UNIVERSIDADE BEIRA INTERIOR

Estruturas em Materiais Compósitos

Estruturas Aeroespaciais II (10373/15095)

1º Ciclo/Mestrado Integrado em Engenharia Aeronáutica

2025

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais

Faculdade de Engenharia

1. Introdução

- Uma proporção cada vez maior das estruturas aeroespaciais modernas é fabricada em materiais compósitos.
- Na maior parte dos casos, estas estruturas consistem em camadas em que filamentos rígidos e resistentes (fibra de carbono por exemplo) estão embebidos numa matriz (epoxy ou polyester por exemplo).
- A utilização dos compósitos pode resultar em reduções importantes no peso em relação a estruturas metálicas.
- Também têm a vantagem de permitir orientar as fibras em laminados de várias camadas de acordo com a direção dos esforços principais em dada posição, permitindo um projeto mais eficiente.

1. Introdução

Existem dois tipos de análise dos materiais compósitos:

Na primeira análise, micromecânica, os materiais constituintes (fibras e matriz) são consideradas separadamente.

As propriedades do compósito variam de ponto para ponto numa direção particular dependendo se está a analisar-se a fibra ou a matriz.

Na segunda análise, macromecânica, o material compósito é considerado como um todo pelo que as propriedades não mudam de ponto para ponto numa dada direção.

Geralmente, o projeto e análise dos materiais compósitos são baseados na macromecânica.

1. Introdução

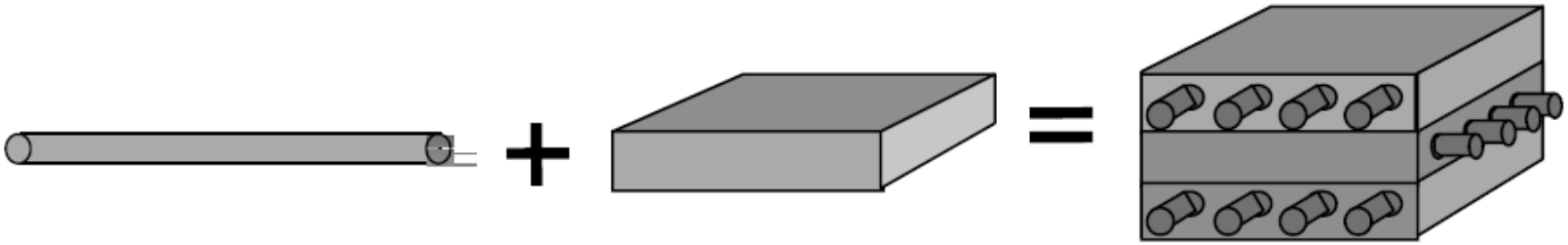
Inicialmente, será considerada, de forma breve, a micromecânica para determinar as constantes elásticas de uma camada com base nas propriedades dos seus constituintes.

Depois serão calculadas as tensões correspondentes num laminado.

2. Estruturas em compósito

- Os materiais compósitos são cada vez mais usados em estruturas primárias em várias áreas:
  - Comercial;
  - Indústria;
  - Aeronáutica;
  - Marítima;
  - Recreio e outras…

2. Estruturas em compósito



Fibra/filamento/reforço:

Alta resistência
Alta rigidez
Baixa densidade

Matriz:

Boas propriedades
ao corte
Baixa densidade

Compósito:

Alta resistência
Alta rigidez
Boas propriedades
ao corte
Baixa densidade

2. Estruturas em compósito

- Partes em compósito para aplicações aeronáuticas são definidas por:
  - Material, processo de fabrico, e especificações de fabrico
  - Margens do material (defeitos de processamento, danos, ambiente)
- Estes têm como base requisitos da regulamentação
- A aplicação mais eficiente em estruturas em compósito de aeronaves ocorre em:
  - Partes altamente carregadas e espessuras importantes
  - Cargas de fadiga elevadas (estrutura da fuselagem e asas, etc.)
  - Áreas suscetíveis à corrosão (fuselagem, etc.)
  - Redução crítica do peso (empenagens, asas, fuselagem, etc.)
- A sua utilização tem que ser justificada por benefícios de baixo peso e custos admissíveis

2. Estruturas em compósito

- Requisitos para as margens do material:
  - FAR 25.613, “Material Strength Properties”
    - Base estatística
    - Efeitos ambientais tidos em conta
    - MIL-H-17B
  - FAR 25.615, “Design Properties”
    - “A” base para caminho de carregamento único
    - “B” base para estrutura redundante
  - EASA CS 25.613 e CS 25.615 idênticas às normas FAR

2. Estruturas em compósito

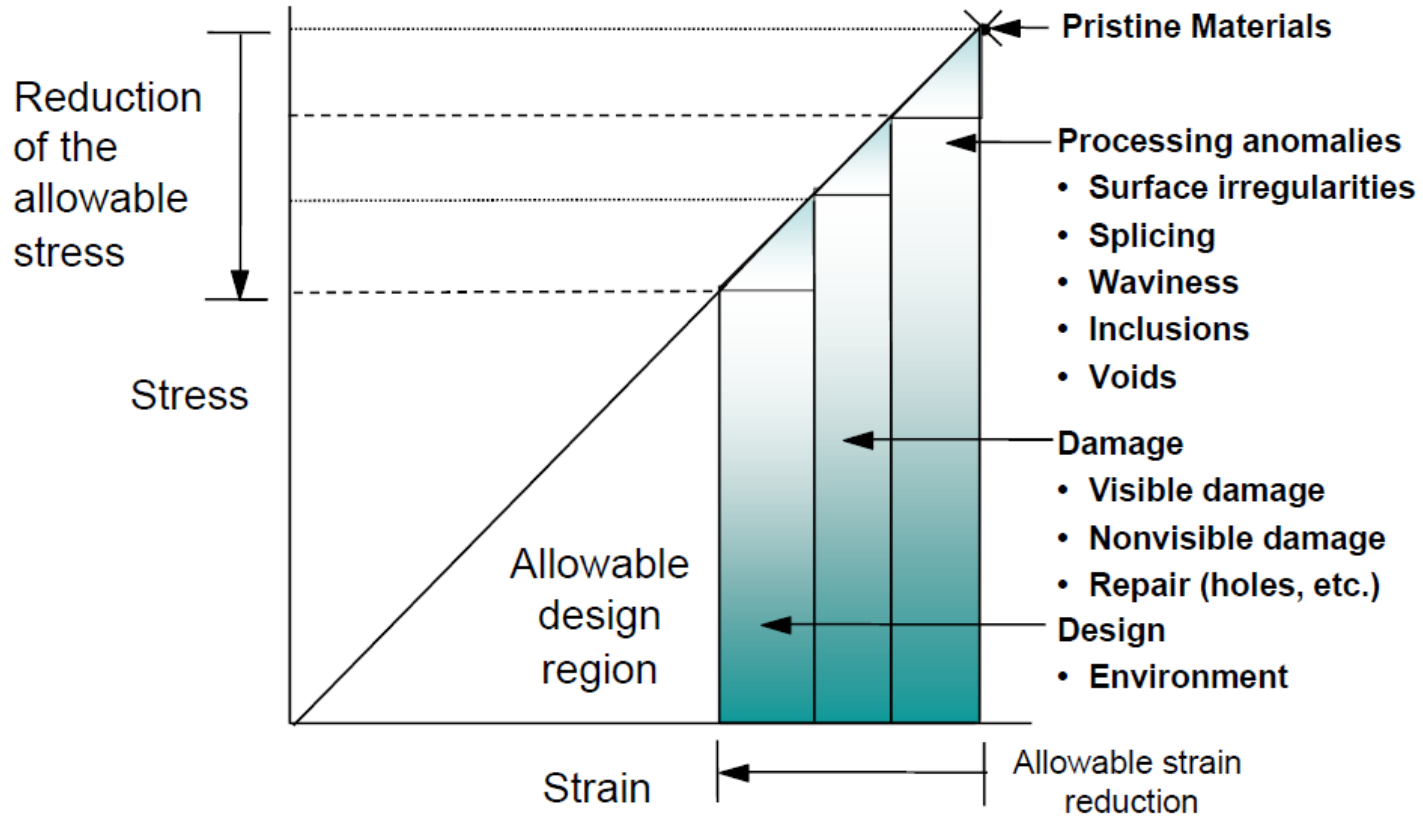
- Normas para materiais estruturais:
  - FAR 25.603, “Materials”
    - Aplicabilidade e durabilidade estabelecida por ensaios
    - Conformidade com especificações para garantir a resistência
    - Tem em conta condições ambientais
  - FAR 25.605, “Fabrication Methods”
    - Os métodos de fabrico devem produzir estruturas consistentemente fiáveis (repetibilidade)
    - Métodos novos devem ser validados por ensaios
  - FAR 25.609, “Protection of Structure”
    - Proteção contra deterioração e perda de resistência
  - EASA CS 25.603, CS 25.605 e CS 25.609 idênticas às normas FAR

2. Estruturas em compósito

- Recomendações para materiais compósitos:
  - FAA AC 20-107A, "Composite Aircraft Structure"
    - Apresenta meios aceitáveis (mas não os únicos) para certificar estruturas em compósitos avançados
  - FAA AC 21-26, "Quality Control for the Manufacture of Composite Structure"
    - Apresenta meios aceitáveis (mas não os únicos) para cumprir com os requisitos de controlo de qualidade da FAR 21
  - EASA AMC to CS 25.603, "Composite Aircraft Structure", idêntico a FAA AC 20-107A

2. Estruturas em compósito

- Redução de resistência dos materiais compósitos:



2. Estruturas em compósito

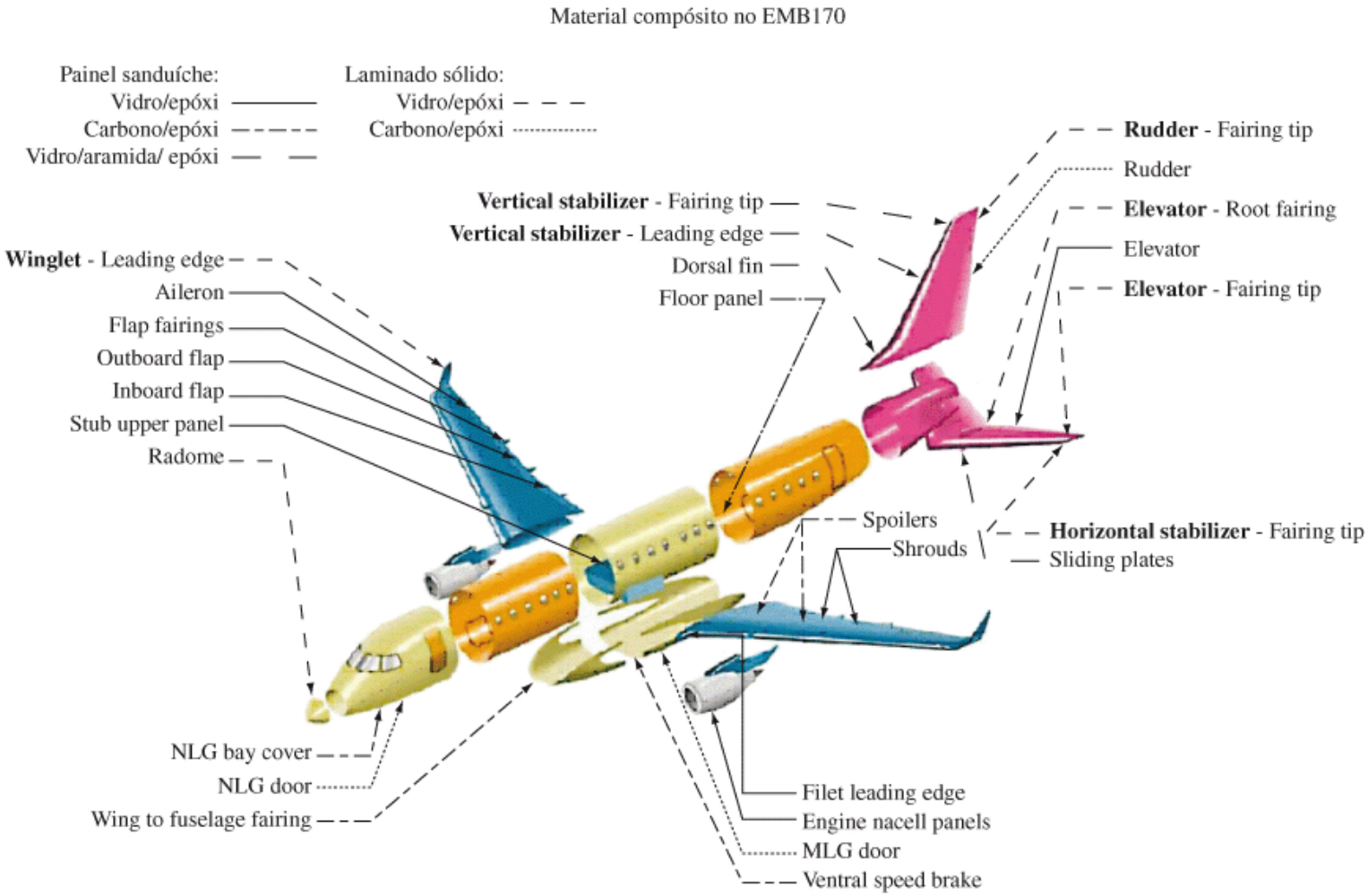


Figura 2. Vista explodida da aeronave EMB-170, mostrando os componentes fabricados em compósitos poliméricos avançados (cortesia da Embraer).

2. Estruturas em compósito

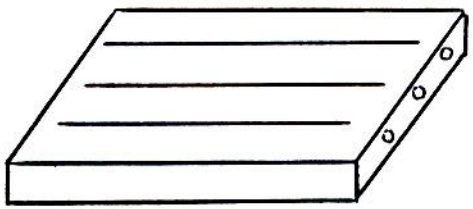
2. Estruturas em compósito

- Cargas no avião:

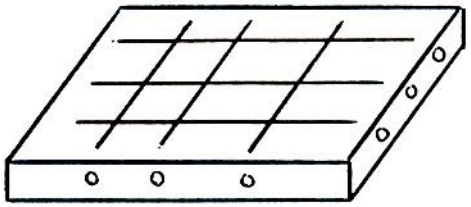
3. Teoria de laminados

3.1. Terminologia

- Camada:
  - É usualmente um arranjo plano de fibras unidirecionais ou entrelaçadas (tecido) numa matriz.
  - Uma camada unidirecional é um material ortotrópico e assume-se como sendo homogéneo.
  - A mecânica de uma única camada forma a base do comportamento de um laminado.



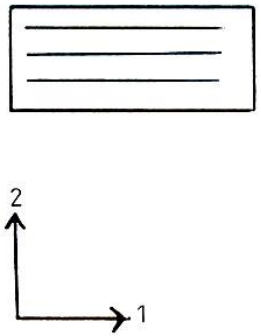
Unidirectional ply

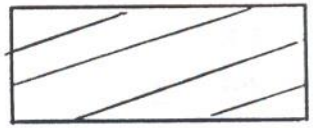


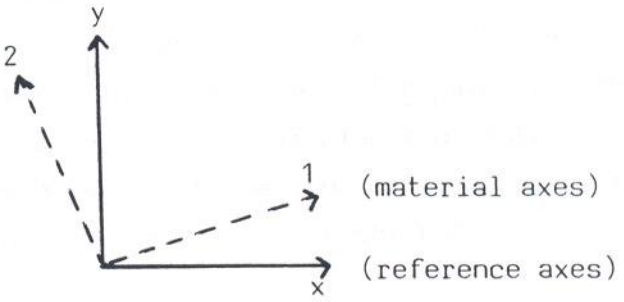
Woven fibres ply

3.1. Terminologia

- Eixos:
  - Eixos do material/Eixos principais/Eixos de simetria – eixos perpendiculares entre si paralelo e perpendicular à direção das fibras.
  - Fibra/longitudinal – direção 1
  - Matriz/transversal – direção 2
  - Eixos de referência/Eixos estruturais/Eixos de carregamento – eixos perpendiculares entre si paralelo e perpendicular a uma direção de referência geralmente coincidente com o sistema de eixos do carregamento externo. Este sistema de eixos tem interesse quando as fibras não estão paralelas a um dos eixos de referência.

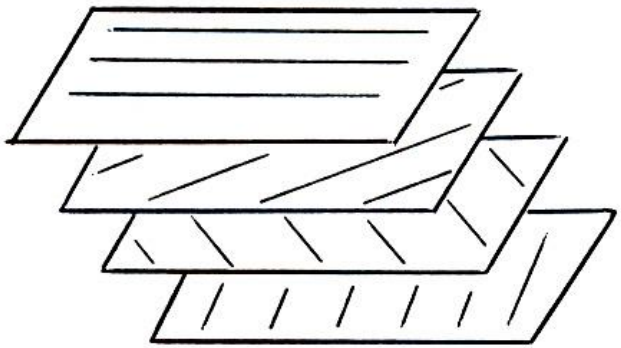






3.1. Terminologia

- Laminado:
  - É um conjunto (uma pilha) de camadas coladas com várias orientações do material em cada camada.
  - Geralmente, as camadas do laminado são unidas pela mesma matriz usada nas camadas.
  - O empilhamento é executado de forma a escolher as propriedades nas várias direções para corresponder às condições de carregamento do elemento estrutural.



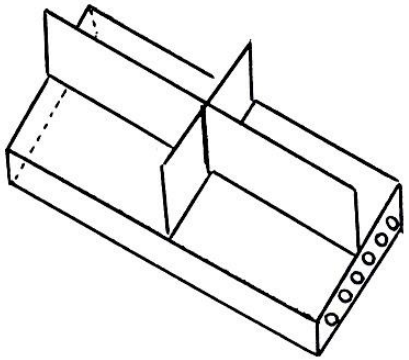
3.1. Terminologia

- Material Ortotrópico:
  - A definição geral de um material compósito ortotrópico de duas dimensões é:

"um corpo com propriedades geralmente diferentes em duas direções perpendiculares entre si num ponto do corpo

e

tem dois planos de simetria de propriedades do material perpendiculares entre si num ponto do corpo".



Two mutually perpendencular planes of material properties symmetry

3.2. Propriedades da camada

- A análise da rigidez e da resistência macroscópica depende das constantes elásticas E_1 E_2 G_{12} ν_{12} e das resistências básicas X_t X_c Y_t Y_c S.
- Sendo estes valores conhecidos, pode proceder-se à análise das camadas de compósito fibroso.
- Os métodos para prever a variação dos valores de elasticidade e de resistência com a quantidade relativa de fibras e de matriz permitem evitar a avaliação experimental dos mesmos para cada combinação possível durante a fase de projeto.
- A previsão destas propriedades da camada envolve a micromecânica, enquanto as medições das propriedades da camada e a sua aplicação na análise envolve a macromecânica.

3.2. Propriedades da camada

- O estudo da micromecânica da camada tem duas metodologias:
  - Resistência dos materiais: modelo matemático relativamente simples que dá o conhecimento básico do comportamento do material compósito;
  - Teoria de elasticidade: envolve soluções matemáticas com elevado rigor.
- Será considerada a metodologia da resistência dos materiais.

