



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Covilhã | Portugal

Interação Fluido-Estrutura

Mecânica Estrutural (10391/10411)

2022

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais

1. Introdução

Existem vários fenómenos aeroelásticos que afetam o comportamento aero-estrutural das superfícies sustentadoras e por isso o seu projeto tem que permitir que esses efeitos não ocorram dentro do envelope de operação normal da aeronave.

Os três fenómenos que serão estudados são:

1. Divergência
2. Flutter
3. Reversão de comandos



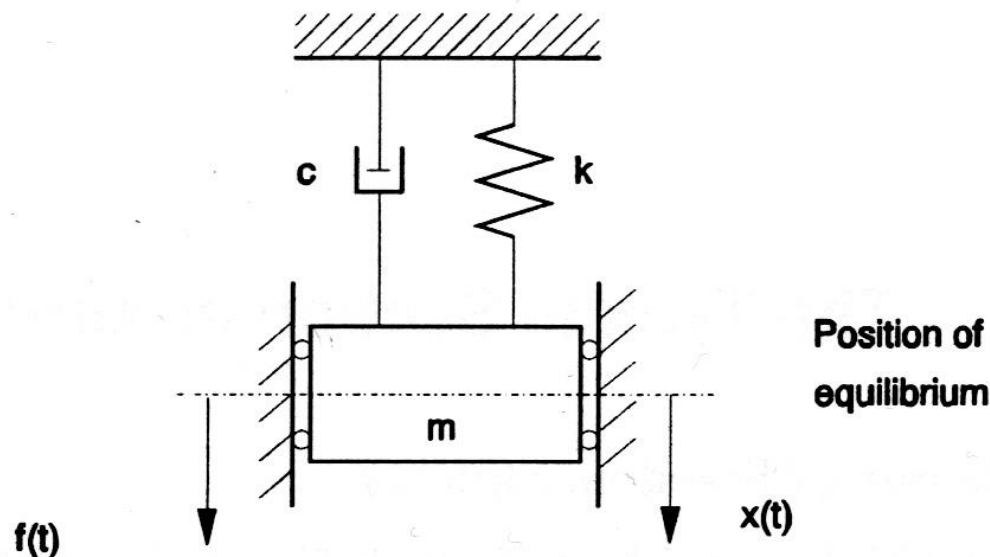
UBI
Covilhã
Portugal

2. A Secção Típica em Aeroelasticidade

A secção típica é usada para analisar o comportamento aeroelástico de superfícies sustentadoras recorrendo a informação da secção da asa.

2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

Considere-se o sistema mecânico de um grau de liberdade da figura. O sistema consiste numa massa concentrada m , uma mola com constante k e um amortecedor com um coeficiente de amortecimento viscoso c . A força externa aplicada é $F(t)$ e o deslocamento $x(t)$ é medido a partir da posição de equilíbrio.



2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

A energia potencial armazenada em qualquer instante de tempo t medida a partir da posição de equilíbrio pode ser escrita como

$$U = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.1)$$

A energia cinética da massa m é

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad (2.2)$$

onde $\dot{x} = dx/dt$. A função de dissipação pode ser escrita como

$$D = \frac{1}{2} c\dot{x}^2 \quad (2.3)$$

2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

Aplicando a equação de movimento de Lagrange

$$\left(\frac{dL}{dx'} \right)' - \frac{dL}{dx} + \frac{dD}{dx'} = Q_x \quad (2.4)$$

onde $L=T-U$ e Q é a força generalizada correspondente ao grau de liberdade x , obtém-se

