

Exemplo T.01:

É necessário dimensionar à flexão uma viga que resista ao carregamento aplicado com a massa mínima possível.

A geometria e a definição dos parâmetros da viga estão mostrados na *figura T.01*. A viga tem uma largura c constante, uma altura h constante e um comprimento l .

A estrutura da viga é constituída por uma secção aberta de paredes finas. As paredes têm uma espessura t . A área da secção do tensor de reforço é A . A raiz da asa encontra-se encastrada enquanto a sua ponta está livre. São usados dois materiais diferentes no fabrico da viga, o material C das paredes e o material L no tensor, sendo ambos os materiais isotrópicos e estando as suas propriedades indicadas na *tabela T.01*.

O carregamento a aplicar na asa consiste em duas forças aplicadas no centro de corte, uma vertical S_y e outra horizontal S_x .

Pretende-se o seguinte:

- Usando o método da idealização estrutural, descrever o modelo matemático para a resolução do problema.
- Implementar em folha de cálculo um modelo para calcular as tensões diretas aplicadas na viga (pontos 1, 2 e 3 na raiz da viga).
- Implementar em folha de cálculo um modelo para minimizar a massa da viga sabendo que $c = 25 \text{ mm}$, $h = 50 \text{ mm}$, $l = 500 \text{ mm}$, $S_x = 180 \text{ N}$, e $S_y = 600 \text{ N}$, usando como variáveis t e A , e sabendo que $t \geq 0,4 \text{ mm}$, $A \geq 2 \text{ mm}^2$ e a margem de segurança tem que ser maior ou igual a 0,1 ($MS \geq 0,1$).

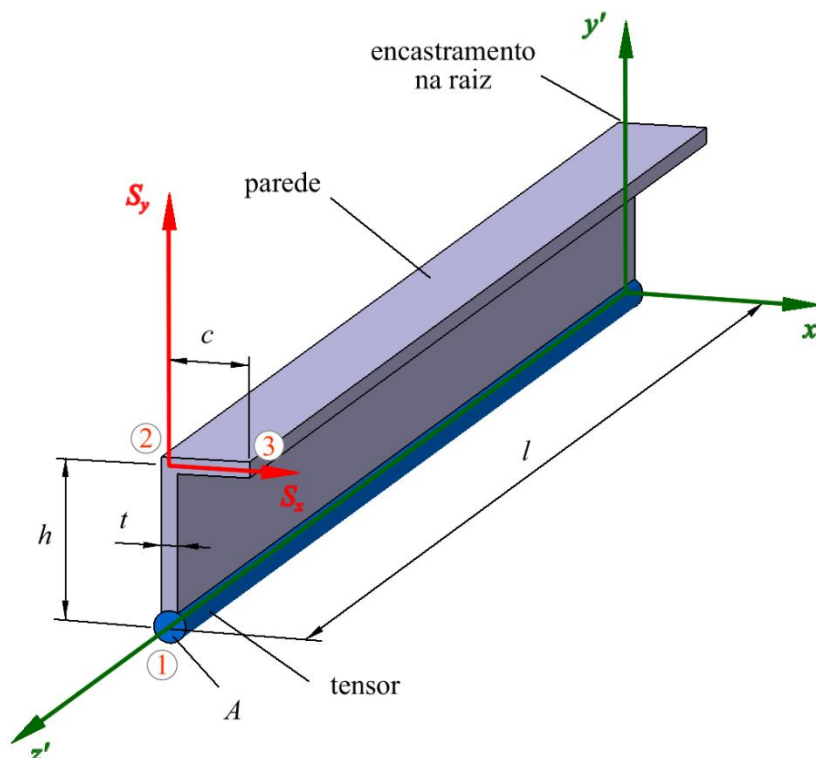


Figura T.01 Geometria da viga e parâmetros.

Tabela T.01 Propriedades dos materiais.

Material L	Módulo elástico longitudinal	E_L	GPa	150
	Tensão de cendência à tração	$\sigma_{t,L}$	MPa	1500
	Tensão de cedência à compressão	$\sigma_{c,L}$	MPa	1200
	Massa volúmica	ρ_L	kg/m ³	1600
Material C	Módulo elástico longitudinal	E_C	GPa	70
	Tensão de cendência à tração	$\sigma_{t,C}$	MPa	300
	Tensão de cedência à compressão	$\sigma_{c,C}$	MPa	240
	Massa volúmica	ρ_C	kg/m ³	2700

a) Usando o método da idealização estrutural, descrever o modelo matemático para a resolução do problema

Existem vários passos para resolver este problema. Vamos descrever cada um pela ordem necessária para definir a análise.