3.2. Propriedades da camada

- Pressupostos:
  - As fibras são:
    - Homogéneas
    - Isotrópicas
    - Linearmente elásticas
    - Espaçadas regularmente
    - Perfeitamente alinhadas
  - A matriz é:
    - Homogénea
    - Isotrópica
    - Linearmente elástica
  - A camada do material compósito é:
    - Macroscopicamente homogénea
    - Macroscopicamente ortotrópica
    - Linearmente elástica
    - Inicialmente sem tensão
  - Existe uma colagem (aderência) perfeita entre as fibras e a matriz e não existem espaços vazios

3.2. Propriedades da camada

- Notação:
  - v – volume
  - V – fração volúmica: $V_f=v_f/v_c$; $V_m=v_m/v_c$
  - w – massa
  - W – fração mássica: $W_f=w_f/w_c$; $W_m=w_m/w_c$
  - ρ – massa volúmica
  - ν – coeficiente de Poisson
  - E – módulo de Young
  - G – módulo de corte
  - σ – tensões normais (diretas) ou de corte
  - ε – extensões normais (diretas) ou de corte
  - A – área transversal da secção
  - b – largura
  - δ – deslocamento
  - P - força

3.2.1. Frações volúmicas e mássicas

- As proporções relativas da fibra e da matriz no compósito são preponderantes nas propriedades da camada, sendo que essas proporções são expressas em fração volúmica ou em fração mássica.
- A frações mássicas são mais fáceis de determinar aquando do fabrico (ou processamento) do compósito ou por testes depois do fabrico.
- No entanto, são as frações volúmicas que são usadas para a análise micromecânica.
- Assim, é necessário saber a relação entre as frações volúmicas e as frações mássicas do compósito.
- Isto é conseguido através da massa volúmica do compósito.

3.2.1. Frações volúmicas e mássicas

- Relações volume-massa:
  - As frações volúmicas da fibra e da matriz são por definição:

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} \quad ; \quad V_m = \frac{v_m}{v_c} \tag{1.01}$$

  - As frações mássicas da fibra e da matriz são por definição:

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} \quad ; \quad W_m = \frac{w_m}{w_c} \tag{1.02}$$

  - As relações entre as frações volúmicas e mássicas são:

$$V_f = \frac{\rho_c}{\rho_f} W_f \quad ; \quad V_m = \frac{\rho_c}{\rho_m} W_m \tag{1.03}$$

$$W_f = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f \quad ; \quad W_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} V_m \tag{1.04}$$

3.2.1. Frações volúmicas e mássicas

- Massa volúmica do compósito:
  - A massa total do compósito é:

$$w_c = w_f + w_m \tag{1.05}$$

  - A massa volúmica do compósito é:

$$\rho_c = \rho_f \frac{v_f}{v_c} + \rho_m \frac{v_m}{v_c} \tag{1.06}$$

  - Em termos das frações volúmicas:

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m \tag{1.07}$$

  - Assumindo que não há vazios, o volume total do compósito é:

$$v_c = v_f + v_m \tag{1.08}$$

  - Em termos das frações mássicas:

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{W_f}{\rho_f} + \frac{W_m}{\rho_m} \tag{1.09}$$

3.2.1. Frações volúmicas e mássicas

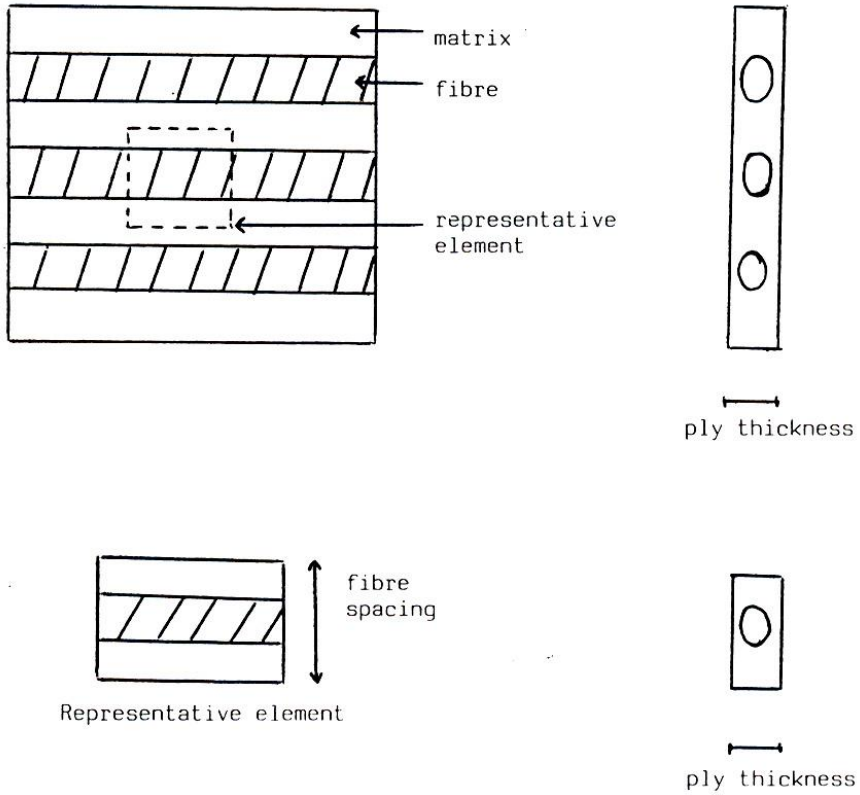
- Espessura da camada:

$$t_c = \frac{\gamma_f}{\rho_f}\left(1+\frac{\rho_f}{\rho_m}\frac{1-W_f}{W_f}\right)$$

onde γ_f é a massa da fibra por unidade de área.

3.2.1. Frações volúmicas e mássicas

- Elemento representativo:
  - Camada unidirecional:



3.2.2. Análise de rigidez

Uma camada simples de uma estrutura em compósito pode ser considerada ortotrópica com duas direções principais do material no seu próprio plano: uma paralela à direção dos filamentos (direção longitudinal, *l*, ou direção 1) e outra perpendicular à direção dos filamentos (direção transversal, *t*, ou direção 2).

- Módulo longitudinal, E_1:
  - Na *figura 1.01*, uma porção da camada com uma única fibra está sujeita a uma tensão σ_1, na direção longitudinal, que produz um alongamento Δl.

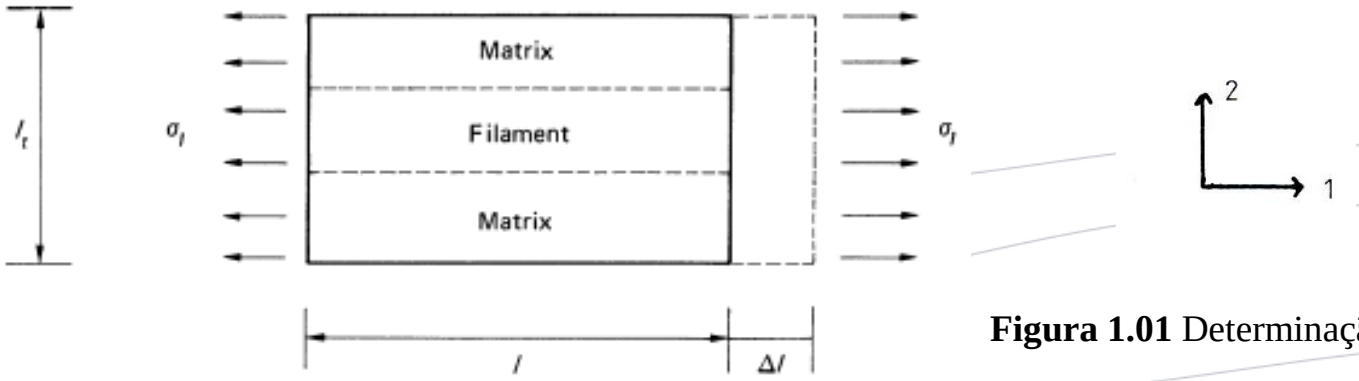


Figura 1.01 Determinação de E_1.

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo longitudinal, E_1:
  - Se assumirmos que secções planas permanecem planas durante a deformação, então a extensão ε_1 correspondente à tensão σ_1 é dada por

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} \tag{1.10}$$

e

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \tag{1.11}$$

onde E_1 é o módulo elástico da camada na direção da fibra.

  - Também se observa que, para a fibra e para a matriz, se tem

$$\begin{aligned} \sigma_f &= E_f \varepsilon_1 \\ \sigma_m &= E_m \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{1.12}$$

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo longitudinal, E_1:
  - Assumindo que existe uma aderência perfeita entre a fibra e a matriz, não existindo escorregamento no interface, então quando um elemento da camada está sujeito a uma tensão σ_1 na direção 1, as extensões da fibra e da matriz são iguais.

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1 \tag{1.13}$$

  - As tensões na fibra e na matriz são, como visto anteriormente:

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f = E_f \varepsilon_1$$
$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m = E_m \varepsilon_1$$

  - Se considerarmos a área da secção transversal da camada, A, e as áreas transversais da fibra e da matriz, A_f e A_m, respetivamente, para equilíbrio na direção do filamento tem-se:

$$\sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m$$

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo longitudinal, E_1:
  - Substituindo da *equação 1.12*:

$$E_1 \varepsilon_1 A = E_f \varepsilon_1 A_f + E_m \varepsilon_1 A_m$$

  - e:

$$E_1 = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A} \qquad (1.14)$$

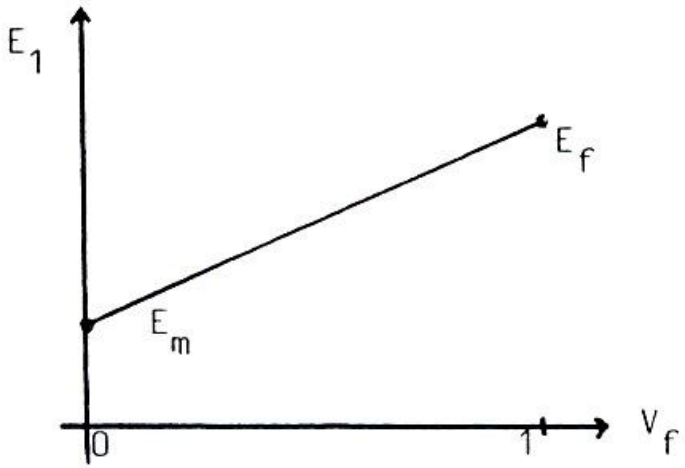
  - Logo, o módulo elástico do compósito é obtido pela ponderação das frações volúmicas:

$$\boxed{E_1 = V_f E_f + V_m E_m} \qquad (1.15)$$

  - Esta equação é conhecida como a Lei das Misturas e dá bons resultados comparada com dados experimetais.

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo longitudinal, E_1:
  - Uma vez que $V_f+V_m=1$, quando não existem vazios, esta regra também pode ser escrita nas seguintes formas:



$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E_m$$
$$E_1 = (E_f - E_m) V_f + E_m \qquad (1.16)$$

  - Na prática tem-se V_f entre 0,5 e 0,7 e E_m muito inferior a E_f, logo

$$E_1 \approx V_f E_f$$

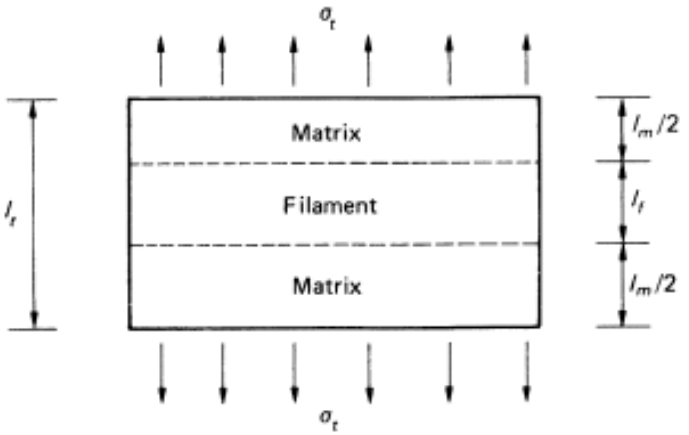
  - O módulo longitudinal é dominado pelas propriedades da fibra.

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo transversal, E_2:
  - Assumindo que uma tensão σ_2 na direção 2 atua tanto na fibra como na matriz e desprezando o efeito de Poisson na direção 1, as extensões transversais na fibra e na matriz são:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \tag{1.17}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \tag{1.18}$$



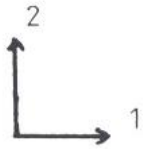


Figura 1.02 Determinação de E_2.

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo transversal, E_2:
  - Na *figura 1.02*, o alongamento total na direção transversal produzido pela tensão σ_2 é:

$$\varepsilon_2 l_2 = \varepsilon_f l_f + \varepsilon_m l_m$$

ou

$$\frac{\sigma_2}{E_2} l_2 = \frac{\sigma_2}{E_f} l_f + \frac{\sigma_2}{E_m} l_m$$

  - Dividindo por $\sigma_2 l_2$, dá:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_f}\frac{l_f}{l_2} + \frac{1}{E_m}\frac{l_m}{l_2}$$

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo transversal, E_2:
  - O módulo elástico transversal do compósito é obtido pela ponderação das frações volúmicas:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \tag{1.19}$$

  - Rearranjando, obtém-se:

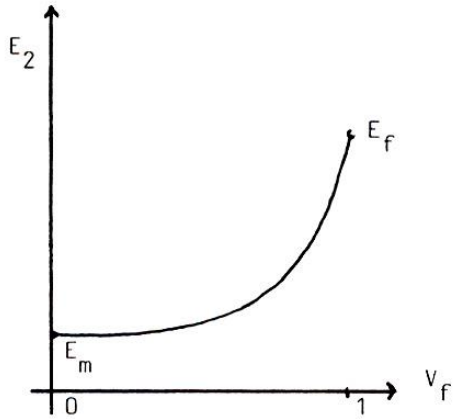
$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + V_m E_f} \tag{1.20}$$

  - Uma vez que $V_f+V_m=1$, quando não existem vazios, esta equação também pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{(1-V_f)}{E_m} \tag{1.21}$$

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo transversal, E_2:

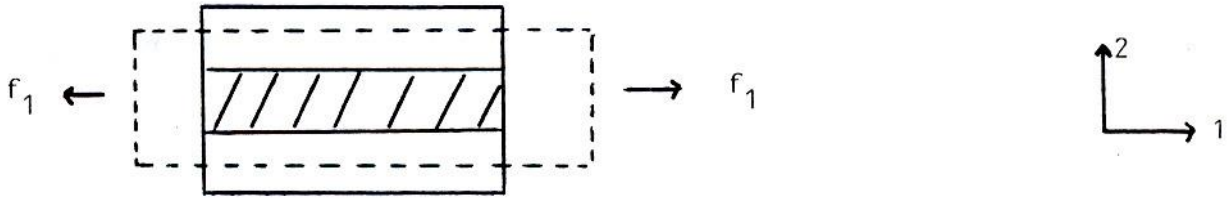


  - Para as frações volúmicas tipicamente usadas, o efeito das propriedades da fibra é mínimo no módulo transversal E_2.
  - Tipicamente o módulo transversal é tido como sendo dominado pelas propriedades da matriz.
  - Esta expressão não dá bons resultados quando estes são comparados com dados medidos experimentalmente:
    - Não se deve ignorar o efeito de Poisson
    - A tensão σ_2 não é igual na fibra e na matriz
    - Existe uma interação complexa entre a fibra e a matriz

3.2.2. Análise de rigidez

- Coeficiente de Poisson maior, ν_{12}:
  - Assumindo que existe uma aderência perfeita entre a fibra e a matriz, não existindo escorregamento no interface, então quando um elemento da camada está sujeito a uma tensão σ_1 na direção 1, tem-se

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \qquad (1.22)$$



  - Da *equação 1.22*, as extensões na fibra e na matriz são:

$$\varepsilon_f = -\nu_f \varepsilon_1$$
$$\varepsilon_m = -\nu_m \varepsilon_1 \qquad (1.23)$$

3.2.2. Análise de rigidez

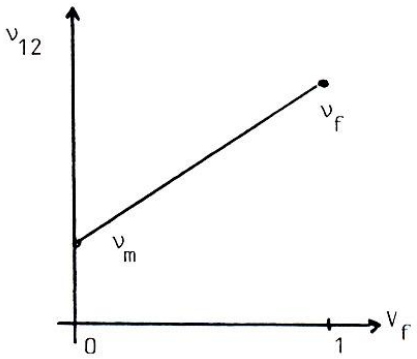
- Coeficiente de Poisson maior, ν_{12}:
  - Para uma tensão σ_1 na direção 1, obtém-se um alongamento na direção 2 igual a

$$\nu_{12}\varepsilon_1 l_2 = \nu_f \varepsilon_1 l_f + \nu_m \varepsilon_1 l_m$$

  - O coeficiente de Poisson do compósito é obtido pela ponderação das frações volúmicas:

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + V_m \nu_m \qquad (1.24)$$

  - Uma vez que V_f+V_m=1, quando não existem vazios, esta equação também pode ser escrita nas seguintes formas:



$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f)\nu_m$$
$$\nu_{12} = (\nu_f - \nu_m)V_f + \nu_m \qquad (1.25)$$

3.2.2. Análise de rigidez

- Coeficiente de Poisson menor, ν_{21}:
  - Considerando a *figura 1.02*, a extensão longitudinal produzida pela tensão transversal é

$$\nu_{21}\frac{\sigma_2}{E_2} = \nu_f\frac{\sigma_2}{E_f} = \nu_m\frac{\sigma_2}{E_m} \qquad (1.26)$$

  - Da segunda *equação 1.26*, tem-se:

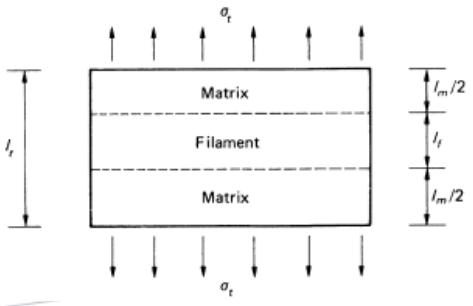
$$\nu_f = \frac{E_f}{E_m}\nu_m \qquad (1.27)$$

  - Substituindo na *equação 1.24*:

$$\nu_{12} = \nu_m\left(\frac{E_f}{E_m}V_f + V_m\right) = \frac{\nu_m}{E_m}\left(V_f E_f + V_m E_m\right)$$

  - Da lei das misturas (*equação 1.15*):

$$\nu_{12} = \nu_m\frac{E_1}{E_m}$$



3.2.2. Análise de rigidez

- Coeficiente de Poisson menor, ν_{21}:
  - Substituindo ν_m

$$\nu_m = \frac{E_m}{E_1}\nu_{12}$$

  - na primeira *equação 1.26*, tem-se:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_m}{E_m}$$

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \qquad (1.28)$$

  - Da *equação 1.24*:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12} = \frac{E_2}{E_1}\left(V_f\nu_f + V_m\nu_m\right) \qquad (1.29)$$

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo de corte no plano, G_{12}:
  - A determinação do módulo de corte é idêntica à do E_2.
  - Assumindo que uma tensão de corte σ_{12} aplicada no contorno do elemento representativo atua tanto na fibra como na matriz as extensões de corte na fibra e na matriz são

$$\varepsilon_{12_f} = \frac{\sigma_{12}}{G_f}$$

$$\varepsilon_{12_m} = \frac{\sigma_{12}}{G_m}$$

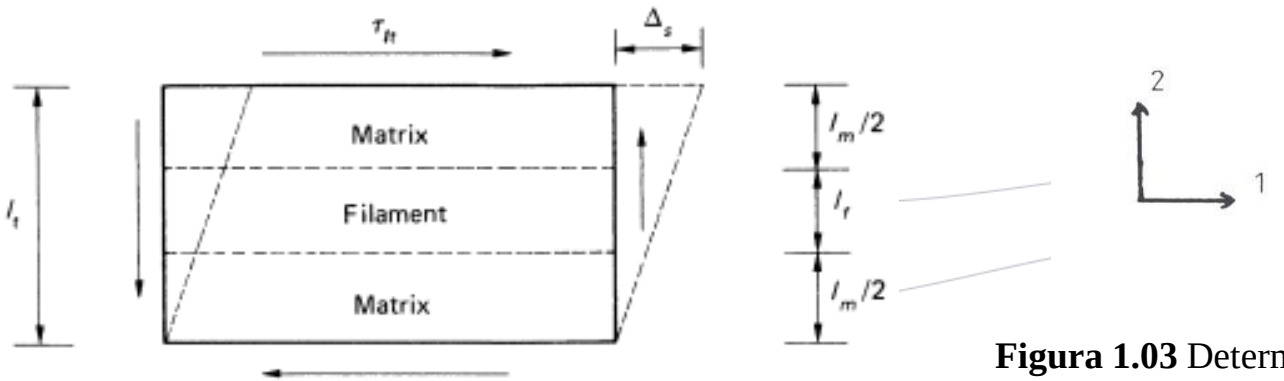


Figura 1.03 Determinação de G_{12}.