$$mx'' + cx' + kx = F(t) \quad (2.5)$$

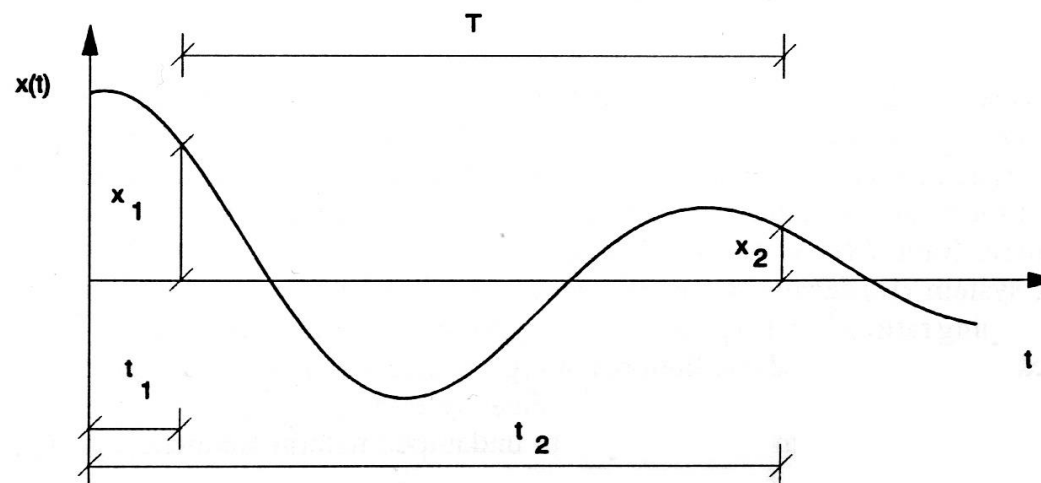
Num sistema estrutural dinâmico, m , c e k são constantes reais positivas. Este sistema é estável, no sentido que, se o sistema é sujeito a uma perturbação inicial após, por exemplo, uma força impulsiva $F(t)=F_0\delta(t)$ onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac, a resposta do sistema $x(t)$ decai assintoticamente para zero.

2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

Também se sabe que quando a razão de amortecimento $\gamma^2 < 1$ [$\gamma = c/c_{cr} = c/(4km)^{1/2}$], então $c^2 < 4km$, e a resposta é uma oscilação amortecida com a frequência de oscilação dada pela frequência natural amortecida do sistema mecânico $\omega_d = \omega_0(1 - \gamma^2)^{1/2}$, onde $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ é a frequência natural não amortecida do sistema mecânico. Uma resposta típica neste caso é mostrada na figura.

$$c^2 < 4km$$

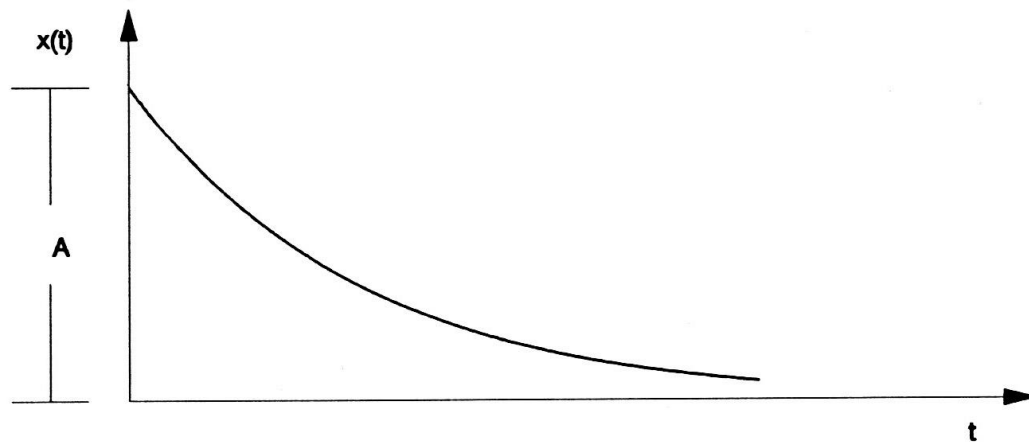
$$c > 0$$



2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

Quando $c^2 > 4km$, a resposta é também estável mas é um movimento não oscilatório. A figura seguinte mostra a resposta típica neste caso.

$$c^2 > 4km$$
$$c > 0$$



2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

Consideremos o mesmo sistema mecânico com a adição de forças não conservativas, isto é forças que não derivam de um potencial, e são inerentes ao sistema, isto é não são cargas aplicadas exteriormente devido à mudança de posição da coordenada generalizada.

Em aeroelasticidade, estas forças chamam-se forças aerodinâmicas incrementais devido ao movimento. Vamos assumir que estas forças são proporcionais ao deslocamento e à velocidade do sistema mecânico de um grau de liberdade.

