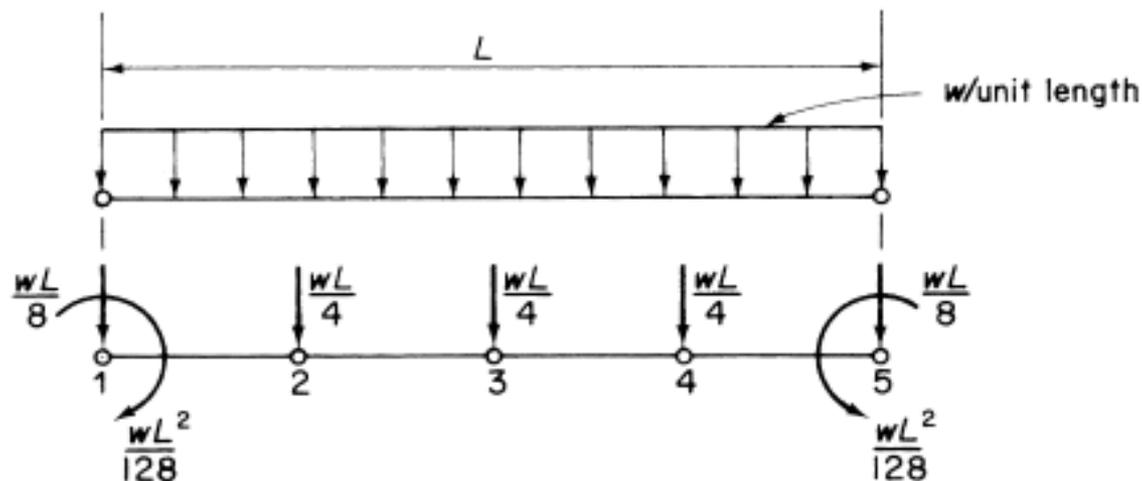


Figura 2.08 Idealização de uma viga com carregamento uniformemente distribuído.



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

Se montarmos a matriz de rigidez para o caso geral de um sistema de dois elementos tipo viga, pode resolver-se uma variedade de problemas introduzindo simplesmente o carregamento e as condições de fronteira adequados.

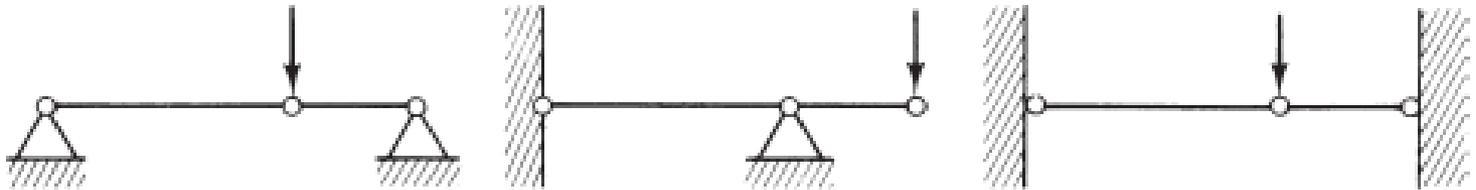


Figura 2.09 Idealização de vigas em elementos tipo viga.

Considere-se a montagem de dois elementos tipo viga da *figura 2.10*.



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

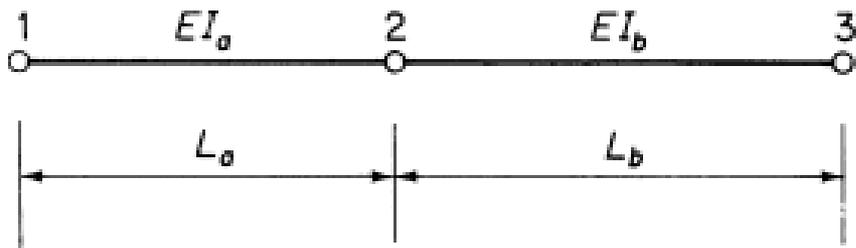


Figura 2.10 Montagem de dois elementos tipo viga.

As matrizes de rigidez dos elementos 1-2 e 2-3 são obtidas da equação 2.44.

$$[K_{12}] = EI_a \left[\begin{array}{cc|cc} 12/L_a^3 & -6/L_a^2 & -12/L_a^3 & -6/L_a^2 \\ -6/L_a^2 & 4/L_a & 6/L_a^2 & 2/L_a \\ \hline -12/L_a^3 & 6/L_a^2 & 12/L_a^3 & 6/L_a^2 \\ -6/L_a^2 & 2/L_a & 6/L_a^2 & 4/L_a \end{array} \right] \quad (2.51)$$

$$[K_{23}] = EI_b \left[\begin{array}{cc|cc} 12/L_b^3 & -6/L_b^2 & -12/L_b^3 & -6/L_b^2 \\ -6/L_b^2 & 4/L_b & 6/L_b^2 & 2/L_b \\ \hline -12/L_b^3 & 6/L_b^2 & 12/L_b^3 & 6/L_b^2 \\ -6/L_b^2 & 2/L_b & 6/L_b^2 & 4/L_b \end{array} \right] \quad (2.52)$$



2. Métodos Matriciais

2.7. Matriz de rigidez de uma viga uniforme

Exemplo 2.02: Determinar os deslocamentos nodais e as forças na viga da *figura 2.11*. A viga tem secção uniforme.