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo de corte no plano, G_{12}:
  - O deslocamento Δ_s produzido pelo corte é

$$\frac{\sigma_{12}}{G_{12}} l_2 = \frac{\sigma_{12}}{G_f} l_f + \frac{\sigma_{12}}{G_m} l_m$$

  - O módulo de corte do compósito é obtido pela ponderação das frações volúmicas:

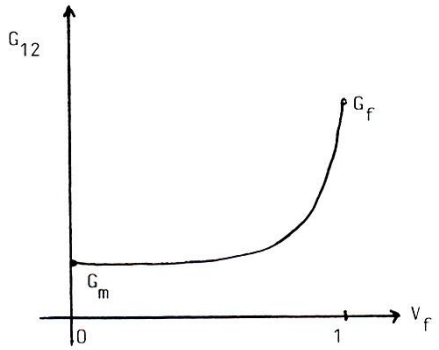
$$\boxed{\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m}} \qquad (1.30)$$

  - Rearranjando, tem-se:

$$\boxed{G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + V_m G_f}} \qquad (1.31)$$

3.2.2. Análise de rigidez

- Módulo de corte no plano, G_{12}:
  - Uma vez que $V_f+V_m=1$, quando não existem vazios, esta equação também pode ser escrita na seguinte forma:



$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{(1-V_f)}{G_m} \qquad (1.32)$$

  - Para as frações volúmicas tipicamente usadas, o efeito das propriedades da fibra é mínimo no módulo de corte G_{12}.
  - Normalmente o módulo de corte é tido como sendo dominado pelas propriedades da matriz.
  - A expressão acima não dá bons resultados quando estes são comparados com dados medidos experimentalmente:
    - Não se deve ignorar o efeito de Poisson
    - A tensão σ_{12} não é igual na fibra e na matriz
    - Existe uma interação complexa entre a fibra e a matriz

3.2.2. Análise de rigidez

Exemplo 1.01: Uma barra laminada com a secção transversal da *figura 1.04* tem 500 mm de comprimento e é constituída por uma matriz de epóxi reforçada com filamentos de carbono com módulos elásticos de 5000 N/mm² e 200000 N/mm², respetivamente. Os valores correspondentes do coeficiente de Poisson são 0,2 e 0,3. Se a barra estiver sujeita a uma força axial de tração com 100 kN, determine o alongamento da barra e a redução da espessura. Calcule, também, as tensões na resina epóxi e nos filamentos de carbono.

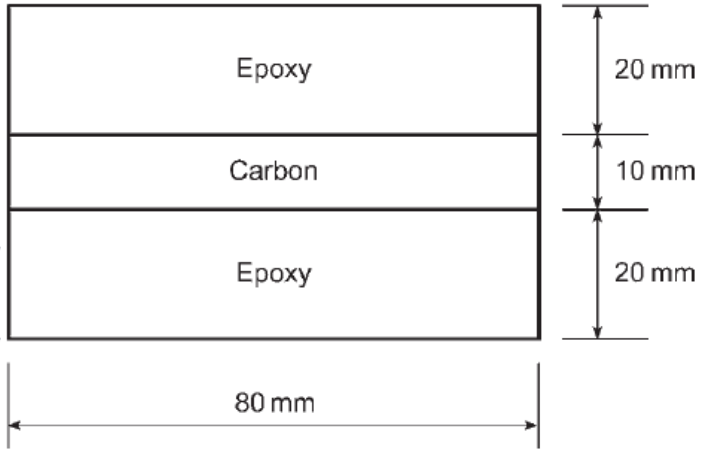


Figura 1.04 Secção transversal da barra do exemplo *1.01*

3.2.2. Análise de rigidez

Exemplo 1.02: As asas de uma réplica de biplano estão ligadas por um sistema de cabos em compósito, cada um com 1,5 m de comprimento e que suportam apenas cargas de tração. A secção transversal está mostrada na *figura 1.05* onde a matriz de poliéster tem um módulo elástico de 2800 N/mm² enquanto o da fibra de kevlar é 145000 N/mm² com coeficientes de Poisson correspondentes de 0,15 e 0,3, respetivamente. Se a força de tração máxima no cabo for de 10 kN, determine o alongamento e as tensões no poliéster e no kevlar.

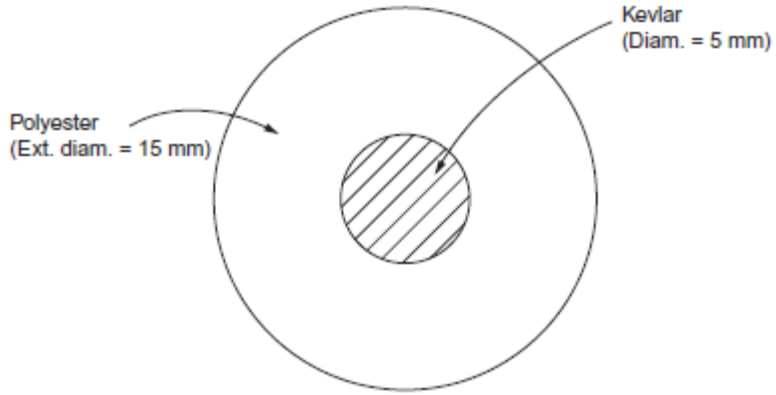


Figura 1.05 Secção transversal do cabo do exemplo *1.02*

3.2.3. Teoria da elasticidade

- Teoria da Elasticidade:
  - Por forma a obter-se melhor aproximação aos resultados experimentais, em particular nos valores de E_2 e G_{12}, é necessário usar uma teoria mais elaborada recorrendo à teoria da elasticidade.
  - Existem várias teorias de elasticidade que podem ser usadas para determinar as propriedades de uma camada de material compósito.
  - Todas elas são mais ou menos complexas na sua derivação.
  - Uma que dá resultados particularmente bons quando comparados com dados experimentais é a teoria de Halpin-Tsai.

3.2.3. Teoria da elasticidade

- Equações de Halpin-Tsai:
  - A derivação destas equações é bastante longa, pelo que apenas os resultados são apresentados.

$$E_1 = V_f E_f + V_m E_m \tag{1.33}$$

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + V_m \nu_m \tag{1.34}$$

$$\frac{M_c}{M_m} = \frac{1 + xyV_f}{1 - yV_f} \qquad y = \frac{\frac{M_f}{M_m} - 1}{\frac{M_f}{M_m} + x} \tag{1.35}$$

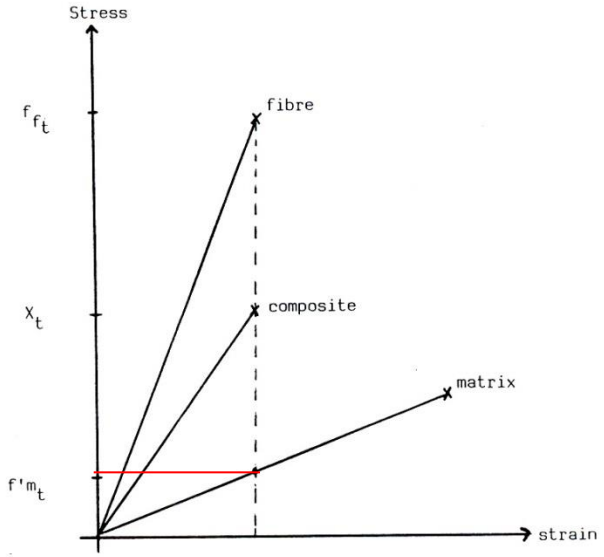
  - M_c toma o valor de E_2 ou G_{12}.
  - M_f toma o valor de E_f ou G_f.
  - M_m toma o valor de E_m ou G_m.
  - x toma o valor de 2 para calcular E_2 e o valor de 1 para calcular G_{12}.

3.2.4. Análise de resistência

- Análise de resistência:
  - A estimativa das resistências básicas (X_t X_c Y_t Y_c S) de uma camada de compósito, com base na micromecânica não é tão simples ou precisa como o cálculo das constantes elásticas.
  - A estimativa da resistência da camada é muito complicada e depende, entre outros fatores, de:
    - Condições de carregamento – axial, transversal, corte, tração, compressão, etc..
    - Rutura da fibra ou da matriz em primeiro lugar.
    - Partilha do carregamento pelos constituintes.
    - Possibilidade de deformação plástica, em particular na matriz.
    - Resistência da fibra não uniforme ao longo do seu comprimento.
    - Concentração de tensões devido a fraturas nas fibras.
  - No entanto, apesar das dificuldades envolvidas, uma estimativa das resistências básicas é muito útil no processo de projeto do compósito.
  - Em seguida apresentam-se algumas estimativas para fibras unidirecionais.

3.2.4. Análise de resistência

- Tensão de rutura longitudinal à tração X_t:
  - Assume-se que todas as fibras têm a mesma resistência.

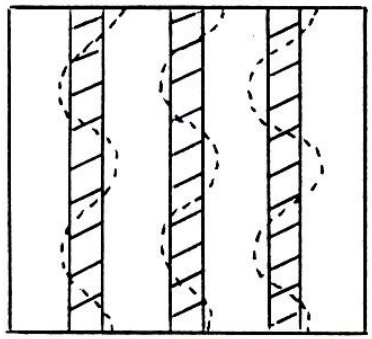


$$X_t = f_{f_t} V_f + f'_{m_t} V_m \tag{1.36}$$

  - A falha do compósito é iniciada pela rutura da fibra.
  - As frações volúmicas são as tipicamente praticadas.

3.2.4. Análise de resistência

- Tensão de rutura longitudinal à compressão X_c:
  - Na prática observa-se que, à compressão, as fibras suportam a maior parte do carregamento enquanto a matriz proporciona suporte lateral às fibras.
  - Para frações volúmicas típicas, as fibras instabilizam em fase umas com as outras, produzindo extensões de corte na matriz.
  - Este modo de instabilidade chama-se modo de instabilidade ao corte:



  - Com base em teoremas de energia de extensão:

$$X_c = \frac{G_m}{V_m} \qquad (1.37)$$

3.2.4. Análise de resistência

- Tensão de rutura transversal à tração Y_t:
  - Assume-se que a resistência transversal do compósito é controlada pela resistência da matriz.
  - Devido a concentrações de tensão no interface fibra-matriz, a resistência transversal do compósito é inferior à resistência da matriz por um fator *Strength Reduction Factor* (SRF).
  - Este fator depende das propriedades relativas das fibras e da matriz e da sua fração volúmica relativa:

$$Y_t = \frac{Y_{m_t}}{SFR} \tag{1.38}$$

$$SFR = \frac{1 - V_f\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}{1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}$$

3.2.4. Análise de resistência

- Tensão de rutura transversal à compressão Y_c:
  - A mesma equação anterior aplica-se no cálculo da resistência transversal à compressão:

$$Y_c = \frac{Y_{m_c}}{SFR} \tag{1.39}$$

$$SFR = \frac{1 - V_f\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}{1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}\left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)}$$

3.2.4. Análise de resistência

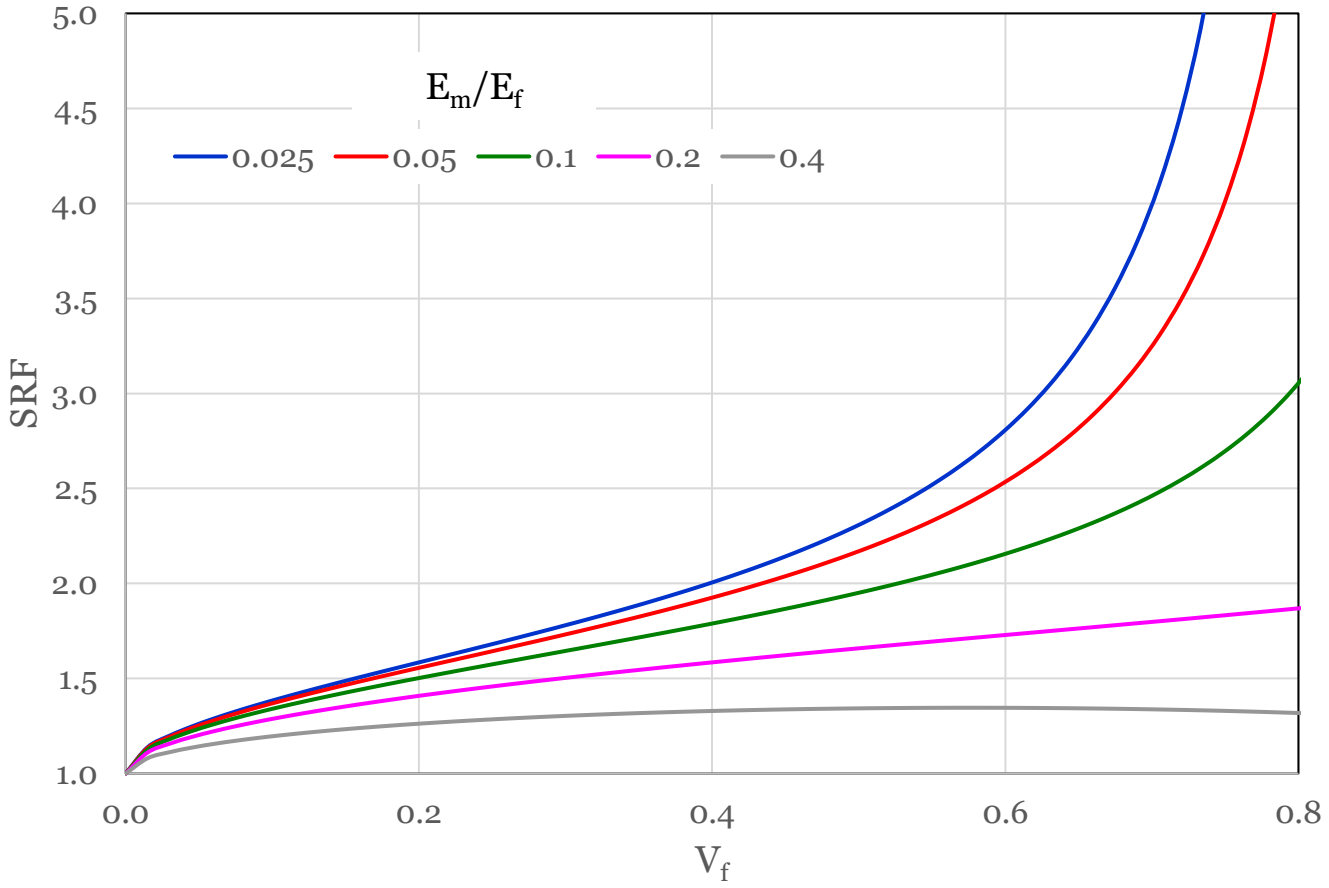
- Tensão de rutura ao corte *S*:
  - A resistência ao corte da camada é governada pela resistência ao corte da matriz e é dada por:

$$S = \frac{\sigma_{12_m}}{SFR} \tag{1.40}$$

$$SFR = \frac{1 - V_f\left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)}{1 - \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}}\left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)}$$

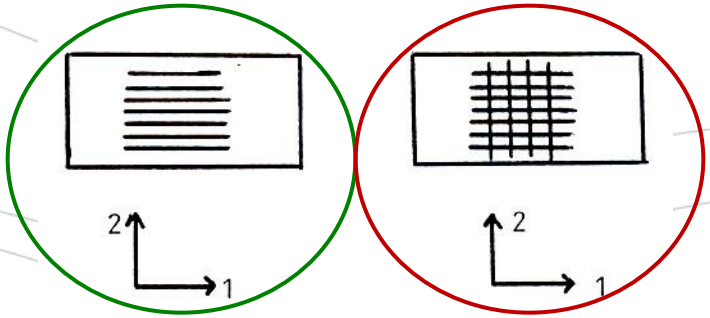
3.2.4. Análise de resistência

- *Strength Reduction Factor* (SRF):



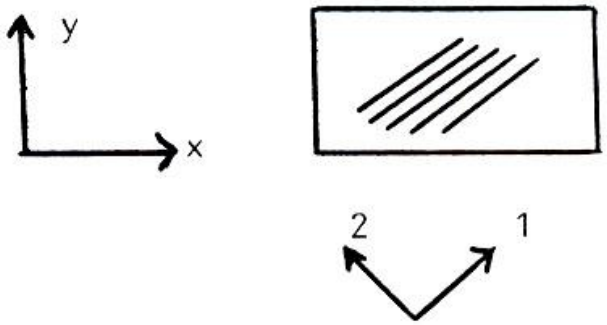
3.3. Análise de rigidez da camada

- As relações tensão-extensão de uma camada podem ser desenvolvidas considerando as deformações elementares resultantes das tensões normal e de corte aplicadas.
- Uma camada reforçada com fibras unidirecionais ou tecido (com fibras em direções ortogonais entre si) exibem dois planos perpendiculares de simetria de propriedades do material.
- Quando os eixos do material da camada coincidem com os eixos de referência, então a camada chama-se "camada ortotrópica especial".



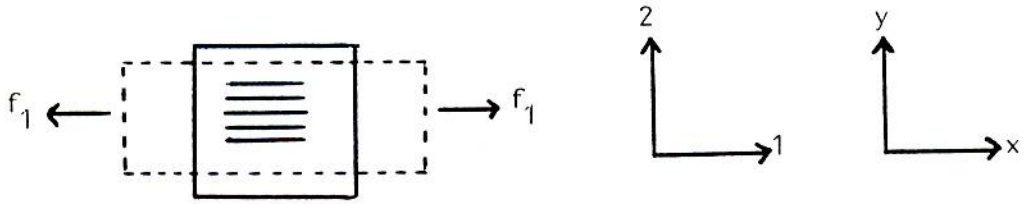
3.3. Análise de rigidez da camada

- Em geral, as fibras estão alinhadas em direções diferentes das dos eixos de referência para se conseguir as propriedades desejadas nas direções apropriadas.
- Nestes casos, os eixos do material já não se encontram alinhados com os eixos de referência e a camada chama-se "camada ortotrópica geral".