A equação de movimento pode, neste caso, ser escrita na forma

$$mx'' + cx' + kx = F(t) + c_1x' + k_1x \quad (2.6)$$

2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

ou

$$mx'' + c_{eff}x' + k_{eff}x = F(t) \quad (2.7)$$

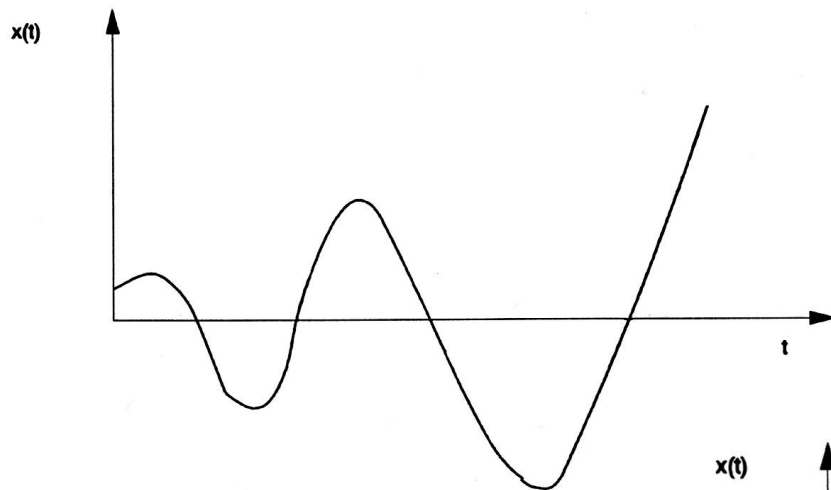
onde $c_{eff}=c-c_1$ é o amortecimento efetivo da configuração do sistema e $k_{eff}=k-k_1$ é a rigidez efetiva da configuração do sistema.

Considere-se em primeiro lugar a situação em que $k_1=0$ e $c_1 \neq 0$. Se c_1 é real positivo e menor do que c , o comportamento do sistema é como referido anteriormente e estável.

Se c_1 é real positivo e maior do que c , então o sistema tem amortecimento negativo e a resposta do sistema vai ser oscilatória divergente se $c_{eff}^2 < 4km$ ou será não oscilatória divergente se $c_{eff}^2 > 4km$.

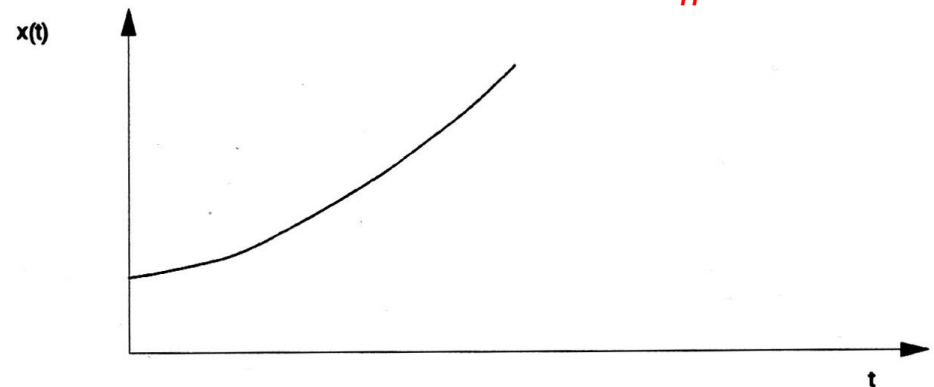
2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

As figuras seguintes ilustram cada uma destas respostas.



$$c_{eff}^2 < 4km$$

$$c_{eff} < 0$$



$$c_{eff}^2 > 4km$$

$$c_{eff} < 0$$

2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

Estes sistemas são chamados de sistemas dinamicamente instáveis ou que possuem instabilidade do tipo flutter. É curioso notar que a instabilidade é inerente à configuração do sistema, isto é, é uma propriedade da configuração do sistema e não tem nada a ver com a força externa aplicada $F(t)$ ou com a natureza da sua origem.

A instabilidade é uma propriedade do sistema e depende apenas do parâmetro c_1 que por sua vez é uma propriedade da configuração do sistema. Além disto, nota-se que o limite da instabilidade ocorre quando a configuração tem c_{eff} igual a zero. Neste caso, tem-se uma resposta de movimento harmónico simples com uma frequência igual à frequência natural não amortecida do sistema mecânico.

2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

Esta condição chama-se de condição crítica, e separa o comportamento estável, isto é, $c_{eff} > 0$, do sistema instável, isto é, $c_{eff} < 0$.

Finalmente deve ser observado que situações idênticas às da figura anterior são raramente encontradas na prática, principalmente na aeroelasticidade onde c_1 é geralmente uma função da velocidade de voo do veículo. Assim, fisicamente uma situação oscilatória divergente acontecerá antes (numa velocidade mais baixa) de uma situação não oscilatória divergente.