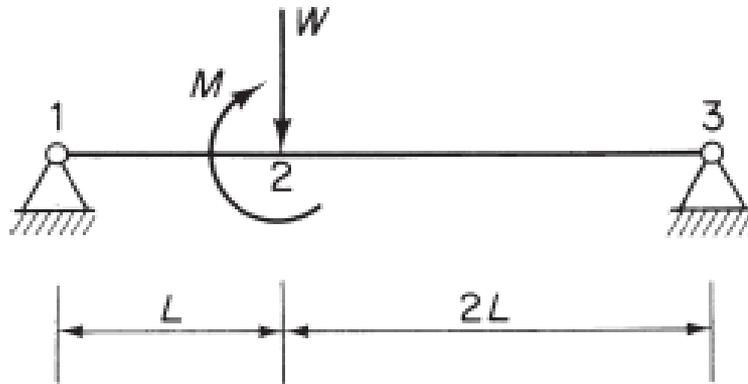
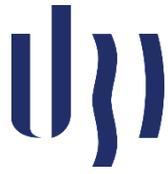


Figura 2.11 Viga do exemplo 2.02.



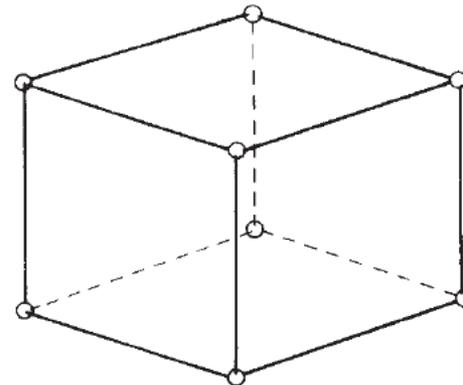
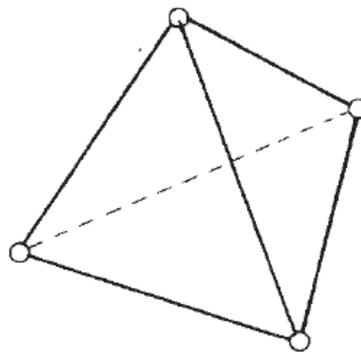
3. Método dos Elementos Finitos

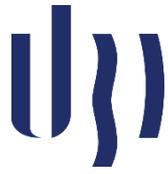
- As equações de governo de um sistema físico assumem normalmente a forma de equações diferenciais que expressam algum dos três princípios físicos fundamentais: a conservação da massa, a quantidade de movimento ou o balanço das trocas energéticas entre o sistema e o ambiente;
- Os estímulos externos representam condições de carregamento associadas a forças, temperaturas, campos elétricos, entre outras grandezas, as quais, interagindo com o sistema, provocam uma alteração do seu estado de equilíbrio;
- Dentro do contexto das condições de carregamento, deveremos também considerar condições de fronteira representadas por equações particulares válidas, apenas, na fronteira do sistema.



3. Método dos Elementos Finitos

- O método dos elementos finitos (MEF) baseia-se na discretização do domínio do sistema físico em pequenas partições adjacentes, de tamanho mais ou menos reduzido, a que chamamos ***elementos finitos***;
- A morfologia dos elementos finitos deverá ser simples e adequada à representação da geometria do componente que se pretende modelar, podendo assumir a forma de triângulos ou quadriláteros, num contexto bidimensional (2D), ou tetraedros e prismas no caso tridimensional (3D) (ver figura);





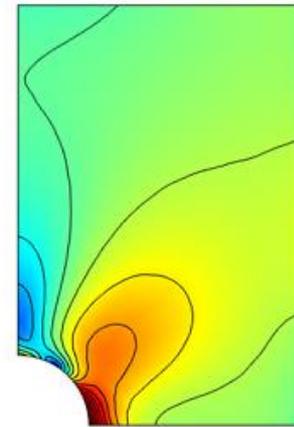
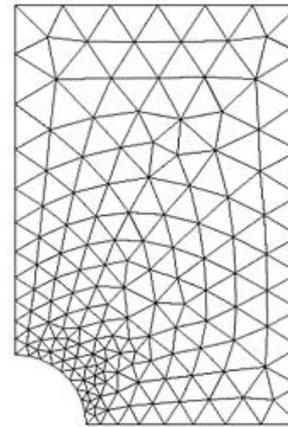
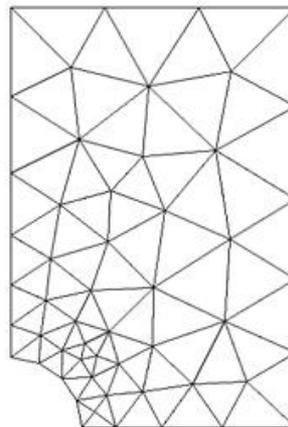
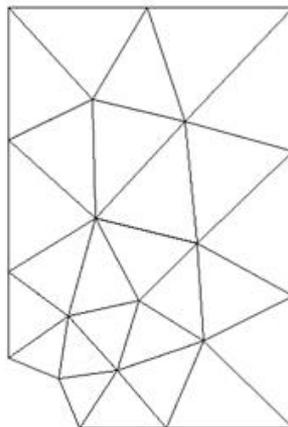
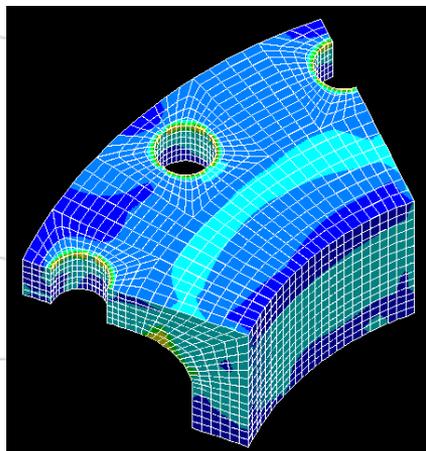
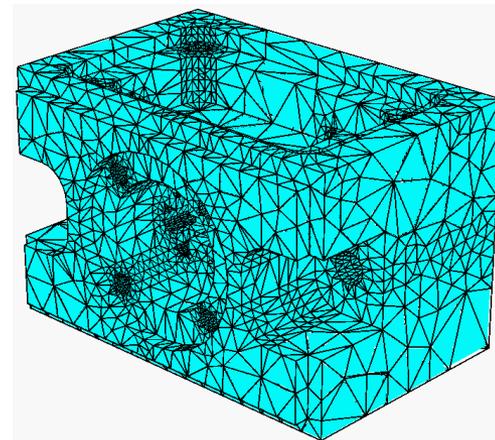
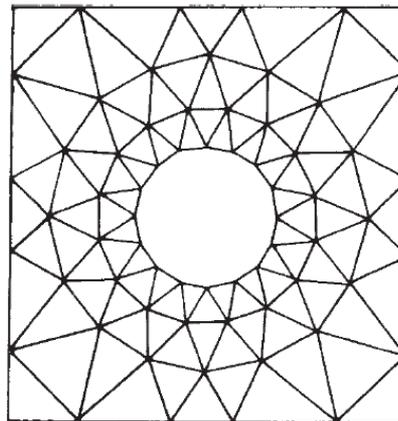
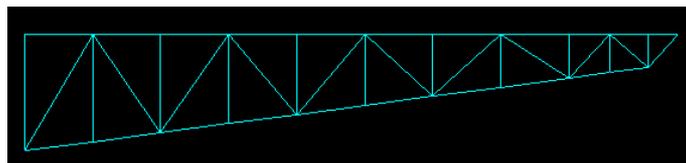
3. Método dos Elementos Finitos