3.3.1. Camada ortotrópica especial

- Efeito das tensões normais:



- A aplicação da tensão normal σ_1 na direção 1 do material resulta em extensões normais:

  – Na direção 1: $\varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E_1}$

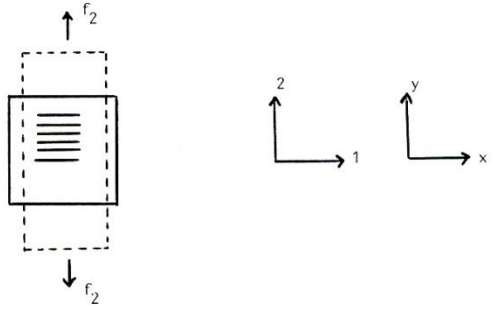
  - Na direção 2: $\varepsilon_2 = -\nu_{12}\dfrac{\sigma_1}{E_1}$

onde E_1 é o módulo de Young na direção 1 e ν_{12} é o coeficiente de Poisson maior dado por

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

3.3.1. Camada ortotrópica especial

- Efeito das tensões normais:



- A aplicação da tensão normal σ_2 na direção 2 do material resulta em extensões normais:

  – Na direção 2: $\varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E_2}$

  - Na direção 1: $\varepsilon_1 = -\nu_{21}\dfrac{\sigma_2}{E_2}$

onde E_2 é o módulo de Young na direção 2 e ν_{21} é o coeficiente de Poisson menor dado por

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

3.3.1. Camada ortotrópica especial

- A aplicação das duas tensões normais σ_1 e σ_2 em simultâneo resulta em extensões normais:

  – Na direção 1: $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21}\frac{\sigma_2}{E_2}$

  – Na direção 2: $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12}\frac{\sigma_1}{E_1}$ (1.41)

- Rearranjando estas equações, obtêm-se as tensões em função das extensões:

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_1 + \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_2$$

$$\sigma_2 = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_1 + \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_2 \quad (1.42)$$

3.3.1. Camada ortotrópica especial

- Efeito da tensão de corte:

- A aplicação da tensão de corte σ_{12} resulta na extensão de corte:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}}$$

onde G_{12} é o módulo de corte no plano.

- O módulo de corte G_{12} é independente das outras constantes elásticas. Assim, é sempre necessário conhecer:

$$E_1 \; E_2 \; \nu_{12} \text{ (ou } \nu_{21}) \; G_{12}$$

3.3.1. Camada ortotrópica especial

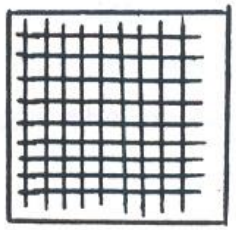
- Em resumo:

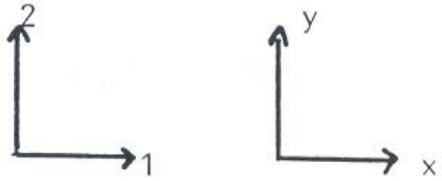
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{1.43}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{1.44}$$

3.3.1. Camada ortotrópica especial

- No caso particular em que $E_1=E_2$, o material não é necessariamente isotrópico uma vez que o módulo de corte no plano continua a ser independente.
- Nesta caso, $E_1=E_2$ implica reforços iguais nas direções 1 e 2.





- Também se verifica que as propriedades do material, por exemplo E, numa direção θ relativamente à direção 1 não é igual a E_1 (ou E_2).

3.3.1. Camada ortotrópica especial

- Coeficiente de Poisson:
  - A partir de considerações energéticas pode ser demonstrado que

$$|\nu_{12}| < \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|\nu_{21}| < \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

  - É possível ter valores de coeficiente de Poisson maiores que 0,5.

3.3.1. Camada ortotrópica especial

- Constantes elásticas genéricas típicas de materiais compósitos unidirecionais (60% de fibra em volume):

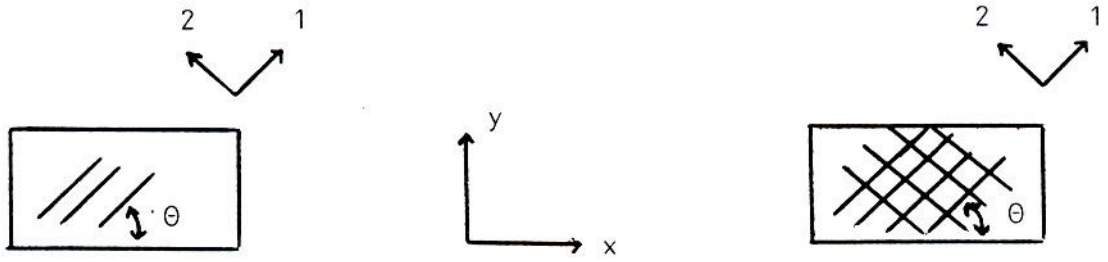
	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}
	($\times 10^3$ N/mm^2)			
Mild Steel	210	210	80	0.3
Alum. Alloy	70	70	27	0.3
HM - C/Epoxy	180	8	6	0.3
HS - C/Epoxy	140	10	5	0.3
E - G/Epoxy	40	8	4	0.25
Kevlar/Epoxy	75	6	2	0.34
Boron/Epoxy	200	15	5	0.23

3.3.1. Camada ortotrópica especial

Exemplo 1.03: Uma placa de tecido de apenas uma camada está sujeita a tensões diretas longitudinal e transversal de 50 N/mm² e 25 N/mm², respetivamente, juntamente com uma tensão de corte de 40 N/mm². As constantes elásticas da camada são E_1=120000N/mm², E_2=80000N/mm², G_{12}=5000N/mm² e ν_{12}=0,3. Calcule as extensões diretas longitudinal e transversal e a extensão de corte na camada.

3.3.2. Camada ortotrópica geral

- Nos compósitos laminados em geral, as fibras numa camada estão alinhadas em direções diferentes relativamente ao eixo de referência para que se obtenham propriedades específicas nessas direções.
- Quando os eixos do material da camada não coincidem com os eixos de referência, tem-se uma camada ortotrópica geral.



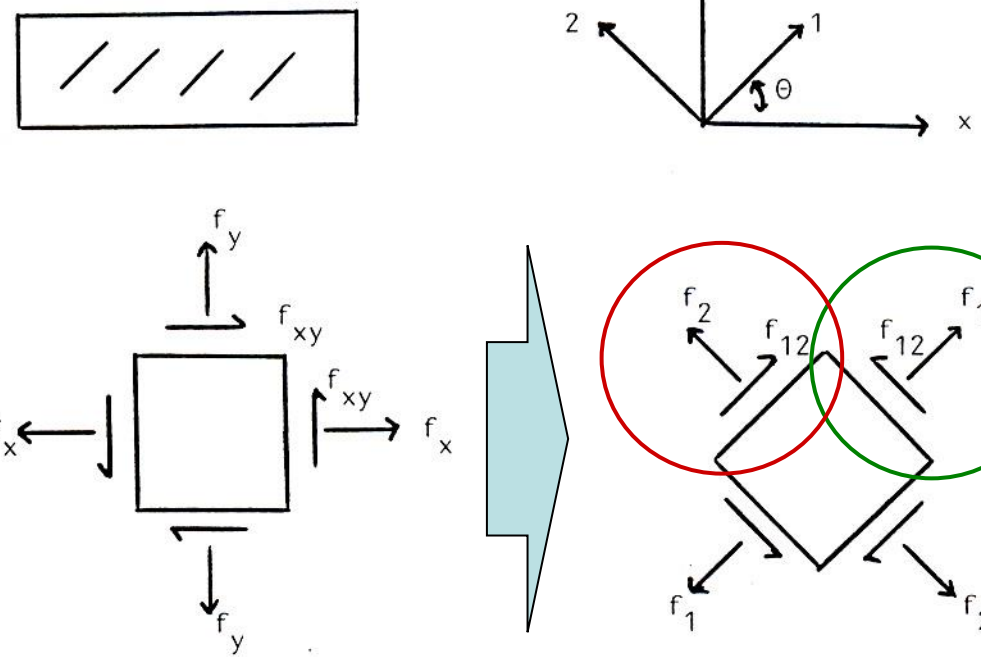
3.3.2. Camada ortotrópica geral

- As relações de tensão-extensão de uma camada ortotrópica geral são obtidas usando os seguintes resultados:
  - Transformação de tensões de um sistema de eixos para outro;
  - Transformação de extensões de um sistema de eixos para outro;
  - Relações de tensão-extensão de uma camada ortotrópica especial.

3.3.2. Camada ortotrópica geral

- Transformação de tensões:

Camada orientada θ com x



Tensões nos eixos de referência

Tensões nos eixos do material

3.3.2. Camada ortotrópica geral

- Transformação de tensões:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \sigma_{xy} 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - \sigma_{xy} 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sigma_{12} = -\sigma_x \sin\theta\cos\theta + \sigma_y \sin\theta\cos\theta + \sigma_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

3.3.2. Camada ortotrópica geral

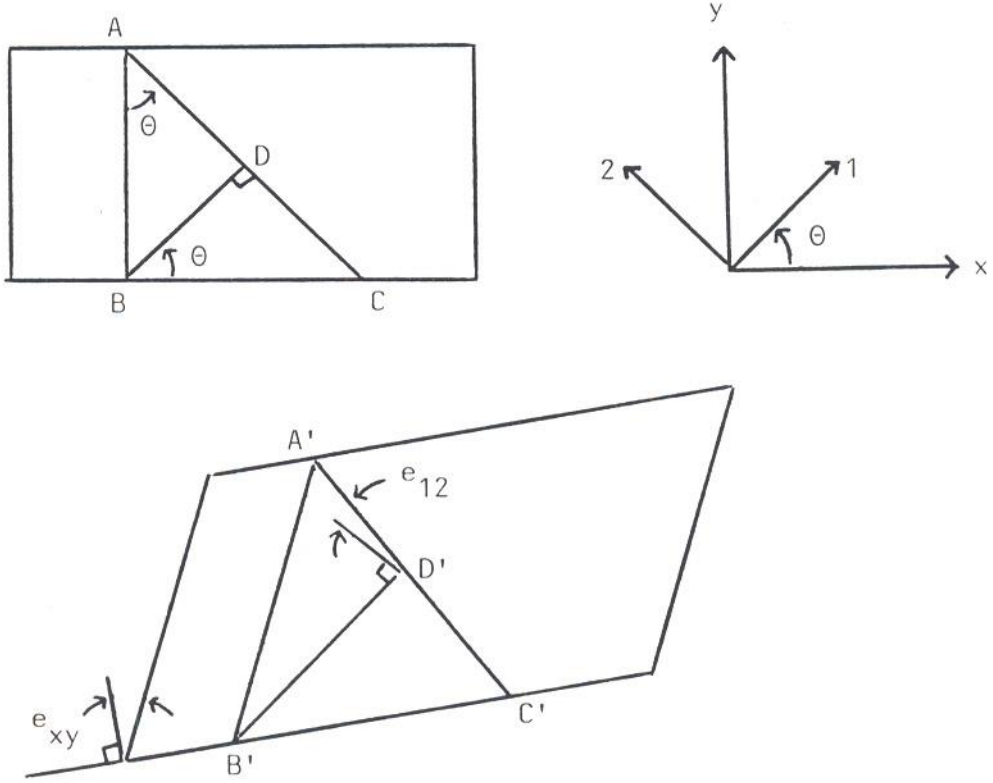
- Ou na forma de matriz:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} \quad (1.45)$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix} \quad (1.46)$$

3.3.2. Camada ortotrópica geral

- Transformação de extensões:



3.3.2. Camada ortotrópica geral

- Transformação de extensões:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \varepsilon_{xy} \cos\theta \sin\theta$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x \sin^2\theta + \varepsilon_y \cos^2\theta - \varepsilon_{xy} \cos\theta \sin\theta$$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_x 2\cos\theta \sin\theta + \varepsilon_y 2\cos\theta \sin\theta + \varepsilon_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

3.3.2. Camada ortotrópica geral

- Ou na forma de matriz:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta & 2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.47)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & -2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.48)$$

3.3.2. Camada ortotrópica geral

- Com as relações de transformação das tensões e das extensões de um sistema de eixos para outro e com a relação de tensão-extensão de uma camada ortotrópica especial, pode obter-se a relação de tensão-extensão de uma camada ortotrópica geral.
- Colocando $m=\cos\theta$ e $n=\sin\theta$, tem-se

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}m^2 & n^2 & -2mn\\ n^2 & m^2 & 2mn\\ mn & -mn & m^2-n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} & \frac{\upsilon_{21}E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} & 0\\ \frac{\upsilon_{12}E_2}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} & \frac{E_2}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} & 0\\ 0 & 0 & G_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m^2 & n^2 & mn\\ n^2 & m^2 & -mn\\ -2mn & 2mn & m^2-n^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} \quad (1.49)$$

Transformação (1.46) tensões material para tensões referência

Equação (1.43) extensões material para tensões material

Transformação (1.47) extensões referência para extensões material

3.3.2. Camada ortotrópica geral

- Relações tensão-extensão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22} & \overline{K}_{23} \\ \overline{K}_{31} & \overline{K}_{32} & \overline{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.50}$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{K}_{11} \\ \overline{K}_{22} \\ \overline{K}_{33} \\ \overline{K}_{12} \\ \overline{K}_{13} \\ \overline{K}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & \left(m^2-n^2\right)^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4+n^4 & -4m^2n^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3-m^3n & 2\left(mn^3-m^3n\right) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n-mn^3 & 2\left(m^3n-mn^3\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{22} \\ K_{12} \\ K_{33} \end{Bmatrix}$$

$$K_{11} = \frac{E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} \quad ; \quad K_{12} = \frac{\upsilon_{21}E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} = \frac{\upsilon_{12}E_2}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} \quad ; \quad K_{22} = \frac{E_2}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} \quad ; \quad K_{33} = G_{12}$$

3.3.2. Camada ortotrópica geral

- Relações extensão-tensão:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.51}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{33} \\ \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & m^2n^2 \\ 4m^2n^2 & 4m^2n^2 & -8m^2n^2 & \left(m^2-n^2\right)^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4+n^4 & -m^2n^2 \\ 2m^3n & -2mn^3 & 2\left(mn^3-m^3n\right) & mn^3-m^3n \\ 2mn^3 & -2m^3n & 2\left(m^3n-mn^3\right) & m^3n-mn^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{33} \end{Bmatrix}$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad ; \quad S_{12} = -\frac{\upsilon_{21}}{E_2} = -\frac{\upsilon_{12}}{E_1} \quad ; \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad ; \quad S_{33} = \frac{1}{G_{12}}$$

3.3.2. Camada ortotrópica geral

Exemplo 1.04: Uma camada de compósito ortotrópico geral está sujeita a uma tensão direta de 60 N/mm² paralela ao eixo *x* e outra tensão direta de 40 N/mm² perpendicular ao eixo *x*. Estando as camadas longitudinais inclinadas 45º em relação ao eixo *x* e sendo as constantes elásticas da camada E_1=150000N/mm², E_2=90000N/mm², G_{12}=5000N/mm² e ν_{12}=0,3, calcule as extensões diretas paralela e perpendicular ao eixo *x* e a extensão de corte referente a *xy* da camada.

3.3.2. Camada ortotrópica geral

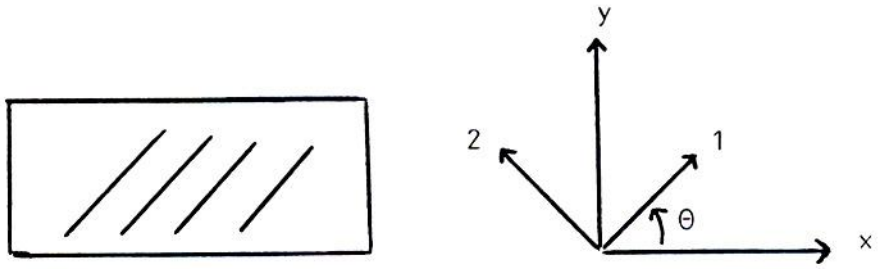
Exemplo 1.05: Uma camada de compósito ortotrópica geral está sujeita a tensões σ_x=120N/mm², σ_y=45N/mm² e σ_{xy}=70N/mm² referentes a um sistema de eixos de carregamento *xy*. Se o ângulo da camada for 45º, determine as tensões equivalentes referentes aos eixos do material.

3.4. Transformação de constantes elásticas

- Foi visto que as relações de tensão-extensão de uma camada ortotrópica especial podem ser definidas completamente por quatro constantes elásticas independentes medidas relativamente a um sistema de eixos ortogonais nos eixos do material.
- As mesmas quatro constantes elásticas são usadas para definir as relações de tensão-extensão de uma camada ortotrópica geral com um determinado ângulo.
- Da definição do material ortotrópico, a camada composta vai ter propriedades diferentes em direções diferentes num ponto.

3.4. Transformação de constantes elásticas

- Assim, é necessário conhecer como as constantes elásticas variam num ponto com a direção de orientação θ das fibras (eixos principais do material), dadas as suas quatro constantes independentes E_1 E_2 ν_{12} e G_{12}.



3.4. Transformação de constantes elásticas

- As relações extensão-tensão de uma camada ortotrópica geral podem ser expressas em termos das constantes elásticas equivalentes:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{m_x}{E_x} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{m_y}{E_y} \\ -\frac{m_x}{E_x} & -\frac{m_y}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (1.58)$$

- Esta equação é equivalente à *equação 1.51*.
- Igualando as duas (*equações 1.51* e *1.58*), obtêm-se as constantes elásticas equivalentes nos eixos de referência (*equações 1.52* a *1.57*).