Considere-se agora o caso em que c_{eff} é positivo e $k_1 \neq 0$. Quando k_{eff} é real e positivo, o sistema é estável como referido no início deste capítulo, e o comportamento do sistema é oscilatório ou não.

2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

Quando k_{eff} é inferior a zero, isto é $k_1 > k$, a solução da equação diferencial mostra que o sistema é instável em que a resposta do sistema a uma perturbação inicial cresce exponencialmente com o tempo num movimento divergente não oscilatório. O limite da estabilidade é obtido quando $k_{eff}=0$ e é chamado novamente de condição crítica.

Este fenómeno chama-se divergência estática ou fenómeno de aeroelasticidade estática. Esta denominação deriva do facto de a instabilidade poder ser explicada usando apenas o termo de rigidez efetiva. No entanto, este fenómeno é nitidamente dinâmico. Para ele acontecer, tem que se ter $k_1 > k$ e $k_1 x$ deve-se ao movimento: logo a sua origem é dinâmica.

2.1. Estabilidade de Um Grau de Liberdade

A partir desta exposição simples, baseada no comportamento de um sistema mecânico com um grau de liberdade na presença de forças não conservativas, podem observar-se alguns factos:

1. A equação de movimento é escrita a partir do estado inicial de equilíbrio;
2. A estabilidade do sistema é estudada a partir do estado inicial de equilíbrio;
3. O problema de estabilidade do movimento é uma propriedade da configuração do sistema e não depende da origem das forças externas aplicadas.
4. Os limites de estabilidade são obtidos quando $c_{eff}=0$ ou $k_{eff}=0$.

2.2. A Secção Típica

Nesta secção, será usado o pressuposto aerodinâmico quase-estático para a representação das cargas aerodinâmicas incrementais não estacionárias.

De acordo com este pressuposto, as características aerodinâmicas de um perfil em movimento são iguais em qualquer instante de tempo às características do mesmo perfil quando se move com velocidades lineares e angulares constantes iguais aos valores instantâneos reais.

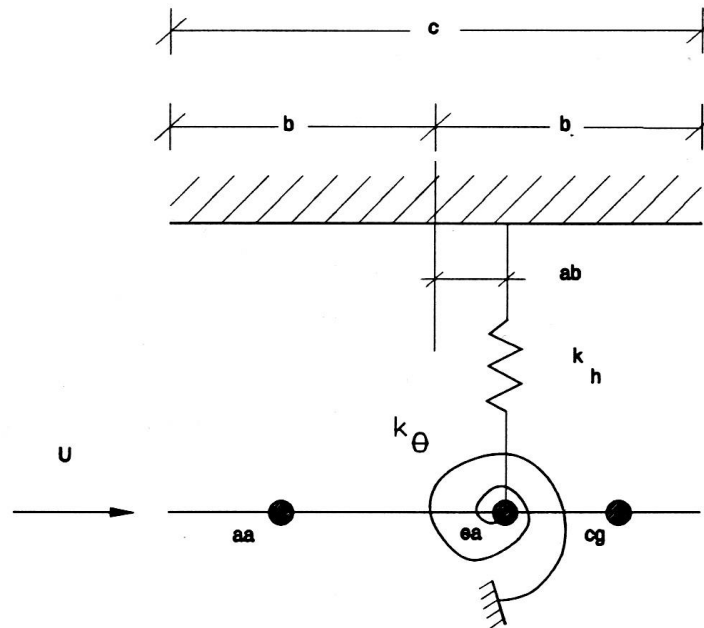
O pressuposto aerodinâmico quase-estático introduz uma grande simplificação na formulação do problema e, ao mesmo tempo, não mascara os aspetos físicos com complicações matemáticas. Estas simplificações serão removidas mais tarde e as cargas incrementais não estacionárias serão formuladas usando a teoria potencial linearizada.

2.2. A Secção Típica

Para além disto, as limitações na secção serão feitas para escoamentos bidimensionais. O tratamento da envergadura finita será feito usando o pressuposto da teoria do elemento de asa e, de acordo com esta teoria, as características aerodinâmicas em qualquer estação da envergadura serão consideradas as mesmas como se os perfis estivessem colocados em escoamento bidimensional sem interações ao longo da envergadura. Mais tarde, estas simplificações serão removidas.