- O conjunto total de elementos finitos necessários para a construção do modelo pretendido constitui a **malha** que será usada na simulação computacional;
- A precisão dos resultados obtidos pelo MEF dependerá do nível de refinamento da malha de elementos necessário para a discretização de pontos concretos onde as condições de campo devem ser satisfeitas;
- Malhas mais finas levam a resultados mais precisos, mas implicam maiores tempos e recursos de computação;
- Habitualmente, estruturam-se as malhas de elementos com um nível de refinamento gradativo em função das condições de carregamento e geométricas do componente (por exemplo, distribuição de tensões em torno de um furo).



3. Método dos Elementos Finitos

Exemplos de malhas:





3. Método dos Elementos Finitos

- As equações de governo são transformadas em equações algébricas menos complexas válidas no contexto de cada elemento, permitindo uma representação aproximada do fenómeno físico que se pretende simular;
- Os termos pertencentes a estas equações algébricas são, posteriormente, numericamente avaliados em cada elemento, obtendo-se um grande conjunto de valores agrupados, normalmente, de forma matricial;
- O MEF é, por isso, indicado para um ambiente computacional, já que, através de rotinas informáticas adequadas, se poderão resolver simultaneamente sistemas de equações complexos de forma célere.



3. Método dos Elementos Finitos

- As variáveis de campo pretendidas para análise (deslocamentos, tensões, temperaturas, etc.) são obtidas em cada elemento através de uma técnica de interpolação polinomial incidente sobre pontos específicos do elemento, a que chamamos **nós**.
- Os nós estão, habitualmente, localizados nas extremidades de cada elemento, embora possam ser definidos noutras posições (mesmo a nível interno do elemento) quando se pretendem polinómios de ordem superior de modo a alcançar melhores níveis de precisão de resultados.



3. Método dos Elementos Finitos

- Existem vários tipos de elementos finitos que podem ser utilizados na construção de um modelo físico.
- No entanto, os elementos do tipo *isoparamétrico* são frequentemente utilizados devido ao bom compromisso obtido entre a precisão de resultados e o esforço computacional exigido;
- Os elementos isoparamétricos permitem a tradução de geometrias mais complexas, tais como superfícies curvas, devido à sua aptidão para assumirem formas distorcidas graças à colocação de nós em pontos específicos das suas arestas;
- Quando se pretende efetuar uma simulação 3D, deverão considerar-se elementos isoparamétricos hexaédricos que terão uma forma equivalente a um “tijolo” (*brick*).



3. Método dos Elementos Finitos

- A figura abaixo ilustra três tipos de elementos isoparamétricos planos com diferentes posições de nós, os quais possibilitam, respetivamente, a representação de funções do tipo linear, quadrático ou cúbico.

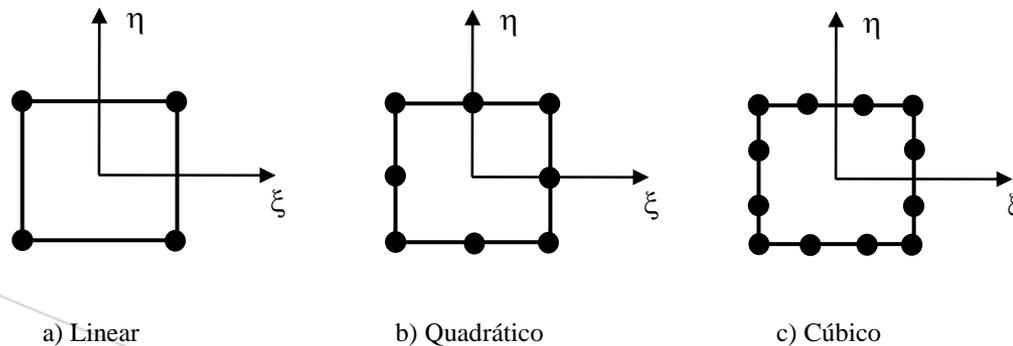


Figura 2.12 Ordens diferentes de elementos quadrilaterais.