3.4. Transformação de constantes elásticas

- Equivalência de constantes elásticas:

Da Equação (1.44) tensões material para extensões material:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

Pode escrever-se uma equação equivalente nos eixos de referência:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{m_x}{E_x} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{m_y}{E_y} \\ -\frac{m_x}{E_x} & -\frac{m_y}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

3.4. Transformação de constantes elásticas

- Novas constantes elásticas:

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{E_x} \rightarrow \frac{1}{E_x} = \frac{m^4}{E_1} + \frac{n^4}{E_2} + m^2 n^2 \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \quad (1.52)$$

$$\bar{S}_{22} = \frac{1}{E_y} \rightarrow \frac{1}{E_y} = \frac{n^4}{E_1} + \frac{m^4}{E_2} + m^2 n^2 \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \quad (1.53)$$

$$\bar{S}_{33} = \frac{1}{G_{xy}} \rightarrow \frac{1}{G_{xy}} = m^2 n^2 \left(\frac{4}{E_1} + \frac{4}{E_2} + \frac{8\nu_{12}}{E_1} \right) + \left(m^2 - n^2 \right)^2 \frac{1}{G_{12}} \quad (1.54)$$

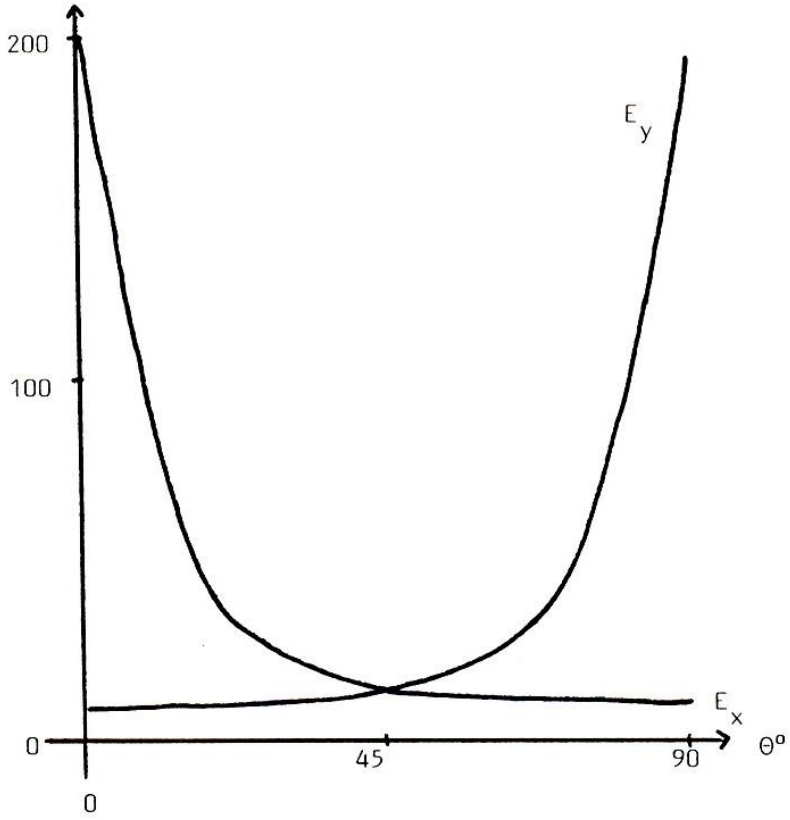
$$\nu_{xy} = E_x \left[\left(m^4 + n^4 \right) \frac{\nu_{12}}{E_1} - m^2 n^2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \right] \quad (1.55)$$

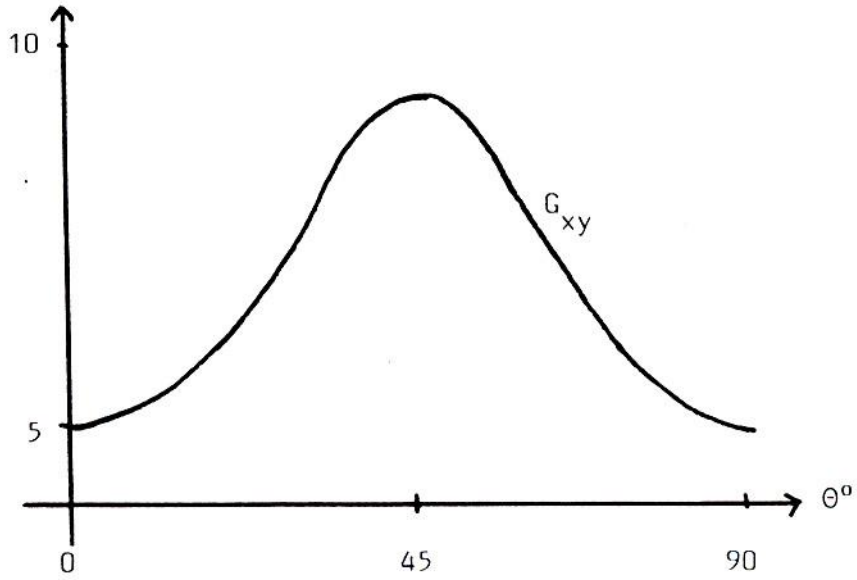
$$m_x = -\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x} = E_x \left[m^3 n \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{2}{E_1} \right) - mn^3 \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{2}{E_2} \right) \right] \quad (1.56)$$

$$m_y = -\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_y} = E_y \left[mn^3 \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{2}{E_1} \right) - m^3 n \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{2}{E_2} \right) \right] \quad (1.57)$$

3.4. Transformação de constantes elásticas

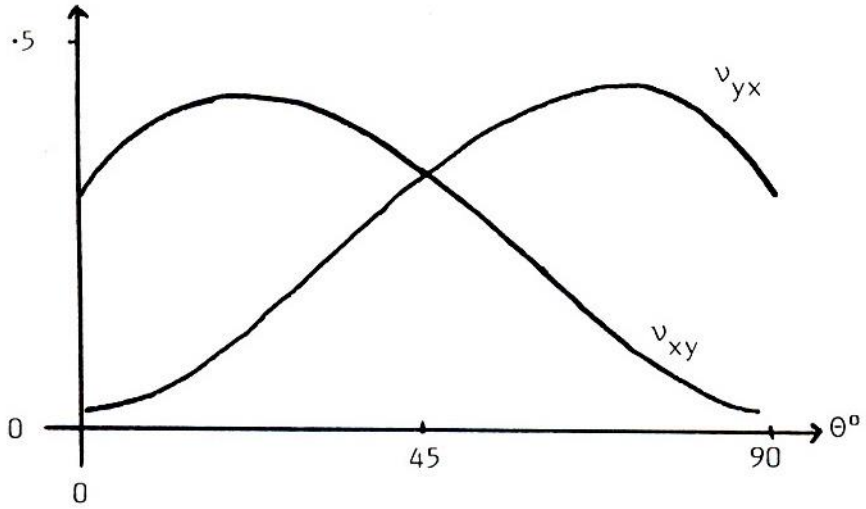
- Variação das constantes elásticas com a orientação:

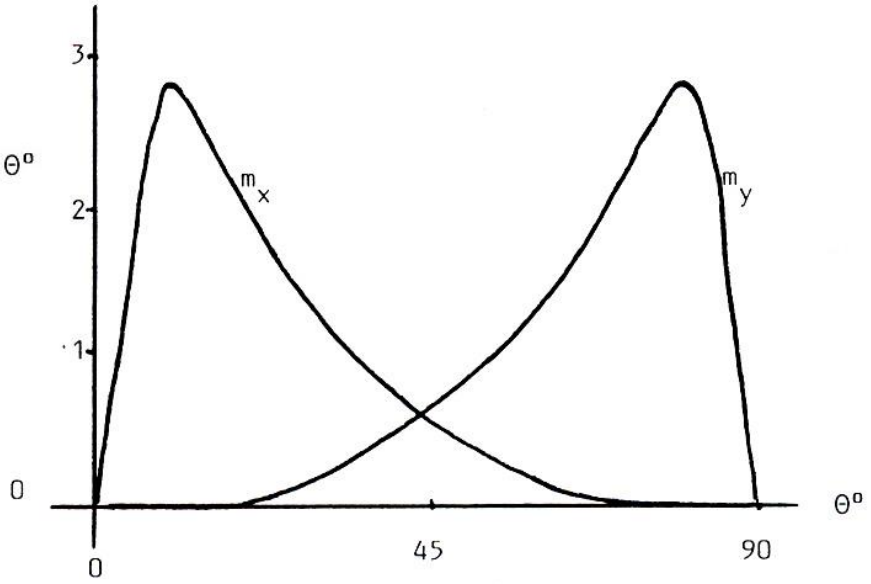




3.4. Transformação de constantes elásticas

- Variação das constantes elásticas com a orientação:





3.4. Transformação de constantes elásticas

- Nas camadas ortotrópicas especiais não existe acoplamento de corte, enquanto nas camadas ortotrópicas gerais existe acoplamento de corte.

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0\\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}$$

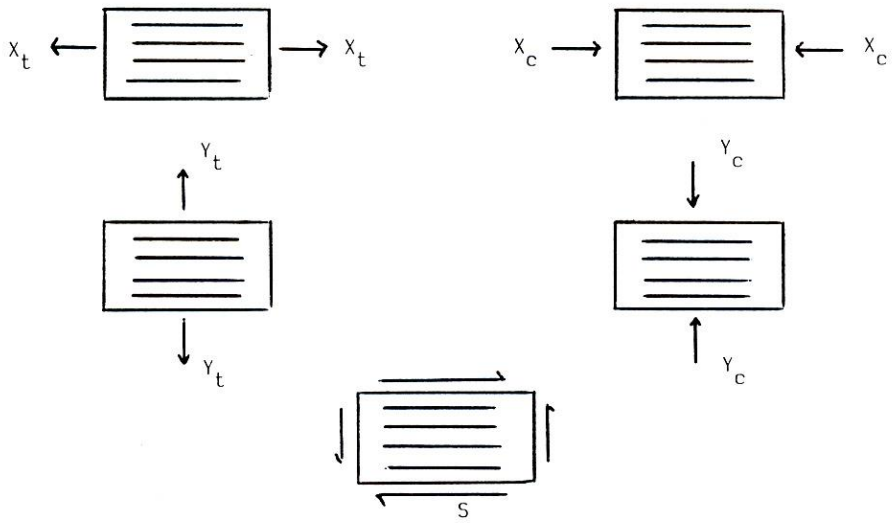
$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{m_x}{E_x}\\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{m_y}{E_y}\\ -\frac{m_x}{E_x} & -\frac{m_y}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}$$

3.5. Análise de resistência

- Dada uma tensão multiaxial num ponto, é necessário avaliar a resistência da camada usando um critério de falha apropriado para verificar se a camada falhou.
- À semelhança da análise de rigidez da camada, os mesmos pressupostos aplicam-se aqui:
  - Teoria de deformações pequenas;
  - Teoria de elasticidade linear;
  - Tensões planas;
  - Homogeneidade macroscópica do material.
- A análise de resistência de uma camada baseia-se na comparação das tensões aplicadas num ponto com as tensões admissíveis.
- As tensões admissíveis são normalmente uma fração das tensões de rutura, que são únicas.

3.5. Análise de resistência

- Tensões de rutura (resistência):
  - X_t – tensão de rutura longitudinal (direção da fibra) à tração;
  - X_c – tensão de rutura longitudinal (direção da fibra) à compressão;
  - Y_t – tensão de rutura transversal (direção da matriz) à tração;
  - Y_c – tensão de rutura transversal (direção da matriz) à compressão;
  - S – tensão de rutura ao corte.



3.5. Análise de resistência

- Existem centenas de critérios de falha na literatura para avaliar a resistência de uma camada de compósito num sistema multiaxial de tensões.
- Os melhores critérios de falha são aqueles que apresentam melhor correlação com resultados experimentais.
- Uma vez que as tensões de rutura são medidas nos eixos do material, então os critérios de falha têm que ser aplicados ao sistema de tensão real nos eixos do material. Ou seja, com um sistema de tensões multiaxial, as tensões (e as extensões) têm que ser transformadas para os eixos do material.
- Existem seis critérios de falha mais comuns.
- Dentro destes, uns são não-interativos e outros são interativos.

3.5. Análise de resistência

- Critérios de falha não-interativos – comparam a tensão (ou extensão) aplicada numa direção com a tensão (ou extensão) de rutura nessa direção:
  - Teoria da tensão máxima;
  - Teoria da extensão máxima;
- Critérios de falha interativos – têm em conta a contribuição de todas as tensões (ou extensões) do sistema multiaxial:
  - Teoria de Tsai-Hill;
  - Teoria de Hoffman;
  - Teoria de tensão de Tsai-Wu;
  - Teoria de extensão de Tsai-Wu.

3.5. Análise de resistência

- Teoria da tensão máxima:
  - Para tensões de tração:

$$\frac{\sigma_1}{X_t} \geq 1$$

$$\frac{\sigma_2}{Y_t} \geq 1$$

  - Para tensões de compressão:

$$\frac{|\sigma_1|}{|X_c|} \geq 1$$

$$\frac{|\sigma_2|}{|Y_c|} \geq 1$$

  - Para tensões de corte:

$$\frac{|\sigma_{12}|}{S} \geq 1$$

3.5. Análise de resistência

- Teoria da extensão máxima:
  - Para extensões de tração:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{X_t}} \geq 1$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{Y_t}} \geq 1$$

  - Para extensões de compressão:

$$\frac{|\varepsilon_1|}{|\varepsilon_{X_c}|} \geq 1$$

$$\frac{|\varepsilon_2|}{|\varepsilon_{Y_c}|} \geq 1$$

  - Para extensões de corte:

$$\frac{|\varepsilon_{12}|}{\varepsilon_S} \geq 1$$

3.5. Análise de resistência

- Teoria de Tsai-Hill:
  - O critério de falha é:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2-\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)\left(\frac{\sigma_2}{X}\right)\geq 1 \qquad (1.59)$$

  - $X=X_t$ ou $X=X_c$ e $Y=Y_t$ ou $Y=Y_c$ correspondentes ao sinal de σ_1 e σ_2, respetivamente.
  - X_c e Y_c são valores absolutos.
  - Este critério indica apenas se ocorre falha mas não indica qual é o modo de falha (tração longitudinal ou compressão transversal, por exemplo).

3.5. Análise de resistência

- Teoria de Hoffman:
  - O critério de falha é:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}(\sigma_1)^2 + F_{22}(\sigma_2)^2 + F_{33}(\sigma_{12})^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 \geq 1 \qquad (1.60)$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \quad ; \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c} \quad ; \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c} \quad ; \quad F_{33} = \frac{1}{S^2}$$

$$F_{12} = -\frac{1}{2X_t X_c}$$

  - X_c e Y_c são valores absolutos.
  - Este critério indica apenas se ocorre falha mas não indica qual é o modo de falha (tração longitudinal ou compressão transversal, por exemplo).
  - Este critério tem em conta se a tensão é de tração ou de compressão.

3.5. Análise de resistência

- Teoria de tensão de Tsai-Wu:
  - O critério de falha é:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}(\sigma_1)^2 + F_{22}(\sigma_2)^2 + F_{33}(\sigma_{12})^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 \geq 1 \qquad (1.61)$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \quad ; \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c} \quad ; \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c} \quad ; \quad F_{33} = \frac{1}{S^2}$$

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11}F_{22}} = \frac{F_{12}^*}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}$$

  - X_c e Y_c são valores absolutos.
  - F^*_{12} é um parâmetro obtido a partir de testes biaxiais.

3.5. Análise de resistência

- Teoria de tensão de Tsai-Wu:
  - Em todos os critérios de falha anteriores são necessárias cinco tensões de rutura básicas $X_t\, X_c\, Y_t\, Y_c\, S$, que são obtidas a partir de testes uniaxiais simples em camadas ortotrópicas especiais.
  - O critério de tensão de Tsai-Wu necessita de um sexto termo independente, F^*_{12}, que só pode ser obtido por testes biaxiais na camada de compósito.
  - A literatura sugere que este parâmetro pode tomar o valor de -0,5, uma vez que a sua obtenção é complicada e extremamente influenciada pelo arranjo experimental.
  - Este critério indica apenas se ocorre falha mas não indica qual é o modo de falha (tração longitudinal ou compressão transversal, por exemplo).
  - Este critério tem em conta se a tensão é de tração ou de compressão.

3.5. Análise de resistência

- Teoria de extensão de Tsai-Wu:
  - O critério de falha é:

$$G_1\varepsilon_1 + G_2\varepsilon_2 + G_{11}(\varepsilon_1)^2 + G_{22}(\varepsilon_2)^2 + G_{33}(\varepsilon_{12})^2 + 2G_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 \geq 1 \qquad (1.62)$$

$$G_1 = F_1Q_{11} + F_2Q_{12}$$
$$G_2 = F_1Q_{12} + F_2Q_{22}$$
$$G_{11} = F_{11}Q_{11}^2 + 2F_{12}Q_{11}Q_{12} + F_{22}Q_{12}^2$$
$$G_{22} = F_{11}Q_{12}^2 + 2F_{12}Q_{12}Q_{22} + F_{22}Q_{22}^2$$
$$G_{33} = F_{33}Q_{33}^2$$
$$G_{12} = F_{11}Q_{11}Q_{12} + F_{12}\left(Q_{11}Q_{22} + Q_{12}^2\right) + F_{22}Q_{12}Q_{22}$$

3.5. Análise de resistência

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \quad ; \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c} \quad ; \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c} \quad ; \quad F_{33} = \frac{1}{S^2}$$

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}} = \frac{F_{12}^*}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \upsilon_{12}\upsilon_{21}} \quad ; \quad Q_{12} = \frac{\upsilon_{21} E_1}{1 - \upsilon_{12}\upsilon_{21}} = \frac{\upsilon_{12} E_2}{1 - \upsilon_{12}\upsilon_{21}} \quad ; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \upsilon_{12}\upsilon_{21}} \quad ; \quad Q_{33} = G_{12}$$

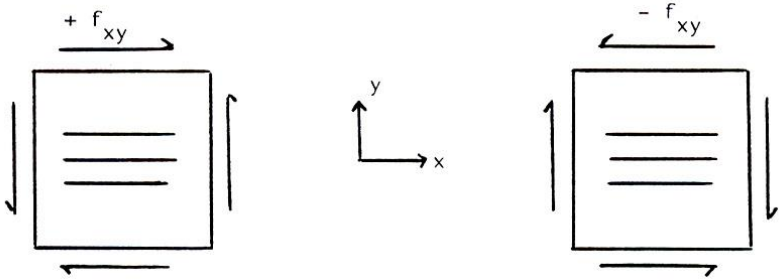
- X_c e Y_c são valores absolutos.
- Este critério baseia-se no pressuposto de que a camada de compósito tem um comportamento linear até à rutura.
- Este critério indica apenas se ocorre falha mas não indica qual é o modo de falha (tração longitudinal ou compressão transversal, por exemplo).

3.5. Análise de resistência

- Escolha do critério de falha:
  - Não existe um critério que permita prever com precisão a resistência de uma camada de compósito sujeita a um sistema multiaxial de carregamento.
  - É difícil saber qual é o critério de falha mais apropriado para uma dada aplicação (um dado sistema multiaxial de tensões e uma camada de compósito).
  - Em geral, é conveniente adotar um ou dois critérios não-interativos e um ou dois critérios interativos.
  - No mínimo, deve usar-se um critério interativo e um critério não-interativo. O primeiro permite identificar a existência ou não de falha e o segundo permite identificar o modo de falha associado ao sistema multiaxial de tensões.

3.5. Análise de resistência

- Sinal do sistema de tensão de corte:
  - Corte numa camada ortotrópica especial:

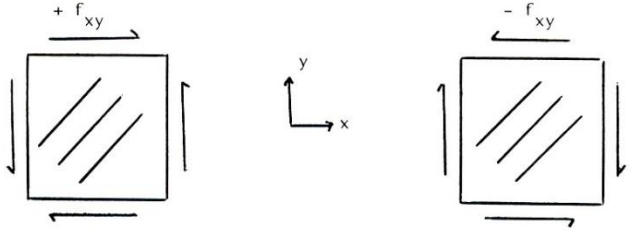


  - O sistema de tensões num plano a 45º é:

  - Estes sistemas são idênticos num sistema positivo e negativo de corte numa camada ortotrópica especial.

3.5. Análise de resistência

- Sinal do sistema de tensão de corte:
  - Corte numa camada ortotrópica geral orientada a 45º:



  - Na direção dos eixos do material, o sistema de tensões é:

  - A tensão de corte positiva resulta numa tensão de tração na direção da fibra e uma tensão de compressão na direção da matriz.
  - A tensão de corte negativa resulta numa tensão normal de compressão na direção da fibra e uma tensão de tração na direção da matriz.

3.5. Análise de resistência

- Tensões de rutura (resistências) genéricas típicas de materiais compósitos unidirecionais (60% de fibra em volume), N/mm²:

	X_t	X_c	Y_t	Y_c	S
Mild Steel	550	550*	550	550*	
Alum. Alloy	450	450*	450	450*	
HM- C/Epoxy	1000	850	40	200	60
HS- C/Epoxy	1500	1200	50	250	70
E - G/Epoxy	1000	600	30	110	40
Kevlar/Epoxy	1300	280	30	140	60
Boron/Epoxy	1400	2800	90	280	140

3.5. Análise de resistência

Exemplo 1.06: Um laminado de compósito fabricado com fibras de vidro E unidirecional e resina epóxi encontra-se num estado plano de tensões como indicado na *figura 1.06*, onde as fibras estão alinhadas com a tensão direta horizontal. Usando o critério de Tsai-Hill, determine se existe falha neste laminado e qual o modo de falha caso exista. Repita o cálculo usando o critério de Tsai-Wu.