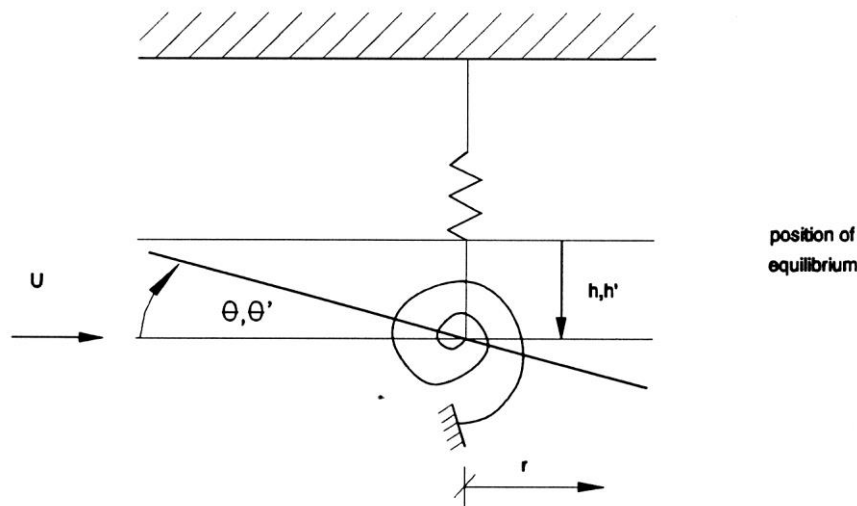
2.2. A Secção Típica

Considere-se uma placa plana num escoamento potencial com uma velocidade U na direção x paralela à placa como mostra a figura.



2.2. A Secção Típica

Considere-se que a placa tem dois graus de liberdade como mostra a figura abaixo: uma translação vertical h e uma rotação θ em torno do eixo elástico do perfil. A coordenada de translação h é medida positiva para baixo e o grau de liberdade de rotação θ é medido positivo com bordo de ataque em cima. Ambas as coordenadas são medidas a partir da posição inicial de equilíbrio do perfil.



2.2. A Secção Típica

O funcional de energia potencial elástica em qualquer instante de tempo, medido a partir do estado inicial de equilíbrio, é dado por

$$U = \int_0^h k_h h dh + \int_0^\theta k_\theta \theta d\theta = \frac{1}{2} k_h h^2 + \frac{1}{2} k_\theta \theta^2 \quad (2.8)$$

Para um elemento de massa dm da placa colocado a uma posição r , medida a partir da posição do eixo elástico ea , pode escrever-se uma expressão para a energia cinética

$$dT = \frac{1}{2} (h' + r\theta')^2 dm \quad (2.9)$$

Integrando para a secção completa tem-se

$$T = \frac{1}{2} m h'^2 + S_w h' \theta' + \frac{1}{2} I_\theta \theta'^2 \quad (2.10)$$

2.2. A Secção Típica

onde m é a massa total por unidade de envergadura

$$m = \int dm$$

S_w é o momento estático da massa em torno do eixo elástico por unidade de envergadura

$$S_w = \int r dm$$

e I_θ é o momento de inércia em torno do eixo elástico por unidade de envergadura

$$I_\theta = \int r^2 dm$$

2.2. A Secção Típica

Considerando que o sistema possui amortecimento estrutural viscoso, pode escrever-se uma função de dissipação para representar o amortecimento estrutural como

$$D = \frac{1}{2} c_h h'^2 + \frac{1}{2} c_\theta \theta'^2 \quad (2.11)$$

Usando a teoria aerodinâmica quase-estática, podem escrever-se expressões para a sustentação aerodinâmica incremental L e o momento aerodinâmico incremental M em torno do eixo elástico ea como

$$Q_h = -L = -\frac{1}{2} \rho U^2 c \frac{dC_l}{d\alpha} \alpha \quad (2.12a)$$

$$M = M_{aa} + L \left(\frac{b}{2} + ab \right) \quad (2.12b)$$

2.2. A Secção Típica

Na equação (2.12a), a força generalizada Q_h é positiva para baixo e a sustentação L é positiva para cima para um ângulo de ataque incremental α , e ρ é a massa volúmica do ar do escoamento livre.

Na equação (2.12b), M_{aa} é o momento aerodinâmico em torno do centro aerodinâmico devido às cargas aerodinâmicas incrementais e o centro aerodinâmico é assumido como estando na posição de $1/4$ da corda.