3. Método dos Elementos Finitos

3.1. Tipos de elementos finitos

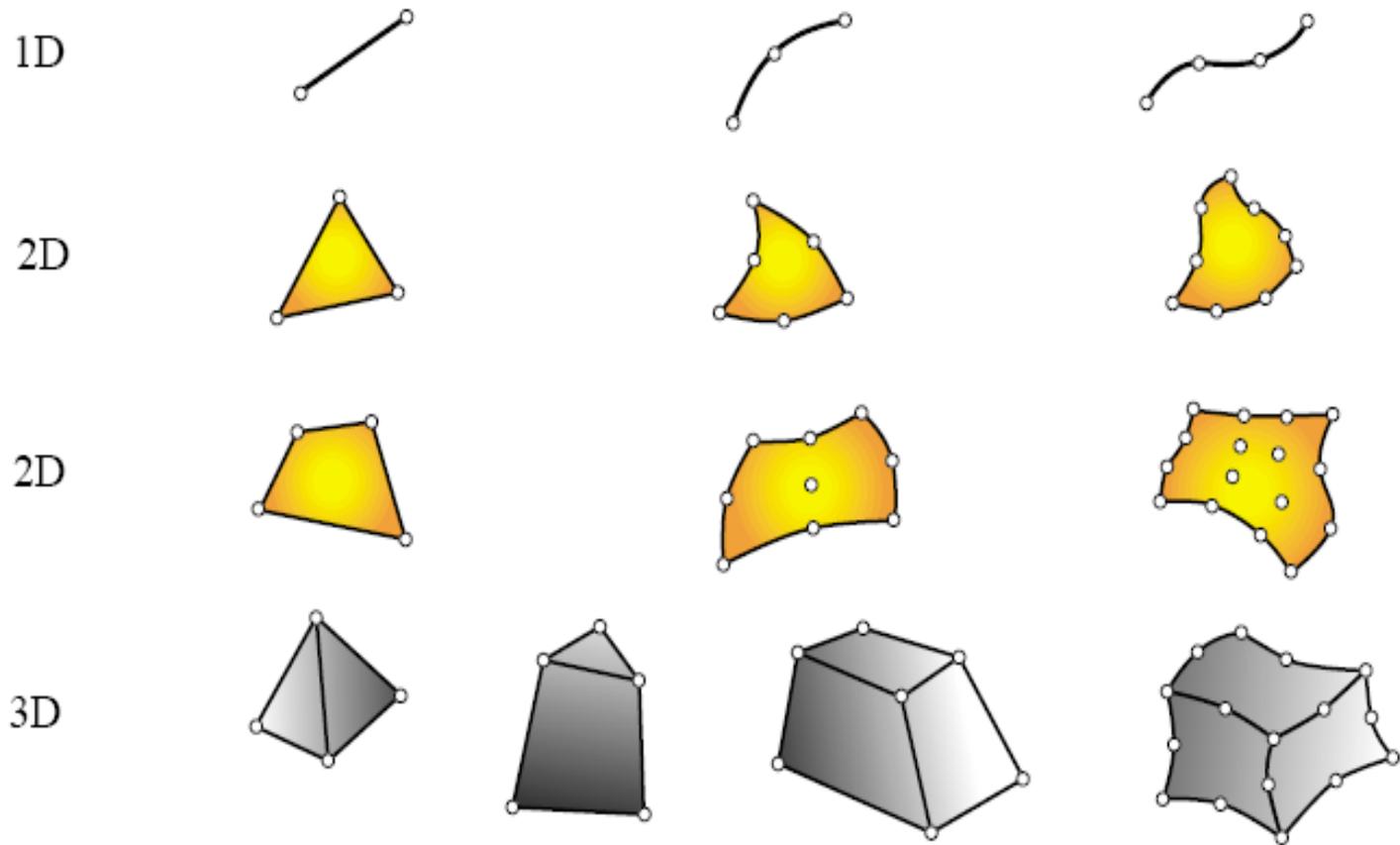


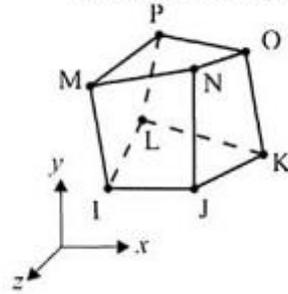
Figura 2.13 Tipos de elementos.



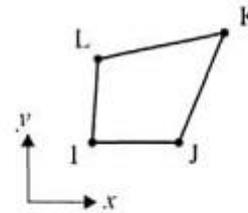
3. Método dos Elementos Finitos

3.1. Tipos de elementos finitos

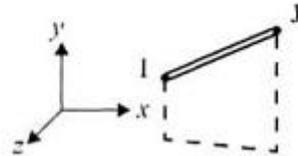
SOLID45 - 3-D BRICK
(DOF: UX, UY, UZ)



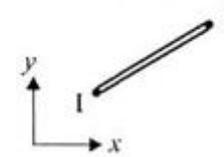
PLANE42 - 2-D PLANE
(DOF: UX, UY)



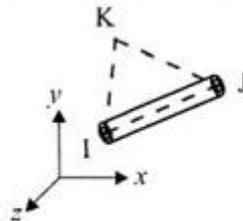
LINK8 - 3-D SPAR
(DOF: UX, UY, UZ)



BEAM3 - 2-D BEAM
(DOF: UX, UY, ROTZ)



PIPE16 - 3-D STRAIGHT PIPE
(DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ)



SHELL63 - 3-D SHELL
(DOF: UX, UY, UZ,
ROTX, ROTY, ROTZ)

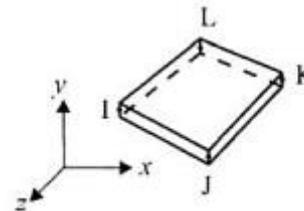
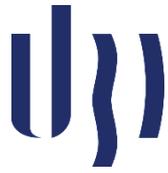


Figura 2.14 Elementos típicos.