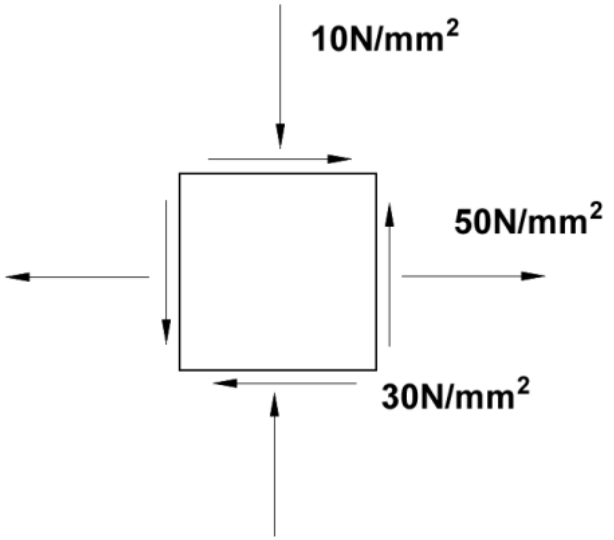


Figura 1.06 Estado plano de tensões do exemplo *1.06*

3.6. Pressupostos e notação do laminado

Nas secções anteriores estivemos interessados nas propriedades de uma única camada que pode ser unidirecional, ortotrópica especial ou ortotrópica geral.

As camadas estão claramente limitadas na magnitude e no tipo de carregamento que conseguem suportar pelo que na prática duas ou mais camadas são empilhadas para formar um único elemento, o laminado.

As diferentes camadas do laminado podem ser orientadas com diferentes ângulos relativamente aos eixos de referência do laminado para se obter a resistência e a rigidez necessárias em direções específicas.

Estas propriedades do laminado dependem das propriedades individuais das camadas e da ordem em que estão empilhadas.

3.6.1. Pressupostos

Para além dos pressupostos feitos para a camada, assume-se o seguinte para os laminados:

1. O laminado obedece à lei de Hooke
2. Cada camada pode ser isotrópica ou ortotrópica
3. O laminado é fino pelo que as tensões e extensões de corte através da espessura são despresáveis
4. A ligação entre camadas é perfeita e infinitesimamente pequena pelo que não existe escorregamento entre camadas e as extensões e os deslocamentos através da ligação são contínuos
5. Os deslocamentos e as deformações são pequenos

3.6.2. Notação

O método para especificar as camadas constituintes de um laminado está representado na *figura 1.07* onde as camadas estão listadas sequencialmente de uma face até à outra.

Vamos adotar o mesmo sistema de eixos e designação da orientação da camada mostradas no *acetato 67* com a adição do eixo *z* perpendicular ao plano do laminado.

Geralmente o plano *xy* coincide com o plano médio do laminado.

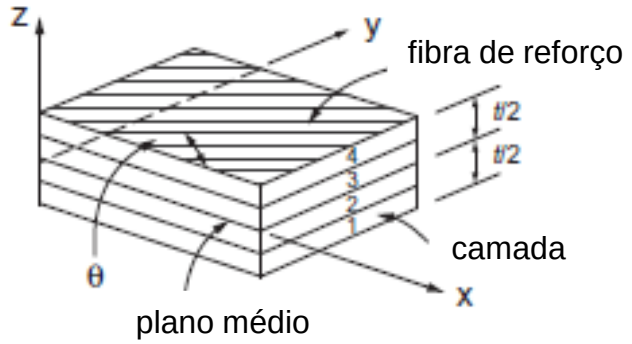


Figura 1.07 Sistema de eixos de um laminado.

3.6.2. Notação

- Como um polímero reforçado com fibras é composto por um empilhamento de camadas umas sobre as outras com orientações diferentes relativamente a um eixo de referência, existe um número infinito de configurações possíveis de laminados.
- Assim, a notação do laminado tem que descrever o seguinte:
  - Material compósito das camadas;
  - Orientação das camadas relativamente a um sistema de eixos de referência;
  - Espessura das camadas;
  - Sequência de empilhamento das camadas.

3.6.2. Notação

- A menos que seja especificado, assume-se que todas as camadas são do mesmo material;
- A menos que seja especificado, assume-se que todas as camadas têm a mesma espessura (laminado regular);
- Parêntesis indicam o início e fim da notação do laminado. A primeira camada é a de baixo e a última é a de cima;
- Cada camada é identificada por um número correspondente ao ângulo (em graus) da camada referente aos eixos de referência *xy*;
- Camadas individuais adjacentes são separadas pelo sinal de barra "/";

3.6.2. Notação

- Camadas adjacentes com a mesma orientação são indicadas por um subscrito numérico.
  - Esta notação pode ser usada para descrever um laminado que tem a espessura de uma camada diferente da espessura de outras camadas;
- Camadas adjacentes com orientação positiva e negativa têm, respetivamente, o sinal + e – antes da camada correspondente;

3.6.2. Notação

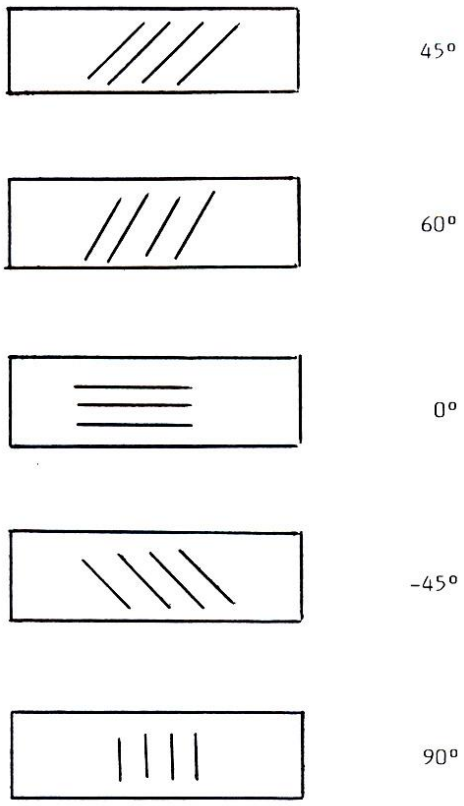
- Um laminado simétrico, em geometria e propriedades, em torno do seu plano médio pode ser representado em forma abreviada.
  - Um laminado é simétrico quando as camadas da metade superior (em propriedades, orientação, espessura e posição relativamente ao plano médio das camadas) são idênticas às camadas da metade inferior do laminado;
  - Um laminado simétrico com um número par de camadas, é representado com metade do número de camadas (na metade inferior do laminado) com o subscrito *s* no final do parêntesis de fecho;
  - Um laminado simétrico com um número ímpar de camadas, é representado de forma idêntica mas com uma barra sobre a camada média.

3.6.2. Notação

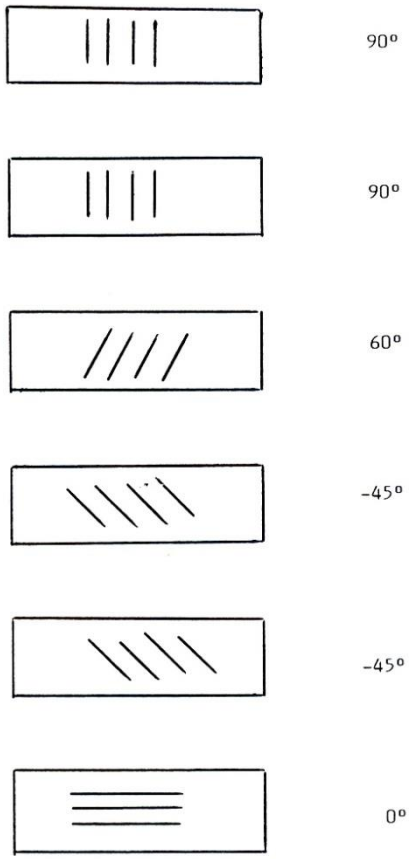
- Sequências repetidas de camadas são contidas dentro de parêntesis reto. Um subscrito numérico no final dos parêntesis reto representa a frequência da sequência;
- Quando um laminado híbrido (laminado com mais do que um material compósito) é considerado, os ângulos da camada têm em subscrito uma abreviatura a indicar o material compósito usado.
- Em seguida apresentam-se alguns exemplos.

3.6.2. Notação

- Exemplos:



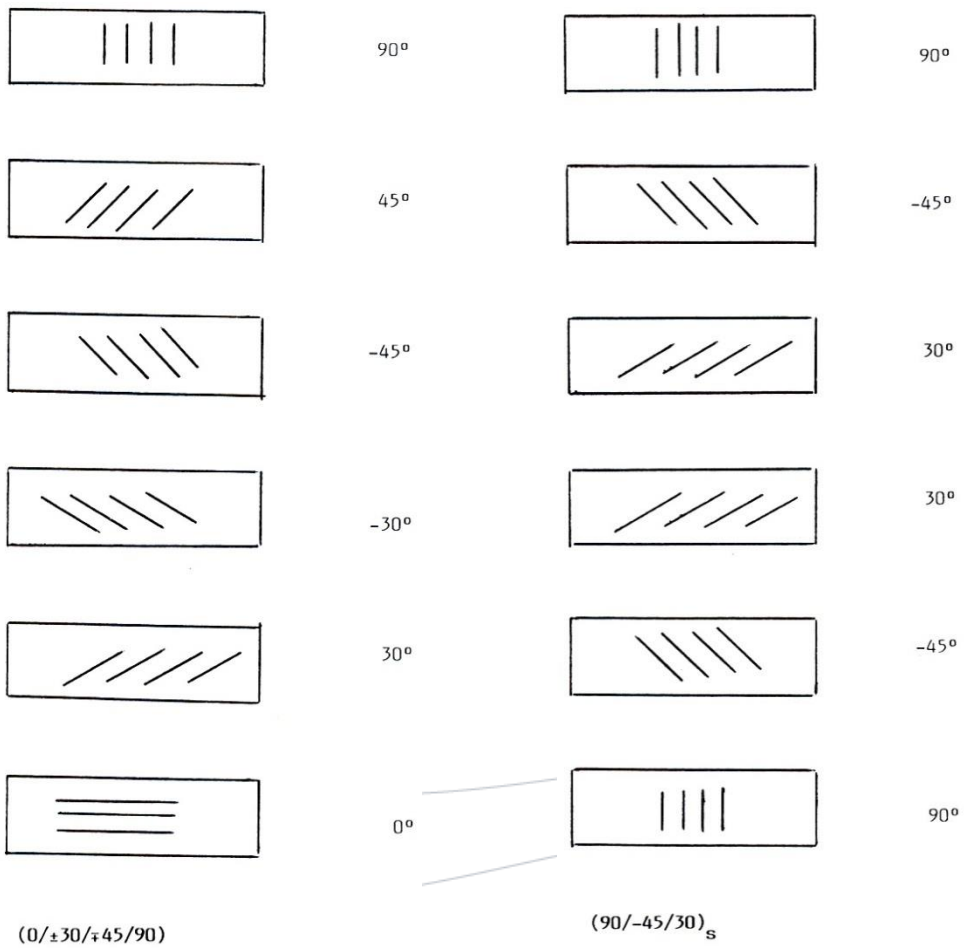
(90/-45/0/60/45)



$(0/-45_2/60/90_2)$

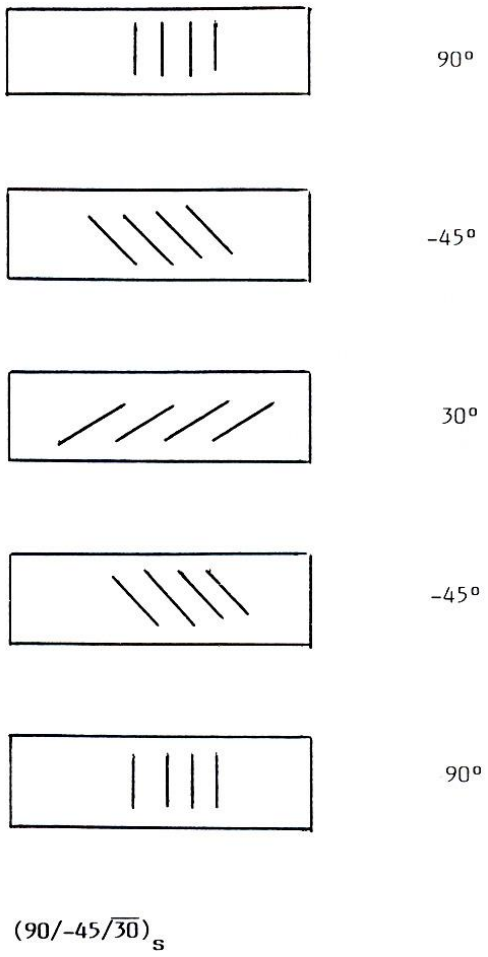
3.6.2. Notação

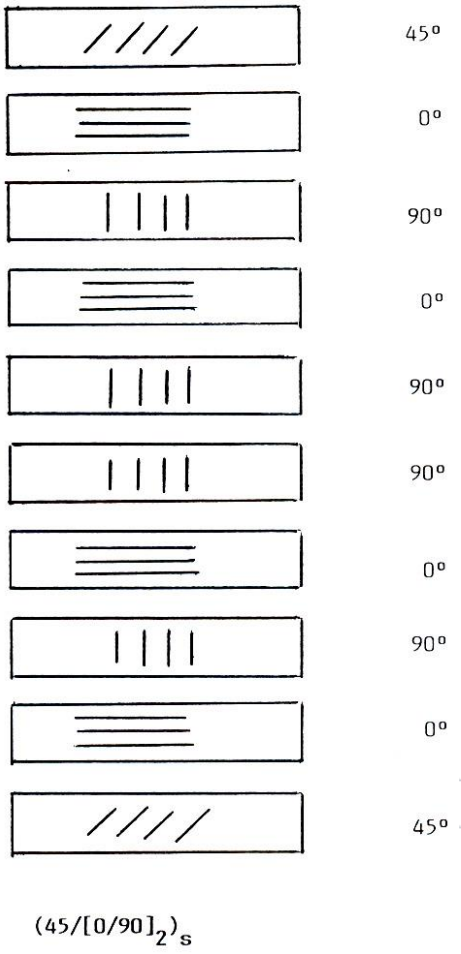
- Exemplos:



3.6.2. Notação

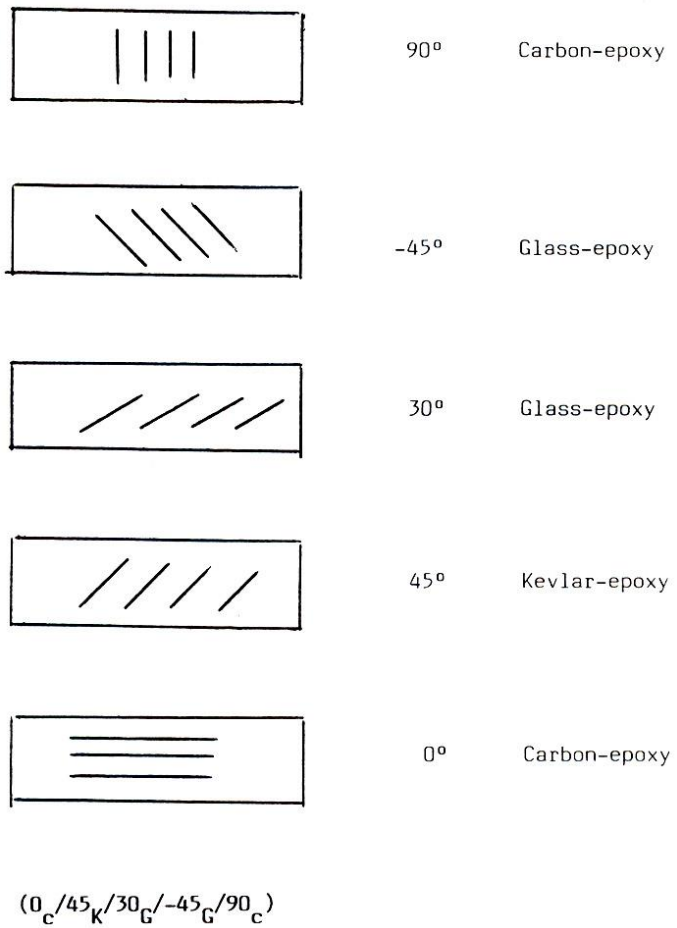
- Exemplos:

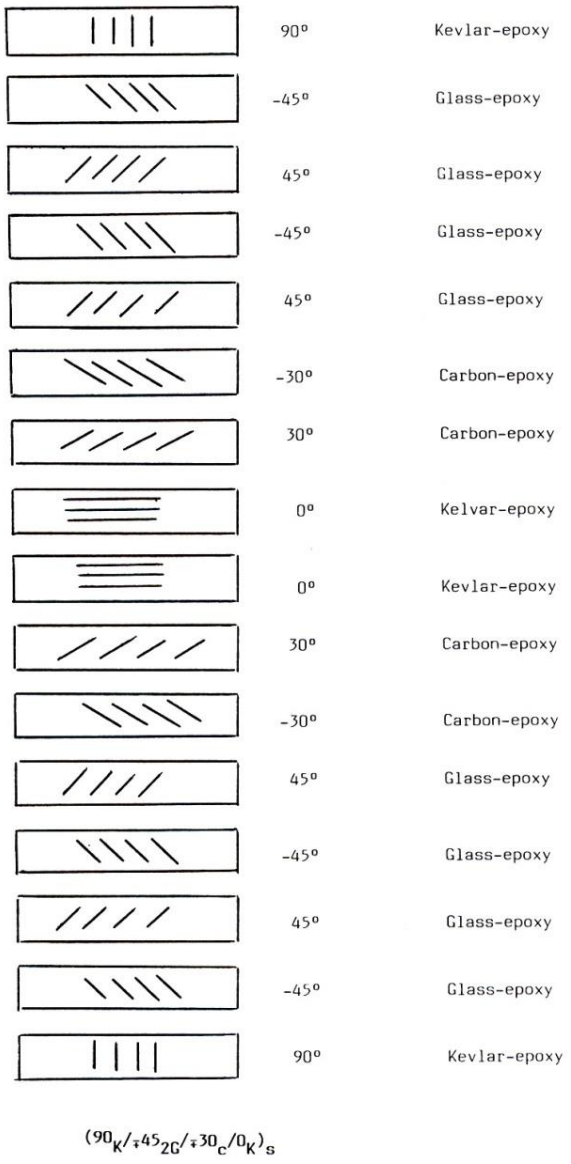




3.6.2. Notação

- Exemplos:





3.7. Laminado sujeito a carregamento no plano

Os laminados, particularmente os de estruturas de aeronaves, são finos e suportam geralmente carregamentos no seu próprio plano.

Vamos, por isso, restringir a análise a um estado plano de tensões, apesar de poder haver carregamentos de flexão e de torção.

A *figura 1.08* mostra um elemento $\delta x \delta y$ num ponto do laminado sujeito a forças por unidade de comprimento planas diretas e de corte, N_x, N_y e N_{xy}.