O ângulo de ataque incremental α deve-se ao ângulo de rotação incremental θ , à velocidade vertical incremental h' e à velocidade rotacional incremental θ' , e pode escrever-se para qualquer posição da corda r como

$$\alpha = \theta + \frac{h'}{U} + \frac{\theta' r}{U} \quad (2.13)$$

2.2. A Secção Típica

Para a secção bidimensional do perfil completa, a intensidade total do vórtice correta é obtida tendo em conta que os vórtices estão concentrados a $\frac{1}{4}$ da corda e calculando a velocidade a $\frac{3}{4}$ da corda onde a condição de fronteira de tangência do escoamento é aplicada.

Este facto permanece mesmo quando o pressuposto quase-estático é removido nos escoamentos bidimensionais. Desta forma, pode escrever-se para o ângulo de ataque incremental do perfil completo α , usando a equação (2.13) para r calculado a $\frac{3}{4}$ da corda, que

$$\alpha = \theta + \frac{h'}{U} + \frac{\theta b}{U} \left(\frac{1}{2} - a \right) \quad (2.14)$$

2.2. A Secção Típica

Usando as equações (2.14) e (2.12) obtém-se

$$Q_h = -L = -\frac{1}{2} \rho U^2 c \frac{dC_l}{d\alpha} \left[\theta + \frac{h'}{U} + \frac{\theta' b}{U} \left(\frac{1}{2} - a \right) \right] \quad (2.15a)$$

$$M = M_{aa} + \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{c^2}{2} \frac{dC_l}{d\alpha} \left(a + \frac{1}{2} \right) \left[\theta + \frac{h'}{U} + \frac{\theta' b}{U} \left(\frac{1}{2} - a \right) \right] \quad (2.15b)$$

onde M_{aa} é o momento aerodinâmico incremental em torno de $\frac{1}{4}$ da corda e é positivo para uma rotação de bordo de ataque em cima.

De acordo com a teoria quase-estática, pode escrever-se M_{aa} como

$$M_{aa} = \frac{1}{2} \rho U^2 c^2 C_{mac} \theta' = -\frac{1}{2} \rho U^2 c^2 \frac{b\pi}{4U} \theta' \quad (2.16)$$

2.2. A Secção Típica

O trabalho W realizado pela carga aerodinâmica incremental é

$$W = \int Q_h h dt + \int M \theta dt \quad (2.17)$$

Então

$$-\delta W = \int L \delta h dt - \int M \delta \theta dt \quad (2.18)$$

Note-se que na formulação acima as coordenadas generalizadas h e θ são a deflexão e a rotação em torno do eixo elástico, respetivamente. Isto simplifica grandemente a formulação da expressão do funcional da energia potencial.

Se as coordenadas generalizadas fossem a deflexão e a rotação em torno do centro de massa, a expressão do funcional da energia cinética seria simplificada.

2.2. A Secção Típica

Neste caso, não haveria o termo de acoplamento na expressão do funcional da energia cinética; no entanto, por outro lado, a expressão do funcional da energia potencial seria mais complicada.

Aplicando as equações de movimento de Lagrange

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)' - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = Q_x \quad (2.19)$$

onde $L=T-U$ e $x=h$ ou $x=\theta$, obtêm-se as equações de movimento na forma

$$\begin{aligned} mh'' + S_w \theta'' + k_h h + c_h h' + c_{1h} h' + k_{1\theta} \theta + c_{1\theta} \theta' &= f_h(t) \\ I_\theta \theta'' + S_w h'' + k_\theta \theta + c_\theta \theta' + c_{2h} h' + k_{2\theta} \theta + c_{2\theta} \theta' &= f_\theta(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $f_h(t)$ e $f_\theta(t)$ são as forças generalizadas incrementais externas nos graus de liberdade x e θ , respetivamente.

2.2. A Secção Típica

e

$$\begin{aligned} c_{1h'} &= \frac{f}{U} & k_{1\theta} &= f & c_{1\theta'} &= (1-g)\frac{fb}{U} \\ c_{2h'} &= -fg\frac{b}{U} & k_{2\theta} &= -fgb & c_{2\theta'} &= -(1-g)\frac{fgb^2}{U} + \frac{fb^2}{4U} \end{aligned} \quad (2.21)$$

com

$$f = \frac{1}{2} \rho U^2 c \frac{dC_l}{d\alpha} \quad g = \frac{1}{2} + a \quad (2.22)$$

Podemos, agora, examinar a resposta de uma secção típica sujeita a condições iniciais em vibração livre, $f_h(t)=f_\theta(t)=0$.