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Passo 1

Começa-se por escolher um sistema coordenado e um sistema de numeração adequado para o elemento e por definir os vetores de deslocamento $\{\delta^e\}$ e de força $\{F^e\}$.

O sobrescrito e usado nestes vetores indica elemento, uma vez que em geral um elemento finito possui mais do que dois nós.

Não estamos interessados em deslocamentos axiais, pelo que para o elemento tipo viga da *figura 2.14*, tem-se

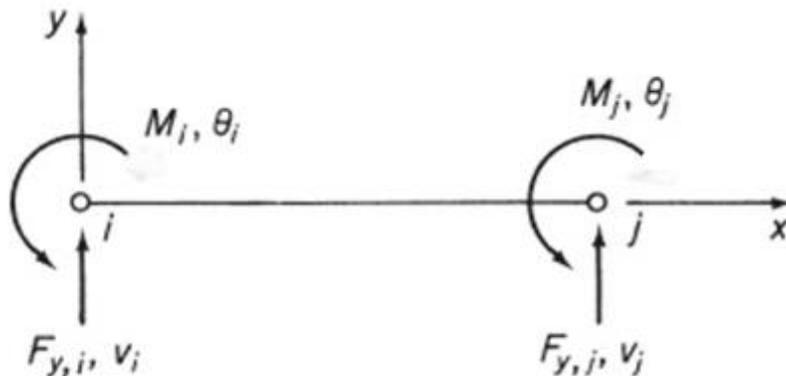


Figura 2.14 Forças e momentos num elemento tipo viga.



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_{y,i} \\ M_i \\ F_{y,j} \\ M_j \end{Bmatrix}$$

Uma vez que cada um destes vetores contém quatro elementos, a matriz de rigidez $[K^e]$ tem ordem 4x4.

Passo 2

No segundo passo, escolhe-se a função de deslocamento que define de forma única os deslocamentos de todos os pontos no elemento viga em função dos deslocamentos nodais.



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Esta função de deslocamento pode ser um polinómio que tem que ter quatro constantes arbitrárias, correspondendo aos quatro graus de liberdade nodais.

Assim

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (2.54a)$$

A equação 2.54a tem a mesma forma que aquela que se obtém usando a teoria elementar de flexão de uma viga sujeita a forças e momentos concentrados e pode se escrita na forma

$$\{v(x)\} = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (2.54b)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

ou em forma abreviada

$$\{v(x)\} = [f(x)]\{\alpha\} \quad (2.55)$$

A rotação θ em qualquer secção do elemento viga é dada por $\partial v / \partial x$, logo

$$\theta(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3x + 3\alpha_4x^2 \quad (2.56)$$

Das equações 2.54 e 2.56, podemos escrever expressões para os deslocamentos nodais v_i , θ_i e v_j , θ_j em $x=0$ e $x=L$, respetivamente.

Assim,

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \alpha_1 \\ \theta_i &= \alpha_2 \\ v_j &= \alpha_1 + \alpha_2L + \alpha_3L^2 + \alpha_4L^3 \\ \theta_j &= \alpha_2 + 2\alpha_3L + 3\alpha_4L^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Escrevendo a *equação 2.57* em forma de matriz dá

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

ou

$$\{\delta^e\} = [A] \{\alpha\} \quad (2.59)$$

Passo 3

O terceiro passo segue diretamente das *equações 2.58* e *2.55*, dado que se pretende exprimir o deslocamento de cada ponto do elemento viga em função dos deslocamentos nodais



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Usando a *equação 2.59* obtém-se

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (2.60)$$

Substituindo na *equação 2.55* dá

$$\{v(x)\} = [f(x)][A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (2.61)$$

onde $[A]^{-1}$ é obtida invertendo $[A]$ na *equação 2.58* e é igual a

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Passo 4

No passo quatro relaciona-se a extensão $\{\varepsilon(x)\}$ em qualquer ponto x no elemento com o deslocamento $\{v(x)\}$ e por sua vez com os deslocamentos nodais $\{\mathcal{D}\}$.

Uma vez que estamos interessados apenas nas deformações de flexão, podemos representar a extensão com a curvatura $\partial^2 v / \partial x^2$.

Assim,

$$\frac{\partial v^2}{\partial x^2} = 2\alpha_3 + 6\alpha_4 x \quad (2.63)$$

ou na forma de matriz

$$\{\varepsilon(x)\} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

que se pode escrever na forma

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\alpha\} \quad (2.65)$$

Substituindo para $\{\alpha\}$ na *equação 2.65* usando a *equação 2.60*, tem-se

$$\{\varepsilon\} = [C][A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (2.66)$$

Passo 5

O passo cinco relaciona as tensões no elemento com as extensões e daqui, usando a *equação 2.66*, com os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$.

No elemento viga, a distribuição de tensão em qualquer secção depende inteiramente do valor do momento fletor M nessa secção.



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Assim, pode representar-se um “estado de tensão” $\{\sigma\}$ em qualquer secção através do momento fletor que, da teoria fundamental da viga, é dado por

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

ou

$$\{\sigma\} = [EI] \{\epsilon\} \quad (2.67)$$

que se pode escrever na forma

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (2.68)$$

A matriz $[D]$ na *equação 2.68* é a matriz de “elasticidade” que relaciona as “tensões” e as extensões.



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Neste caso, $[D]$ consiste apenas num único termo, a rigidez à flexão EI da viga.

Geralmente, $[D]$ tem mais termos.