Estas forças por unidade de comprimento nos lados do laminado são positivas no sentido mostrado.

A espessura do laminado é t.

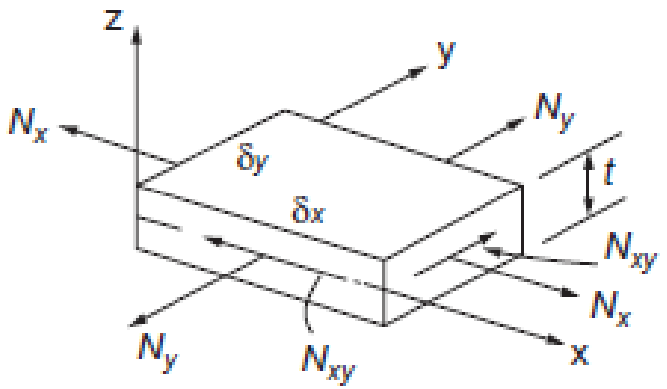


Figura 1.08 Força no plano atuando num ponto do laminado.

3.7. Laminado sujeito a carregamento no plano

A magnitude do carregamento vai produzir tensões diretas e de corte, σ_x, σ_y e σ_{xy}, que podem variar de camada para camada devido às possíveis diferenças das propriedades das camadas.

Vamos representar estas forças por unidade de comprimento em função das tensões na camada.

A *figura 1.09* mostra parte da secção transversal de um laminado multi-camada no plano *xz*.

Suponha-se que existem *N* camadas no laminado e que estão numeradas de baixo para cima.

Uma vez que vamos lidar com forças por unidade de comprimento (largura), a largura real da secção transversal do laminado não é importante e não entra nas equações.

3.7. Laminado sujeito a carregamento no plano

Considere-se a camada p.

A ordenada da sua face inferior é z_{p-1} e a da face superior é z_p.

A força normal por unidade de largura na camada na direção x é

$$N_{x,p} = \int_{z_{p-1}}^{z_p} \sigma_{x,p} dz \qquad (1.63)$$

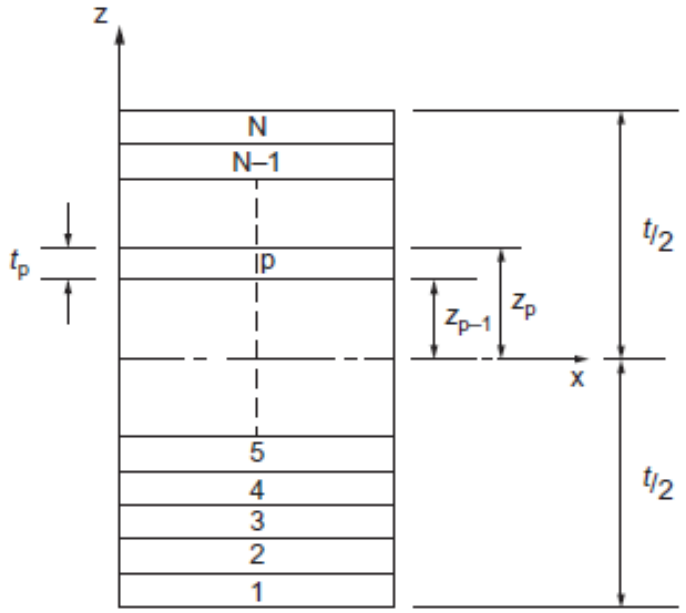


Figura 1.09 Porção de um laminado.

3.7. Laminado sujeito a carregamento no plano

A força direta por unidade de largura total no laminado na direção *x* é a soma das forças em cada camada.

Assim,

$$N_x = \sum_{p=1}^{N} N_{x,p} = \sum_{p=1}^{N} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \sigma_{x,p} dz \qquad (1.64)$$

Da mesma forma,

$$N_y = \sum_{p=1}^{N} N_{y,p} = \sum_{p=1}^{N} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \sigma_{y,p} dz \qquad (1.65)$$

$$N_{xy} = \sum_{p=1}^{N} N_{xy,p} = \sum_{p=1}^{N} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \sigma_{xy,p} dz \qquad (1.66)$$

3.7. Laminado sujeito a carregamento no plano

Apesar das tensões poderem ser diferentes nas diferentes camadas do laminado, as extensões são constantes na espessura do laminado.

Assim, podemos representar as *equações 1.64* a *1.66* em função das extensões do laminado.

A *equação 1.50* que relaciona as tensões com as extensões da camada pode ser usada.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22} & \overline{K}_{23} \\ \overline{K}_{31} & \overline{K}_{32} & \overline{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.50)$$

3.7. Laminado sujeito a carregamento no plano

Substituindo para $\sigma_{x,p}$ da *equação 1.50* na *equação 1.64* tem-se

$$N_x = \sum_{p=1}^{N} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} \end{bmatrix}_p \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} dz \qquad (1.67)$$

Uma vez que as extensões são constantes na espessura da camada elas podem sair para fora do integral:

$$N_x = \sum_{p=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} \end{bmatrix}_p \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \int_{z_{p-1}}^{z_p} dz$$

Integrando tem-se

$$N_x = \sum_{p=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} \end{bmatrix}_p \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \left(z_p - z_{p-1} \right) \qquad (1.68)$$

3.7. Laminado sujeito a carregamento no plano

De forma idêntica obtém-se

$$N_y = \sum_{p=1}^{N} \left[\overline{K}_{12} \quad \overline{K}_{22} \quad \overline{K}_{23} \right]_p \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \left(z_p - z_{p-1} \right) \tag{1.69}$$

$$N_{xy} = \sum_{p=1}^{N} \left[\overline{K}_{13} \quad \overline{K}_{23} \quad \overline{K}_{33} \right]_p \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \left(z_p - z_{p-1} \right) \tag{1.70}$$

Reescrevendo estas três equações na forma de matriz tem-se

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{p=1}^{N} \left(z_p - z_{p-1} \right) \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22} & \overline{K}_{23} \\ \overline{K}_{31} & \overline{K}_{32} & \overline{K}_{33} \end{bmatrix}_p \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.71}$$

3.7. Laminado sujeito a carregamento no plano

Para simplificar a escrita ainda se pode escrever esta equação na seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.72}$$

onde

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^{N} \left(z_p - z_{p-1}\right)\left(\overline{K}_{ij}\right)_p \quad i = 1,3;\ j = 1,3 \tag{1.73}$$

que é chamada de rigidez de extensão do laminado e relaciona as forças por unidade de largura no plano com as extensões no plano médio (que são constantes na espessura).

3.7. Laminado sujeito a carregamento no plano

A rigidez de extensão A_{ij}, depende da rigidez reduzida de cada camada (ver *equação 1.43*) e do termo da ordenada (z_p-z_{p-1}) que é, de facto, a espessura da camada, t_p.

Assim

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^{N} t_p \left(\overline{K}_{ij}\right)_p \quad i = 1,3;\ j = 1,3 \tag{1.74}$$

3.8. Constantes elásticas equivalentes

Nalgumas situações, em particular nas fases iniciais do projeto, pode ser conveniente escrever as relações da força por unidade de largura-extensão (*equação 1.72*) como relações extensão-força por unidade de largura.

Reescrevendo essa equação na forma simplificada

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.75}$$

Podemos escrever as extensões em função das forças por unidade de largura

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.76}$$

3.8. Constantes elásticas equivalentes

onde $[A]^{-1}$ é a inversa da matriz $[A]$.

Para um laminado simétrico pode verificar-se que as cargas no plano não produzem deformações fora do plano.

Podem, assim, definir-se tensões médias através da espessura do laminado como

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N_x}{t} \quad \bar{\sigma}_y = \frac{N_y}{t} \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{N_{xy}}{t} \tag{1.77}$$

A *equação 1.76* fica

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = t[A]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.78}$$

3.8. Constantes elásticas equivalentes

A inversão da matriz [A] pode ser feita usando álgebra matricial padrão.

Representando $[A]^{-1}$ como

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.79}$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(A_{22}A_{33} - A_{23}^2\right)/AA \\ a_{22} &= \left(A_{11}A_{33} - A_{13}^2\right)/AA \\ a_{33} &= \left(A_{11}A_{22} - A_{12}^2\right)/AA \\ a_{12} &= \left(A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}\right)/AA \\ a_{13} &= \left(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}\right)/AA \\ a_{23} &= \left(A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23}\right)/AA \end{aligned} \tag{1.80}$$

3.8. Constantes elásticas equivalentes

e

$$AA = A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{23}A_{13} - A_{22}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2 - A_{11}A_{23}^2 \qquad (1.81)$$

A *equação 1.78* pode ser escrita na seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{\sigma}_x \\ \overline{\sigma}_y \\ \overline{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (1.82)$$

Comparando a *equação 1.58* de uma camada ortotrópica geral com a *equação 1.82* de um laminado podem obter-se as constantes elásticas equivalentes do laminado nos eixos da estrutura (eixos de referência).

3.8. Constantes elásticas equivalentes

Assim, verifica-se que

$$t\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{m_x}{E_x} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{m_y}{E_y} \\ -\frac{m_x}{E_x} & -\frac{m_y}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}$$

3.8. Constantes elásticas equivalentes

Logo, as constantes elásticas equivalentes são

$$E_x = \frac{1}{t a_{11}}$$

$$E_y = \frac{1}{t a_{22}}$$

$$G_{xy} = \frac{1}{t a_{33}}$$

$$\nu_{xy} = -t a_{12} E_x = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \qquad (1.83)$$

$$\nu_{yx} = -t a_{12} E_y = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$$

$$m_x = -t a_{13} E_x = -\frac{a_{13}}{a_{11}}$$

$$m_y = -t a_{23} E_y = -\frac{a_{23}}{a_{22}}$$

3.8. Constantes elásticas equivalentes

Exemplo 1.07: A *figura 1.10* mostra a secção transversal no plano *xz* de um laminado simétrico com quatro camadas isotrópicas orientadas na mesma direção. Todas as camadas têm uma espessura de 0,15 mm. Sabendo que o módulo de Young das camadas é 70000 N/mm² e que o coeficiente de Poisson é 0,3, calcular as constantes elásticas equivalentes do laminado para o caso de carregamento no plano.

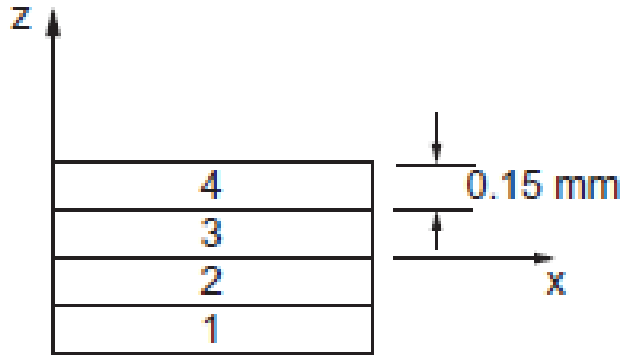


Figura 1.10 Laminado do *exemplo 1.07*

3.8. Constantes elásticas equivalentes

Exemplo 1.08: A *figura 1.11* mostra a secção transversal no plano *xz* de um laminado simétrico com quatro camadas ortotrópicas orientadas a 0º. Todas as camadas têm uma espessura de 0,15 mm. As propriedades da camada são: E_1=140000 N/mm², E_2=10000 N/mm², G_{12}=5000N/mm² e ν_{12}=0,3. Calcular as constantes elásticas equivalentes do laminado.

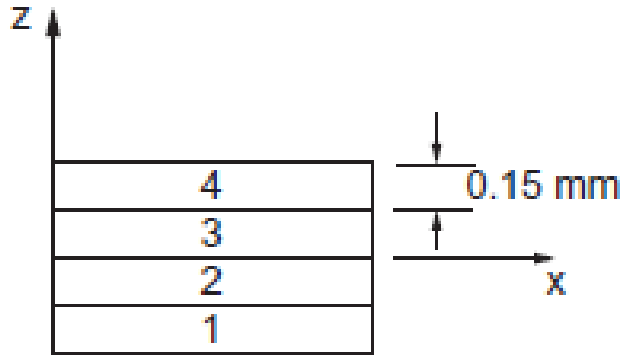


Figura 1.11 Laminado do *exemplo 1.08*

3.8. Constantes elásticas equivalentes

Exemplo 1.09: A *figura 1.12* mostra a secção transversal no plano *xz* de um laminado simétrico com quatro camadas ortotrópicas orientadas a 45º. Todas as camadas têm uma espessura de 0,15 mm. As propriedades da camada são: E_1=140000 N/mm², E_2=10000 N/mm², G_{12}=5000N/mm² e ν_{12}=0,3. Calcular as constantes elásticas equivalentes do laminado.

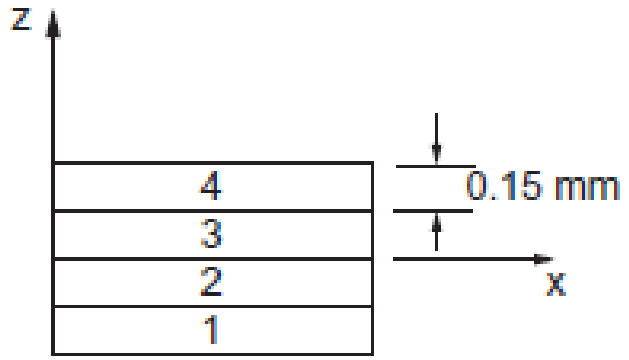


Figura 1.12 Laminado do *exemplo 1.09*

3.8. Constantes elásticas equivalentes

O método para determinar as constantes elásticas equivalentes de um laminado ilustrado nos exemplos anteriores é aplicável a todos os laminados simétricos.

Pode ver-se, no entanto, que ocorrem muitas simplificações quando as camadas são idênticas em termos de material e orientação.

Obviamente, nem sempre se verifica esta situação num laminado.

3.8. Constantes elásticas equivalentes

Exemplo 1.10: O laminado de quatro camadas simétrico da *figura 1.13* tem camadas de espessura igual e duas orientações diferentes, 30º e 45º. Para as camadas 1 e 4 E_1=200000N/mm², E_2=15000N/mm², G_{12}=10000N/mm² e ν_{12}=0,3. Para as camadas 2 e 3 E_1=140000N/mm², E_2=10000N/mm², G_{12}=5000N/mm² e ν_{12}=0,3. Calcular as constantes elásticas equivalentes do laminado.

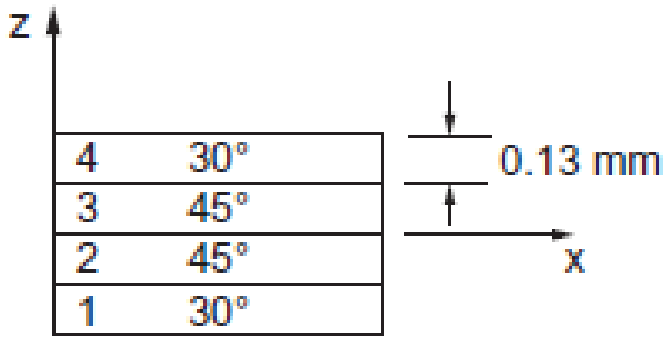


Figura 1.13 laminado do *exemplo 1.10*

3.9. Resistência do laminado

Para avaliar a resistência do laminado é necessário calcular primeiro as tensões individuais de cada camada.

Apesar de se ter verificado que todas as camadas do laminado sofrem a mesma extensão, as tensões variam de camada para camada dependendo da sua orientação e propriedades.

Tendo calculado as tensões em cada camada, a resistência do laminado pode ser investigada usando qualquer critério de falha adequado.

3.9. Resistência do laminado

- Por exemplo, segundo a teoria da tensão máxima, qualquer camada *p* do laminado falha quando:
  - Para tensões de tração:

$$\frac{\sigma_1}{X_t} \geq 1$$

$$\frac{\sigma_2}{Y_t} \geq 1$$

  - Para tensões de compressão:

$$\frac{|\sigma_1|}{|X_c|} \geq 1$$

$$\frac{|\sigma_2|}{|Y_c|} \geq 1$$

  - Para tensões de corte:

$$\frac{|\sigma_{12}|}{S} \geq 1$$

3.9. Resistência do laminado

Exemplo 1.11: O laminado de quatro camadas simétrico da *figura 1.14* tem camadas de espessura igual e duas orientações diferentes, 30º e 45º. Para as camadas 1 e 4 E_1=200000 N/mm², E_2=15000 N/mm², G_{12}=10000 N/mm² e ν_{12}=0,3. Para as camadas 2 e 3 E_1=140000 N/mm², E_2=10000 N/mm², G_{12}=5000 N/mm² e ν_{12}=0,3. Sabendo que o laminado está sujeito a uma única força por unidade de comprimento N_x=100 N/mm, calcular as tensões nas camadas e verificar a resistência do laminado quando X_t=1500N/mm², X_c=1200 N/mm², Y_t=50 N/mm², Y_c=250 N/mm² e S=70 N/mm².

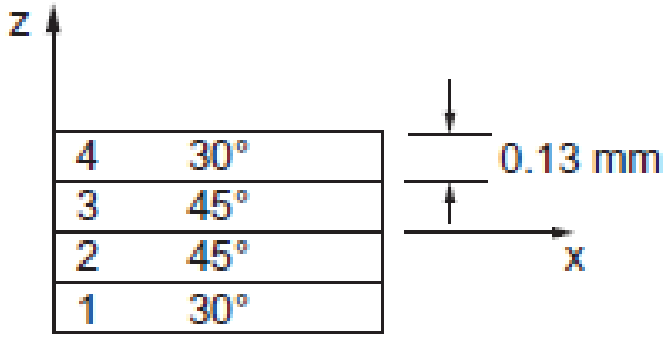


Figura 1.14 laminado do *exemplo 1.11*

4. Vigas de Paredes Finas em Compósito

Alguns elementos estruturais em muitos aviões modernos são fabricados em materiais compósitos.

Estes componentes têm geralmente a forma de laminados com empilhamento de camadas coladas entre si.

A orientação de cada camada pode ser diferente das camadas adjacentes para que a resistência e a rigidez desejadas numa dada direção sejam obtidas.

A determinação das propriedades elásticas dos laminados é longa, como se viu anteriormente, e aqui vai assumir-se que são conhecidas para nos concentrarmos no efeito da construção em compósito na análise estrutural.

4. Vigas de Paredes Finas em Compósito

A determinação das tensões e deslocamentos em vigas de paredes finas, de secção aberta e fechada, sujeitas a cargas axiais, de flexão, de corte e de torção já é conhecida.

Vamos, agora, reexaminar estes casos para determinar o efeito da fabricação em compósito.

A *figura 1.15* mostra uma viga de paredes finas que pode ter secção aberta ou fechada e que é fabricada com laminados ①, ②, ③,...

As dimensões dos laminados e as suas propriedades elásticas são diferentes.

A viga está sujeita a cargas axiais, de flexão, de corte e de torção, as quais são positivas nos sentidos mostrados.

4. Vigas de Paredes Finas em Compósito

Os eixos *XYZ* da viga estão representados em maiúsculas.

O eixos do laminado *xy* estão representados em minúsculas.