Nestas condições as equações de movimento (2.20) ficam

$$\begin{aligned} mh'' + S_w \theta'' + k_h h + c_h h' + c_{1h'} h' + k_{1\theta} \theta + c_{1\theta'} \theta' &= 0 \\ I_\theta \theta'' + S_w h'' + k_\theta \theta + c_\theta \theta' + c_{2h'} h' + k_{2\theta} \theta + c_{2\theta'} \theta' &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.2. A Secção Típica

Quando $U=0$, isto é, na ausência dos efeitos aerodinâmicos, e se o amortecimento estrutural for desprezado, a equação (2.23) reduz a

$$\begin{aligned} mh'' + S_w \theta'' + k_h h &= 0 \\ I_\theta \theta'' + S_w h'' + k_\theta \theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para uma solução não trivial, o determinante de (2.24) deve ser nulo, e pode escrever-se a equação característica do sistema como

$$s^4 - (\omega_h^2 + \omega_\theta^2)s^2 + \omega_h^2 \omega_\theta^2 - \mu s^4 = 0 \quad (2.25)$$

onde

$$\omega_h^2 = \frac{k_h}{m} \quad \omega_\theta^2 = \frac{k_\theta}{I_\theta} \quad \mu = \frac{S_w^2}{mI_\theta} \quad (2.26)$$

2.2. A Secção Típica

e ω_h e ω_θ são as frequências naturais não amortecidas e não acopladas da secção típica e μ representa o acoplamento entre os graus de liberdade de translação e de rotação, respetivamente. Note-se que considerando o problema físico, ω_h , ω_θ e μ são números reais positivos e μ é inferior a 1 uma vez que $ml_\theta > S_w^2$.

Resolvendo a equação característica (2.25) obtêm-se as frequências naturais não amortecidas da secção típica

$$s_i^2 = \frac{(\omega_h^2 + \omega_\theta^2) \pm \sqrt{(\omega_h^2 - \omega_\theta^2)^2 + 4\mu\omega_h^2\omega_\theta^2}}{2(1 - \mu)} \quad i = 1, 2 \quad (2.27)$$

As frequências naturais não amortecidas da secção típica dadas pela equação (2.27) são claramente reais e positivas.

2.2. A Secção Típica

Os seus valores numéricos são inferiores à frequência natural de rotação não amortecida e não acoplada ω_θ e maiores do que a frequência natural de translação não amortecida e não acoplada ω_h .

2.2. A Secção Típica

Examine-se, agora, o caso em que U é diferente de zero, e, por simplicidade e sem perder a generalidade, colocando $S_w=0$ uma vez que o seu efeito pode ser analisado separadamente. Nestas condições, o eixo elástico coincide com o centro de gravidade da secção típica, e a equação de movimento (2.23) desacoplada fica igual a

$$\begin{aligned}mh'' + (c_h + c_{1h'})h' + k_h h &= 0 \\ I_\theta \theta'' + (c_\theta + c_{2\theta'})\theta' + (k_\theta + k_{2\theta})\theta &= 0\end{aligned}\tag{2.28}$$

Examinando a primeira equação de (2.28), observa-se que o amortecimento estrutural c_h é sempre positivo; $c_{1h'}$ é sempre um número real positivo porque $c_{1h'}=f/U$ e k_h é sempre um número real positivo.

2.2. A Secção Típica

Assim, a partir de considerações físicas, conclui-se que o termo de amortecimento equivalente na primeira equação de (2.28) é definitivamente um número real positivo e que o grau de liberdade de translação desacoplado nunca pode apresentar uma instabilidade com base nas considerações apresentadas na secção anterior.

Examinando a segunda equação de (2.28), pode observar-se que o amortecimento estrutural c_θ é sempre um número real positivo; no entanto, $c_{2\theta}$ pode ser positivo ou negativo, e k_θ é sempre um número real positivo enquanto que $k_{2\theta}$ pode ser positivo ou negativo.

Conclui-se, assim, que o grau de liberdade de rotação não acoplado da secção típica pode apresentar todos os tipos de instabilidade apresentados na secção anterior.

2.2. A Secção Típica

Vamos analisar primeiro o termo de rigidez equivalente, que pode ser escrito como

$$k_{\theta eff} = k_{\theta} + k_{2\theta} = k_{\theta} - fgb = k_{\theta} - \frac{1}{2} \rho U^2 c \frac{dC_l}{d\alpha} \left(\frac{1}{2} + a \right) b \quad (2.29)$$

Analisando a equação (2.29) pode ver-se que quando $a \leq -1/2$, isto é, quando o eixo elástico é coincidente com o centro aerodinâmico ou está à sua frente, a divergência estática nunca pode ocorrer para a secção típica.