Substituindo $\{\varepsilon\}$ da *equação 2.66* na *equação 2.68*, obtém-se a “tensão” em termos dos deslocamentos nodais

$$\{\sigma\} = [D][C][A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (2.69)$$

Passo 6

A matriz de rigidez final do elemento é obtida no passo seis, onde substituímos as “tensões” internas $\{\sigma\}$ por um sistema estaticamente equivalente $\{F^e\}$, relacionando assim as forças nodais com os deslocamentos nodais e definindo a matriz de rigidez do elemento $[K^e]$.



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Consegue-se isto aplicando o princípio do valor estacionário da energia potencial da viga, que engloba a energia de extensão interna U e a energia potencial V das forças nodais.

Assim,

$$U + V = \frac{1}{2} \int_{vol} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d(vol) - \{\delta^e\}^T \{F^e\} \quad (2.70)$$

Substituindo para $\{\varepsilon\}$ da *equação 2.66* e para $\{\sigma\}$ da *equação 2.69*, tem-se

$$U + V = \frac{1}{2} \int_{vol} \{\delta^e\}^T [A^{-1}]^T [C]^T [D] [C] [A]^{-1} \{\delta^e\} d(vol) - \{\delta^e\}^T \{F^e\} \quad (2.71)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

A energia potencial total tem um valor estacionário (mínimo) relativamente aos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}^T$; assim

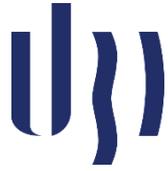
$$\frac{\partial(U + V)}{\partial(\delta^e)} = \int_{vol} [A^{-1}]^T [C]^T [D] [C] [A]^{-1} \{\delta^e\} d(vol) - \{F^e\} = 0 \quad (2.72)$$

de onde se obtém

$$\{F^e\} = \left[\int_{vol} [A^{-1}]^T [C]^T [D] [C] [A]^{-1} d(vol) \right] \{\delta^e\} \quad (2.73)$$

ou, escrevendo $[C][A^{-1}] = [B]$, tem-se

$$\{F^e\} = \left[\int_{vol} [B]^T [D] [B] d(vol) \right] \{\delta^e\} \quad (2.74)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Daqui pode ver-se claramente que a matriz de rigidez é

$$[K^e] = \left[\int_{vol} [B]^T [D] [B] d(vol) \right] \quad (2.75)$$

Das equações 2.62 e 2.64 tem-se

$$[B] = [C][A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

e

$$[B] = \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \quad (2.76)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

Então

$$[K^e] = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

e, finalmente,

$$[K^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

A equação 2.77 é idêntica à matriz de rigidez da viga uniforme (equação 2.44).

Passo 7

Finalmente, no passo sete, relacionam-se as “tensões” internas do elemento com os deslocamentos nodais.

Isto já foi obtido anteriormente na equação 2.69

$$\{\sigma\} = [D][C][A]^{-1} \{\delta^e\}$$

ou na forma

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (2.78)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.2. Matriz de rigidez de um elemento tipo viga

A equação 2.78 é escrita usualmente na seguinte forma

$$\{\sigma\} = [H]\{\delta^e\} \quad (2.79)$$

onde $[H]=[D][B]$ é a matriz tensão-deslocamento.

Para o caso particular do elemento viga $[D]=EI$ e $[B]$ está definido na equação 2.76.

Assim,

$$[H] = [EI] \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Os elementos finitos triangulares são usados na solução de problemas de tensão plana ou de extensão plana.

A sua vantagem relativamente a elementos com outra geometria reside na sua capacidade de representar geometrias de fronteira irregulares com relativa simplicidade.

Na derivação da matriz de rigidez, adota-se o procedimento passo-a-passo.

Passo 1

Inicialmente, adota-se um sistema de eixos e de numeração dos nós para o elemento e definem-se os vetores de deslocamentos e forças nodais.



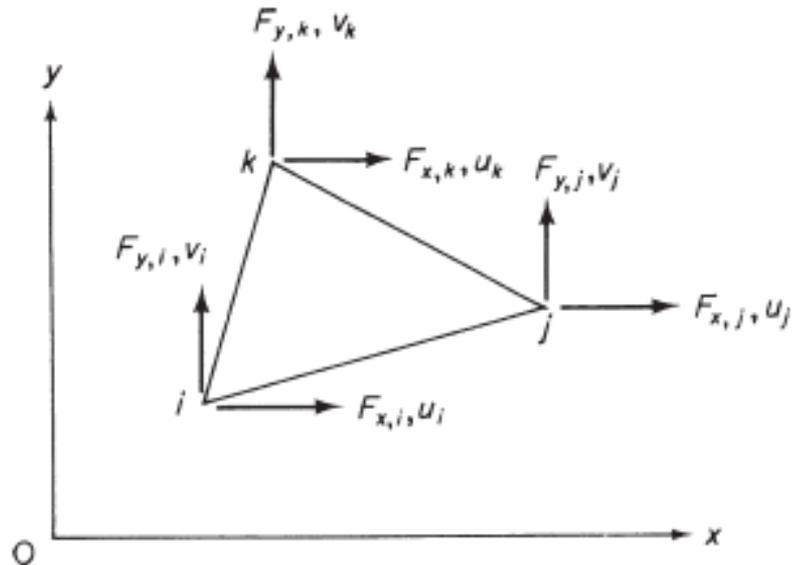
3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

A *figura 2.15* mostra um elemento triangular referente aos eixos Oxy com nós i, j e k definidos no sentido anti-horário.

O elemento será usado em problemas de elasticidade plana e, por isso, tem dois graus de liberdade por nó, resultando em seis graus de liberdade para o elemento e numa matriz de rigidez $[K^e]$ de 6×6 .

Figura 2.15 Elemento triangular para problemas de elasticidade plana.