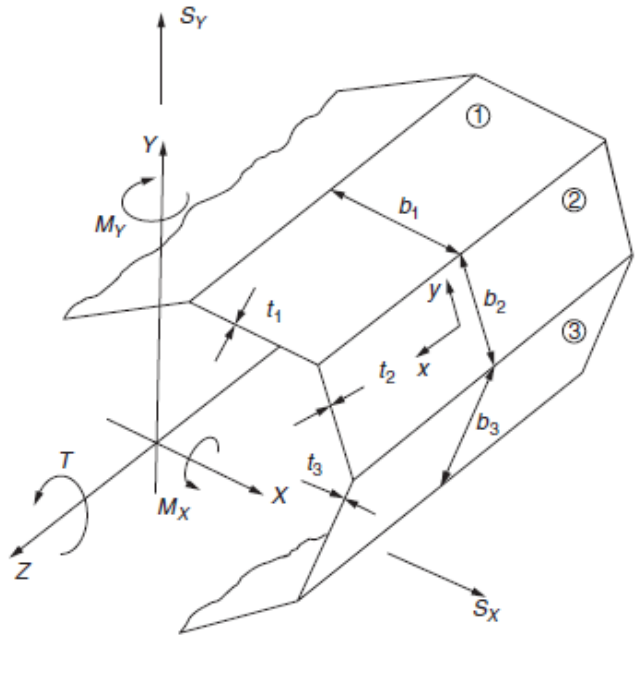


Figura 1.15 Secção em compósito de paredes finas

4.1. Carga axial

Suponha-se que a porção da carga axial P suportada por um laminado i é P_i.

A extensão longitudinal $\varepsilon_{x,i}$ no laminado é igual à extensão longitudinal ε_z na viga uma vez que um pressuposto básico da análise, exceto no caso da torção, é que secções planas permanecem planas após a aplicação da carga.

Assim

$$\frac{P_i}{b_i t_i} = \varepsilon_{x,i} E_{x,i} \tag{1.84}$$

Então

$$P_i = b_i t_i \varepsilon_{x,i} E_{x,i}$$

4.1. Carga axial

ou

$$P_i = \varepsilon_z b_i t_i E_{x,i} \tag{1.85}$$

A carga total na viga é

$$P = \varepsilon_z \sum_{i=1}^{n} b_i t_i E_{x,i} \tag{1.86}$$

Pode reparar-se que na Eq. (1.85) ε_z é a extensão longitudinal na secção da viga e, por isso, tem o mesmo valor para todos os laminados e pode ser colocada fora do somatório.

O módulo de Young para um dado laminado é o mesmo quando se refere ao eixo *x* ou ao eixo *Z*.

4.1. Carga axial

Assim, a Eq. (1.86) pode ser reescrita na forma

$$P = \varepsilon_z \sum_{i=1}^{n} b_i t_i E_{z,i} \tag{1.87}$$

e

$$\varepsilon_z = \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} b_i t_i E_{z,i}} \tag{1.88a}$$

Considerando que $b_i t_i$ é a área da secção do laminado i, também se pode escrever (sendo AE a rigidez axial)

$$\varepsilon_z = \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} A_i E_{z,i}} \tag{1.88b}$$

4.1. Carga axial

Exemplo 1.12: Uma viga tem uma secção em compósito, simétrica em relação ao eixo horizontal, como mostra a *figura 1.16*. Os laminados das mesas são idênticos com módulo de Young E_z=60000N/mm² enquanto que a alma tem um módulo elástico de E_z=20000N/mm². Se a viga estiver sujeita a uma carga axial de 40kN, determine a força axial em cada laminado.

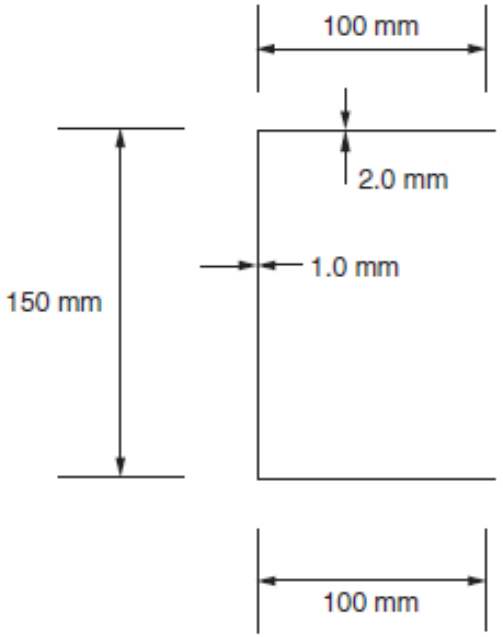


Figura 1.16 Secção da viga do exemplo *1.12*

4.2. Flexão

Anteriormente já foram derivadas expressões para a distribuição de tensões diretas em secções assimétricas.

Nesta derivação, a tensão direta num elemento da secção transversal da viga foi expressa em função do módulo de Young, do raio de curvatura da viga, das coordenadas do elemento e da inclinação do eixo neutro relativamente ao eixo X.

Assumiu-se que a viga era constituída por um material uniforme e, por isso, o módulo de Young era constante.

Para uma viga em compósito, esta situação não é necessariamente verdade, uma vez que o *E* pode variar de laminado para laminado.

4.2. Flexão

Assim, os momentos fletores ficam

$$M_x = \int_A \frac{E_{z,i}}{\rho}\left(x\sin\alpha + y\cos\alpha\right)y\,dA$$

$$M_y = \int_A \frac{E_{z,i}}{\rho}\left(x\sin\alpha + y\cos\alpha\right)x\,dA$$

ou

$$M_x = \frac{\sin\alpha}{\rho}\int_A E_{z,i}\,xy\,dA + \frac{\cos\alpha}{\rho}\int_A E_{z,i}\,y^2\,dA$$

$$M_y = \frac{\sin\alpha}{\rho}\int_A E_{z,i}\,x^2\,dA + \frac{\cos\alpha}{\rho}\int_A E_{z,i}\,xy\,dA$$

Assim, definem-se os segundos momentos de área modificados que incluem os módulos $E_{z,i}$ referentes aos eixos *XYZ*.

4.2. Flexão

Os segundos momentos de área modificados ficam

$$I'_{XX} = \int_A E_{Z,i} Y^2 dA \quad ; \quad I'_{YY} = \int_A E_{Z,i} X^2 dA \quad ; \quad I'_{XY} = \int_A E_{Z,i} XY dA \qquad (1.89)$$

pelo que

$$M_X = \frac{\sin\alpha}{\rho} I'_{XY} + \frac{\cos\alpha}{\rho} I'_{XX}$$

$$M_Y = \frac{\sin\alpha}{\rho} I'_{YY} + \frac{\cos\alpha}{\rho} I'_{XY}$$

Resolvendo

$$\frac{\sin\alpha}{\rho} = \frac{M_Y I'_{XX} - M_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\rho} = \frac{M_X I'_{YY} - M_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}}$$

4.2. Flexão

Logo, a tensão direta fica

$$\sigma_Z = E_{Z,i}\left[\left(\frac{M_Y I'_{XX} - M_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)x + \left(\frac{M_X I'_{YY} - M_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)y\right] \qquad (1.90)$$

Esta equação é aplicável a secções de parede fina abertas ou fechadas.

Pode verificar-se que os valores dos segundos momentos e produto de área modificados, I'_{XX}, I'_{YY} e I'_{XY}, correspondem aos valores de rigidez à flexão EI_{XX}, EI_{YY} e EI_{XY}.

4.2. Flexão

Exemplo 1.13: Uma viga de paredes finas tem a secção transversal da *figura 1.17* e está sujeita a um momento fletor de 1000 Nm aplicado no plano vertical. Se os módulos de Young dos laminados das mesas forem E_z=50000 N/mm² e o da alma E_z=15000 N/mm², determine o valor máximo da tensão direta na secção transversal da viga.

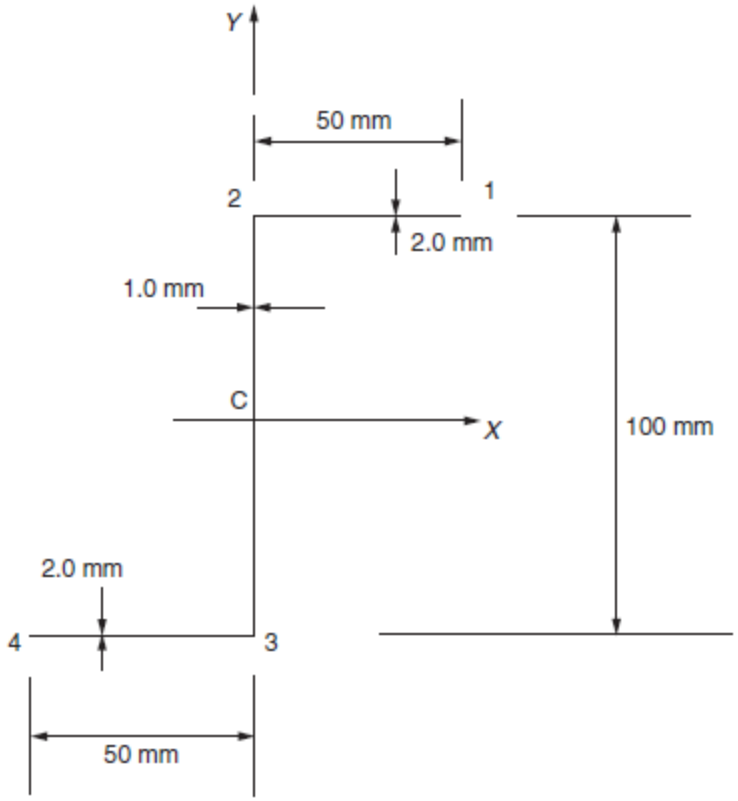


Figura 1.17 Secção da viga do exemplo *1.13*

4.3.1. Secção aberta

Já foi derivada uma expressão para a distribuição do fluxo de corte numa secção de paredes finas aberta sujeita a forças de corte.

Este fluxo de corte está relacionado com a distribuição das tensões diretas na secção pelo que os argumentos usados numa viga de secção composta sujeita à flexão são aplicáveis ao caso de vigas em material compósito sujeitas ao corte.

O fluxo de corte fica

$$q_s = -E_{Z,i}\left[\left(\frac{S_X I'_{XX} - S_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)\int_0^s t_i X ds + \left(\frac{S_Y I'_{YY} - S_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)\int_0^s t_i Y ds\right] \qquad (1.91)$$

Note-se que nesta equação, *s* é medido a partir da ponta aberta da secção da viga e os segundos momentos de área modificados (rigidez à flexão) são definidos na Eq. (1.89).

4.3.2. Secção fechada

O mesmo argumento é aplicável às secções fechadas de vigas em material compósito.

O fluxo de corte total (para o caso sem tensores) fica

$$q_s = -E_{Z,i}\left[\left(\frac{S_X I'_{XX} - S_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)\int_0^s t_i X ds + \left(\frac{S_Y I'_{YY} - S_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)\int_0^s t_i Y ds\right] + q_{s,0} \quad (1.92)$$

Na Eq. (1.92) o valor do fluxo de corte $q_{s,0}$ na origem de s é obtido usando a equação

$$S_X \eta_0 - S_Y \xi_0 = \oint p q_b + 2Aq_{s,0} \quad (1.93)$$

ou a equação

$$0 = \oint p q_b + 2Aq_{s,0} \quad (1.94)$$

4.3. Corte

Exemplo 1.14: A secção triangular em compósito de uma viga de paredes finas está mostrada na *figura 1.18*. Esta secção suporta uma força vertical de 2 kN aplicada no seu apex. Se as paredes 12 e 13 tiverem laminados com módulo de Young 45000 N/mm² e a alma vertical 23 tiver um laminado com módulo 20000 N/mm², determine a distribuição do fluxo de corte na secção.

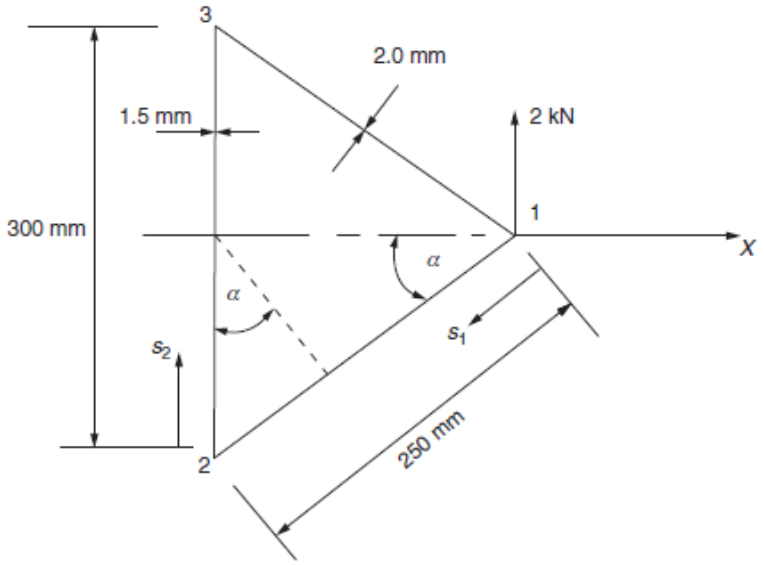


Figura 1.18 Secção da viga do exemplo *1.14*

4.4.1. Secção fechada

O fluxo de corte numa viga de paredes finas e secção fechada sujeita a um momento torsor em que a deformação não está restringida é obtida de

$$T = 2Aq$$

ou seja

$$q = \frac{T}{2A} \tag{1.95}$$

A derivação da Eq. (1.95) baseia-se puramente em condições de equilíbrio e, por isso, não tem em conta as propriedades elásticas da secção da viga.

Desta forma, a Eq. (1.95) também se aplica a secções em compósito, tal como a secções em materiais isotrópicos.

4.4.1. Secção fechada

A taxa de torção de uma secção fechada sujeita a um momento torsor é dada por

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{4A^2}\oint \frac{ds}{Gt} \tag{1.96}$$

Esta expressão também se aplica a uma viga em compósito de secção fechada desde que o módulo de corte G se mantenha dentro do sinal de integração e que o módulo de corte do laminado $G_{XY,i}$ seja usado apropriadamente.

A Eq. (1.96) fica

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{T}{4A^2}\oint \frac{ds}{G_{XY,i}t_i} \tag{1.97}$$

4.4.1. Secção fechada

Rearranjando

$$T = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i}} \frac{d\theta}{dZ} \tag{1.98}$$

Como foi visto anteriormente, o momento torsor e a taxa de torção numa viga estão relacionados com a rigidez à torção *GJ*, na forma

$$\frac{T}{GJ} = \frac{d\theta}{dZ}$$

Assim, da Eq. (1.98), pode ver-se que a rigidez à torção de uma viga de secção fechada em compósito é dada por

$$GJ = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i}} \tag{1.99}$$

4.4.1. Secção fechada

Exemplo 1.15: A secção retangular em compósito de uma viga de paredes finas mostrada na *figura 1.19* suporta um momento torsor de 10 kNm. Se o módulo de corte do laminado dos elementos horizontais for 20000 N/mm² e o módulo de corte das almas for 35000 N/mm², determine a distribuição do fluxo de corte na secção, bem como a taxa de torção e a rigidez à torção.

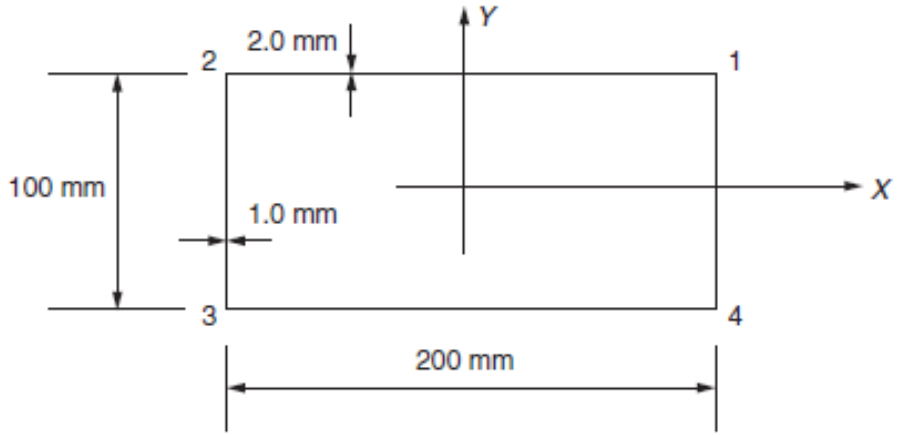


Figura 1.19 Secção da viga do exemplo *1.15*

4.4.2. Secção aberta

A rigidez à torção de uma viga de paredes finas e secção aberta também é dada por GJ.

Para uma viga de materiais compósitos, o módulo de corte tem que permanecer dentro do somatório ou do integral e tomar o valor de $G_{XY,i}$.

Assim

$$GJ = \sum_{i=1}^{n} G_{XY,i} \frac{st_i^3}{3} \tag{1.100}$$

ou

$$GJ = \frac{1}{3} \int_{\text{sec}} G_{XY,i} t_i^3 ds \tag{1.101}$$

4.4.2. Secção aberta

A taxa de torção da viga está relacionada com o momento torsor aplicado.

Para uma viga de secção aberta de material compósito, as relações mantêm-se mas a rigidez de torção é dada pelas Eqs. (1.100) ou (1.101).

Assim

$$T = \left(\sum_{i=1}^{n} G_{XY,i} \frac{s t_i^3}{3} \right) \frac{d\theta}{dZ} \tag{1.102}$$

ou

$$T = \left(\frac{1}{3} \int_{\text{sec}} G_{XY,i} t_i^3 ds \right) \frac{d\theta}{dZ} \tag{1.103}$$

4.4.2. Secção aberta

Tendo obtido a taxa de torção da viga, obtém-se a distribuição da tensão de corte em qualquer ponto na espessura da viga com

$$\tau = 2G_{XY,i} n \frac{d\theta}{dZ} \qquad (1.104)$$

A tensão de corte máxima ocorre na superfície da secção da viga onde $n=\pm t/2$.

4.4.2. Secção aberta

Exemplo 1.16: Uma secção em C com as dimensões da *figura 1.20* é feita de compósito e suporta um momento torsor de 10 Nm. Se o módulo de corte do laminado das mesas horizontais é 20000N/mm² e o módulo de corte da alma é 15000 N/mm², determine a tensão de corte máxima na secção.

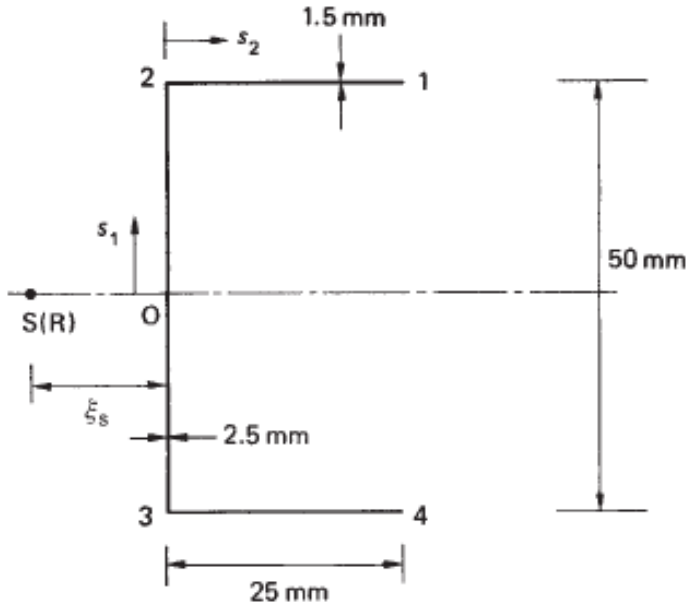


Figura 1.20 Secção em C da viga do exemplo *1.16*