i. Cálculo dos momentos fletores na raiz da viga

Os momentos fletores numa posição z arbitrária ao longo do comprimento da viga são

$$\begin{aligned}M_x(z) &= -S_y(l-z) \\ M_y(z) &= -S_x(l-z)\end{aligned}\tag{T.01}$$

onde M_x é o momento fletor em torno do eixo x e M_y é o momento fletor em torno do eixo y . No encastramento $z = 0$, logo os momentos fletores na raiz da viga ficam

$$\begin{aligned}M_x &= -S_y l \\ M_y &= -S_x l\end{aligned}\tag{T.02}$$

ii. Assunção de valores iniciais para a espessura das paredes e a área do tensor

Assumem-se valores arbitrários para a espessura t das paredes e para a área da secção transversal A do tensor na seguinte forma

$$\begin{aligned}t &= t_{\text{inicial}} \\ A &= A_{\text{inicial}}\end{aligned}\tag{T.03}$$

iii. Assunção de valores iniciais para as tensões diretas

Como o cálculo das áreas dos “booms” depende das tensões diretas nos próprios “booms” é necessário assumir uma solução inicial para as mesmas

$$\sigma_{z,r} = \sigma_{z,r, inicial} \quad r = 1,3 \quad (T.04)$$

iiiiv. Cálculo da área dos “booms”

A área dos “booms” não pode ser calculada diretamente quando a secção possui materiais com módulos elásticos longitudinais diferentes. Neste caso tem que se calcular a rigidez axial do “boom” EB que é dada por

$$EB_r = E_r A_r + \sum_{i=1}^n E_i \frac{t_{D,i} b_i}{6} \left(2 + \frac{\sigma_{z,i}}{\sigma_{z,r}} \right) \quad r = 1,3 \quad (T.05)$$

onde E_r é o módulo elástico longitudinal do tensor do “boom” r , A_r é a área transversal do tensor do “boom” r , E_i é o módulo elástico longitudinal da parede i , $t_{D,i}$ é a espessura da parede i , b_i é o comprimento da parede i , $\sigma_{z,i}$ é a tensão direta na extremidade oposta a r da parede i e $\sigma_{z,r}$ é a tensão direta no “boom” r . Assim, para cada um dos “booms” tem-se

$$\begin{aligned} EB_1 &= E_L A + E_C \frac{th}{6} \left(2 + \frac{\sigma_{z,2}}{\sigma_{z,1}} \right) \\ EB_2 &= E_C \frac{th}{6} \left(2 + \frac{\sigma_{z,1}}{\sigma_{z,2}} \right) + E_C \frac{tc}{6} \left(2 + \frac{\sigma_{z,3}}{\sigma_{z,2}} \right) \\ EB_3 &= E_C \frac{tc}{6} \left(2 + \frac{\sigma_{z,2}}{\sigma_{z,3}} \right) \end{aligned} \quad (T.06)$$

v. Cálculo do centróide da secção

Considerando a origem dos eixos $x'y'$ no “boom” 1, a posição do centróide, para uma secção totalmente idealizada e com materiais diferentes, é

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{r=1}^n EB_r x'_r}{\sum_{r=1}^n EB_r} \\ \bar{y} &= \frac{\sum_{r=1}^n EB_r y'_r}{\sum_{r=1}^n EB_r} \end{aligned} \quad (T.07)$$

vi. Cálculo da posição dos “booms” nos eixos centroidais xy

A posição dos “booms” nos eixos centroidais xy é dada por

$$\begin{aligned}x_r &= x'_r - \bar{x} \quad r=1,3 \\y_r &= y'_r - \bar{y} \quad r=1,3\end{aligned}\tag{T.08}$$

vii. Cálculo dos segundos e momentos de área e do produto de área

Os segundos momentos de área e o produto momento de área dos “booms” também não podem ser calculados diretamente quando a secção possui materiais com módulos elásticos longitudinais diferentes. Neste caso tem que se calcular os valores da rigidez à flexão da secção EI que são dados por

$$\begin{aligned}EI_{xx} &= \sum_{r=1}^n EB_r y_r^2 \\EI_{yy} &= \sum_{r=1}^n EB_r x_r^2 \\EI_{xy} &= \sum_{r=1}^n EB_r x_r y_r\end{aligned}\tag{T.09}$$

viii. Cálculo das tensões diretas nos “booms”

A tensões diretas nos “booms” têm que ter em conta os diferentes módulos elásticos do material. Assim, a equação das tensões diretas fica

$$\sigma_{z,r} = E_r \left[\left(\frac{M_y EI_{xx} - M_x EI_{xy}}{EI_{xx} EI_{yy} - EI_{xy}^2} \right) x_r + \left(\frac{M_x EI_{yy} - M_y EI_{xy}}{EI_{xx} EI_{yy} - EI_{xy}^2} \right) y_r \right] \quad r=1,3\tag{T.10}$$

ix. Convergência das tensões diretas

Depois de se obterem as tensões diretas pela *equação (T.10)* é preciso comparar estes resultados com aqueles assumidos pela *equação (T.04)*. Ambas as equações têm que dar os mesmos resultados, pelo que é preciso assumir novos valores de $\sigma_{z,r,initial}$ até eles serem iguais. Uma forma de o fazer é usar a seguinte expressão

$$\sigma_{z,r,initial}^{novo} = \sigma_{z,r,initial} + \lambda (\sigma_{z,r} - \sigma_{z,r,initial}) \quad r=1,3\tag{T.11}$$

onde $(\sigma_{z,r} - \sigma_{z,r,initial})$ é a diferença entre o valor da *equação (T.10)* e o da *equação (T.04)*, $\sigma_{z,r,initial}^{novo}$ é o valor a substituir na *equação (T.04)* na iteração seguinte e λ é um coeficiente de amortecimento que toma um valor adequado menor do que um.