3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Com base na *figura 2.15*, os vetores de deslocamentos e de forças são

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \\ F_{x,k} \\ F_{y,k} \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

Passo 2

Agora é necessário selecionar uma função de deslocamento que tem que satisfazer as condições de fronteira do elemento, isto é, a condição de que cada nó possui dois graus de liberdade.



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Geralmente, por questões computacionais, é preferível usar polinómios em vez de usar outras funções, como por exemplo séries trigonométricas, porque são calculados muito mais rapidamente.

O número total de graus de liberdade é seis, logo é preciso ter seis coeficientes nas funções polinomiais.

Pode assumir-se que a função deslocamento é

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

Os termos constantes, α_1 e α_4 são necessários para representar qualquer movimento do corpo rígido no plano, ou seja movimento sem extensão, enquanto os termos lineares permitem extensão constante.

As equações 2.82 também garantem compatibilidade dos deslocamentos nas arestas de elementos adjacentes.



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Escrevendo as *equações 2.82* na forma matricial, tem-se

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

Condensando a escrita, pode escrever-se na seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)] \{\alpha\} \quad (2.84)$$

Substituindo os valores do deslocamento e coordenadas para cada nó, tem-se para o nó i

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \end{bmatrix} \{\alpha\}$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Para os nós j e k obtêm-se expressões idênticas, pelo que para o elemento completo tem-se

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

Esta equação pode escrever-se na forma reduzida

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Passo 3

Assim, para se obter $\{\alpha\}$, escreve-se

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

Substituindo para $\{\alpha\}$, na *equação 2.83*, dá

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)][A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (2.86)$$

Passo 4

As extensões no elemento são

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.87)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

sendo definidas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.88)$$

Substituindo para u e v nas *equações 2.88*, usando as *equações 2.82*, obtém-se

$$\varepsilon_x = \alpha_2$$

$$\varepsilon_y = \alpha_6$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5$$

ou na forma matricial

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

que tem a forma

$$\{\varepsilon\} = [C][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (2.89b)$$

ou

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta^e\} \quad (2.89c)$$

sendo $[B]=[C][A]^{-1}$ e $[C]$ dado pela *equação 2.89*.

Passo 5

Agora relacionam-se as tensões internas $\{\sigma\}$ com as extensões $\{\varepsilon\}$, usando os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$.

Para tensões planas

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

e, para um material isotrópico,

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\}$$

Assim, em forma matricial

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Da equação 2.91, pode escrever-se

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.92)$$

que tem a forma

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.93)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade que relaciona as tensões e extensões.

Substituindo para $\{\varepsilon\}$ em termos dos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$, tem-se

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (2.94)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

No caso de termos um estado de extensões planas, a matriz de elasticidade tem uma forma diferente.

Neste caso, e para um material isotrópico, tem-se

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Eliminando o σ_z e resolvendo para σ_x , σ_y e τ_{xy} , dá

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

que tem novamente a forma

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Passo 6

Uma forma conveniente de derivar as expressões que governam o elemento finito e as suas características baseia-se no princípio da energia potencial.

A energia potencial Π do elemento tem contribuição da energia interna de extensão U e do trabalho realizado pelo carregamento W , na forma

$$\Pi = U - W \quad (2.96)$$

Neste caso, a energia de extensão de um volume infinitesimal $d(vol)$ do elemento finito é

$$dU = \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d(vol) \quad (2.97)$$

resultando na energia de extensão total de

$$U = \int_{vol} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d(vol) \quad (2.98)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

O trabalho realizado pelas forças nodais do elemento finito é

$$W = \{\delta^e\}^T \{F^e\} \quad (2.99)$$

A energia total fica

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{vol} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d(vol) - \{\delta^e\}^T \{F^e\} \quad (2.100)$$

Usando as definições de $\{\sigma\}$ da equação 2.94 e de $\{\varepsilon\}$ da equação 2.89c, fica-se com

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{vol} \{\delta^e\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} d(vol) - \{\delta^e\}^T \{F^e\}$$

Usando o princípio da energia potencial mínima tem-se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta^e} = 0 \quad (2.101)$$

ou seja

$$\int_{vol} [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} d(vol) - \{F^e\} = 0 \quad (2.102)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Daqui tira-se que as forças nodais podem ser calculadas a partir de

$$\{F^e\} = \left[\int_{vol} [B]^T [D][B] d(vol) \right] \{\delta^e\} \quad (2.103)$$

O integral de volume desta equação corresponde à matriz de rigidez $[K^e]$

$$[K^e] = \left[\int_{vol} [B]^T [D][B] d(vol) \right] \quad (2.104)$$

Na equação anterior $[B]=[C][A]^{-1}$, sendo $[A]$ dada pela *equação 2.85* e $[C]$ pela *equação 2.89*.

Por seu turno, a matriz de elasticidade $[D]$ é definida pela *equação 2.92*, em condições de estado plano de tensões, ou pela *equação 2.95* em condições de estado plano de extensões.



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Note-se que estas matrizes são constituídas por termos constantes, pelo que podem ser colocadas fora do integral de volume da *equação 2.104*.

Por outro lado, é fácil constatar-mos que o volume de um elemento corresponde ao produto da área do triângulo A pela sua espessura t , pelo que

$$[K^e] = [[B]^T [D][B]At] \quad (2.105)$$

Passo 7

Finalmente, as tensões no elemento obtêm-se da *equação 2.94*, ou seja,

$$\{\sigma\} = [H]\{\delta^e\}$$

onde $[H]=[D][B]$.



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Normalmente, é conveniente representar as tensões no centróide do elemento.

De todos os elementos finitos usados, o elemento triangular é dos mais versáteis.

Ele pode ser usado para resolver uma variedade de problemas desde placas 2D até placas curvas e cascas 3D.

Em aplicações 3D, a matriz de rigidez $[K^e]$ é transformada de um sistema coordenado xy plano para um sistema tri-dimensional de coordenadas globais através de uma matriz de transformação semelhante àquelas derivadas nos métodos matriciais de estrutura em esqueleto.

Adicionalmente, os elementos triangulares podem ser adaptados para serem usados em problemas de flexão de placas e na análise de corpos de revolução.



3. Método dos Elementos Finitos

3.3. Matriz de rigidez de um elemento triangular

Exemplo 2.03: Um elemento triangular com extensões constantes tem coordenadas dos cantos 1(0,0), 2(4,0) e 3(2,2) relativamente a um sistema e eixos cartesiano Oxy e tem uma espessura unitária. Se a matriz de elasticidade tem elementos $D_{11}=D_{22}=a$, $D_{12}=D_{21}=b$, $D_{13}=D_{23}=D_{31}=D_{32}=0$ e $D_{33}=c$, derive a matriz de rigidez do elemento.



3. Método dos Elementos Finitos

3.4. Matriz de rigidez de um elemento quadrilateral

Os elementos finitos quadrilaterais são usados frequentemente em combinação com elementos triangulares para criar geometrias particulares.

A *figura 2.16* mostra um elemento quadrilateral referente aos eixos Oxy com nós i, j, k e l definidos no sentido anti-horário.

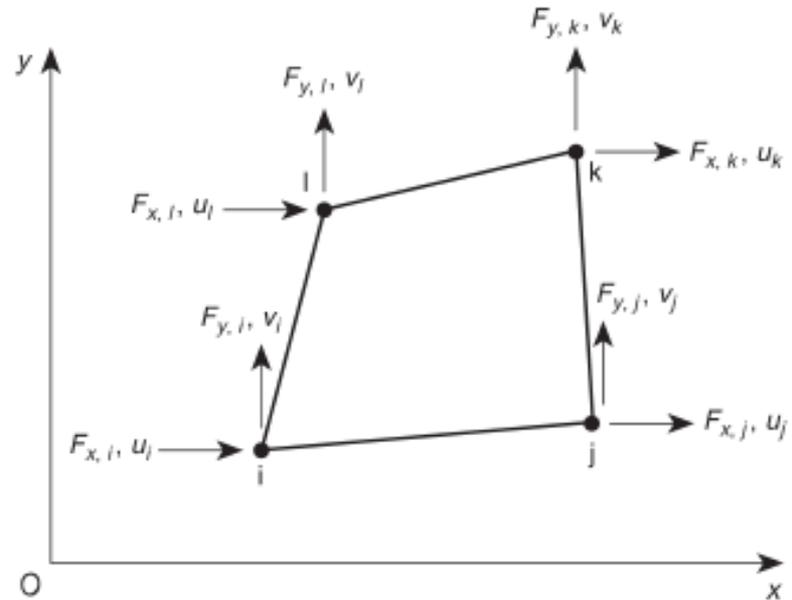


Figura 2.16 Elemento quadrilateral para problemas de elasticidade plana.



3. Método dos Elementos Finitos

3.4. Matriz de rigidez de um elemento quadrilateral

O elemento será usado em problemas de elasticidade plana e, por isso, tem dois graus de liberdade por nó, resultando em oito graus de liberdade para o elemento e numa matriz de rigidez $[K^e]$ de 8x8. Com base na *figura 2.16*, os vetores de deslocamentos e de forças são

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{Bmatrix} \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \\ F_{x,k} \\ F_{y,k} \\ F_{x,l} \\ F_{y,l} \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.4. Matriz de rigidez de um elemento quadrilateral

Como no caso do elemento finito triangular, seleciona-se uma função de deslocamento que satisfaça o total de oito graus de liberdade dos nós.

Usando, novamente, funções polinomiais com um máximo de oito coeficientes, pode assumir-se que a função deslocamento é

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

Os termos constantes, α_1 e α_4 são necessários para representar qualquer movimento do corpo rígido no plano, ou seja movimento sem extensão, enquanto os termos lineares permitem extensão constante.

A inclusão dos termos xy permite que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ tenham a mesma forma e que o elemento se comporte da mesma maneira tanto no eixo x como no eixo y .



3. Método dos Elementos Finitos

3.4. Matriz de rigidez de um elemento quadrilateral

Escrevendo as *equações 2.107* na forma matricial, tem-se

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (2.108)$$

Condensando a escrita, pode escrever-se na seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)]\{\alpha\} \quad (2.109)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.4. Matriz de rigidez de um elemento quadrilateral

Substituindo as coordenadas de cada nó, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (2.110)$$

Esta equação pode escrever-se na forma reduzida

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$$

ou

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (2.111)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.4. Matriz de rigidez de um elemento quadrilateral

A inversão da matriz $[A]$ está ilustrada no *exemplo 2.04*.

A análise seguinte é idêntica ao caso do elemento, exceto na relação $\{\varepsilon\}$ - $\{\alpha\}$ que fica

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (2.112)$$



3. Método dos Elementos Finitos

3.4. Matriz de rigidez de um elemento quadrilateral

Exemplo 2.04: Um elemento retangular usado numa análise de tensões planas tem cantos com as seguintes coordenadas (em metros) num referencial Oxy : 1(-2,-1), 2(2,-1), 3(2,1) e 4(-2,1). Os deslocamentos (também em metros) dos cantos são:

$$\begin{aligned}u_1 &= 0.001, u_2 = 0.003, u_3 = -0.003, u_4 = 0 \\v_1 &= -0.004, v_2 = -0.002, v_3 = 0.001, v_4 = 0.001\end{aligned}$$

Se o módulo de Young for $E = 200000 \text{ N/mm}^2$, e o coeficiente de Poisson for $\nu = 0,3$, calcule as tensões no centro do elemento.