Este procedimento deve ser repetido até se cumprir o critério de convergência

$$\frac{\sigma_{z,r}}{\sigma_{z,r,initial}} - 1 < e \quad r = 1,3 \quad (T.12)$$

onde e é o critério de convergência que deve ser um valor pequeno.

x. Cálculo das margens de segurança

Para se saber se a estrutura resiste ao carregamento aplicado é necessário calcular as margens de segurança. Como só estamos a considerar o efeito dos momentos fletores na estrutura idealizada, interessa-nos saber as margens de segurança das tensões diretas axiais em cada um dos “booms”. Assim

$$\left. \begin{aligned} MS_r &= \frac{\sigma_{c,material}}{|\sigma_{z,r}|} - 1 & \text{se } \sigma_{z,r} < 0 \\ MS_r &= \infty & \text{se } \sigma_{z,r} = 0 \\ MS_r &= \frac{\sigma_{t,material}}{\sigma_{z,r}} - 1 & \text{se } \sigma_{z,r} > 0 \end{aligned} \right\} \quad r = 1,3 \quad (T.13)$$

xi. Cálculo da massa da viga

A massa da viga é dada pelo volume de cada material multiplicado pela sua massa volúmica na seguinte forma

$$m = \rho_L Al + \rho_C (h + c)tl \quad (T.14)$$

xii. Minimização da massa da viga

O objetivo deste problema é obter a viga mais leve possível e que resista ao mesmo tempo ao carregamento aplicado sem ultrapassar as tensões de cedência dos materiais. Para isso é necessário formular um problema de otimização que contém uma função objetivo f , um conjunto de restrições de desigualdade g e um conjunto de variáveis v .

Assim, o vetor das variáveis de otimização é

$$\begin{aligned} v &= \{t, A\} \\ t_{\min} &\leq t \leq t_{\max} \\ A_{\min} &\leq A \leq A_{\max} \end{aligned} \quad (T.15)$$

onde os limites de t e A são escolhidos para o caso particular em estudo. Neste caso pode usar-se apenas $t \geq t_{\min}$ e $A \geq 0$. A função objetivo é a equação (T.14)

$$f = m(t, A)$$

As funções de constrangimento que vamos usar são as seguintes

$$g = \begin{cases} MS_1(t, A) \geq MS_{\min} \\ MS_2(t, A) \geq MS_{\min} \\ MS_3(t, A) \geq MS_{\min} \end{cases} \quad (T.16)$$

Então o problema de otimização é

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{v}) \\ &\text{com } \mathbf{v} = \{t, A\} \\ &\text{sujeito a } g(\mathbf{v}) = \begin{cases} MS_1(\mathbf{v}) \geq MS_{\min} \\ MS_2(\mathbf{v}) \geq MS_{\min} \\ MS_3(\mathbf{v}) \geq MS_{\min} \end{cases} \end{aligned} \quad (T.17)$$

em que o que se pretende é descobrir o vetor $\mathbf{v}$ (o par t, A) que minimiza $f(\mathbf{v})$ cumprindo as inequações $g(\mathbf{v})$. Os valores de margem de segurança mínima $MS_{\min}$ e espessura mínima $t_{\min}$ têm que ser pelo menos igual a zero. Na prática, pretende-se alterar de forma automática a equação (T.03) para minimizar a equação (T.14), cumprindo a equação (T.15) e a equação (T.16).

Para resolver este problema de otimização podem usar-se variados métodos de otimização.

b) Implementar em folha de cálculo um modelo para calcular as tensões diretas aplicadas na viga (pontos 1, 2 e 3 na raiz da viga).

Esta questão vai ser apresentada em aula. O modelo a usar está apresentado na *alínea a)* fazendo a iteração desde o ponto *iii* ao *ix*.

A iteração pode ser feita através do cálculo iterativo do Excel ativando o cálculo iterativo: *File>Options>Formulas>Enable iterative calculation*.

c) Implementar em folha de cálculo um modelo para minimizar a massa da viga sabendo que $b = 25 \text{ mm}$, $h = 35 \text{ mm}$, $l = 250 \text{ mm}$, $S_y = 100 \text{ N}$, e $S_x = 50 \text{ N}$, usando como variáveis t e A .

Esta questão vai ser apresentada em aula. O modelo implementado na *alínea b)* é alargado para conter a otimização desde o ponto *ii* ao *xii*.

O Excel possui uma ferramenta de otimização que usa o método de de otimização de gradientes não linear com restrições GRG: *Data>Solver*.