Divergência estática pode ocorrer quando g é positivo e a condição crítica de instabilidade é

$$k_{\theta} - \frac{1}{2} \rho U^2 c \frac{dC_l}{d\alpha} \left(\frac{1}{2} + a \right) b = 0 \quad (2.30)$$

2.2. A Secção Típica

Usando a equação (2.30), obtém-se a velocidade de divergência estática, que é dada por

$$U_{div}^2 = \frac{2k_\theta}{2b^2 \rho \left(a + \frac{1}{2} \right) \frac{dC_l}{d\alpha}} \quad (2.31)$$

e usando para a secção típica, $dC_l/d\alpha=2\pi$, obtém-se

$$U_{div}^2 = \frac{k_\theta}{b^2 \rho \pi (1+2a)} = \frac{I_\theta \omega_\theta^2}{b^2 \rho \pi (1+2a)} \quad (2.32)$$

A equação (2.32) representa uma relação simples para a velocidade de divergência estática, onde os efeitos da altitude, da frequência de rotação ou do momento de inércia e do valor numérico considerado para $dC_l/d\alpha$ na velocidade de divergência são evidentes.

2.2. A Secção Típica

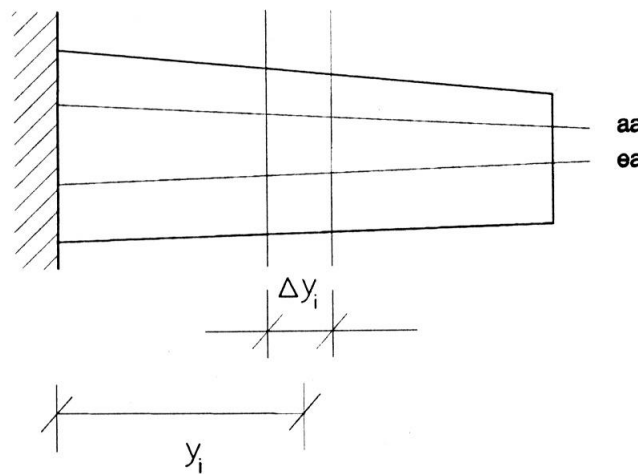
Teoria do elemento de asa

Estamos em condições de estender a aplicação para o caso prático do cálculo da velocidade de divergência de uma superfície sustentadora, com as limitações da teoria aerodinâmica quase estática, usando a simplificação aerodinâmica da teoria do elemento de asa.

A aproximação da teoria do elemento de asa, para superfícies sustentadoras com grande razão de aspeto, consiste na divisão da superfície em tiras estreitas mas finitas ao longo da corda, assumindo que o escoamento em cada tira é bidimensional e não interage com o escoamento noutras tiras da superfície sustentadora. O comprimento da corda da tira é a corda média geométrica da tira.

2.2. A Secção Típica

Considere-se a superfície sustentadora da figura, que está dividida em tiras de largura Δy_i , corda média c_i e posição na envergadura y_i .



Para cada tira, o momento aerodinâmico pode escrever-se

$$k_{2\theta}\theta = -\frac{1}{2}\rho U^2 c_i \frac{dC_l}{d\alpha} \left(\frac{1}{2} + a_i \right) b_i \theta \quad (2.33)$$

2.2. A Secção Típica

Para cada tira, $dC_l/d\alpha=2\pi$ e, escrevendo $\lambda_i=\rho\pi U^2$, obtém-se

$$k_{2\theta} = -\lambda_i A_i \quad (2.34)$$

onde A_i é uma constante da tira dada por

$$A_i = b_i^2 (1 + 2a_i) \quad (2.35)$$

Assim, a equação (2.33) pode ser escrita na forma de matriz para a superfície sustentadora completa como

$$[k_{2\theta}] \{\theta_i\} = -\lambda [A_i] \{\theta_i\} \quad (2.36)$$

onde $[k_{2\theta}]$ e $[A_i]$ são matrizes diagonais com os elementos dados pelos valores da tira correspondente.

2.2. A Secção Típica

A partir da teoria de elasticidade, também se pode escrever em forma matricial, uma expressão para o momento torsor elástico em torno do eixo elástico para a superfície sustentadora completa

$$\{T_i\} = [k_{\theta i}] \{\theta_i\} = [B_i]^{-1} \{\theta_i\} \quad (2.37)$$

onde $[k_{\theta i}]$ é a matriz de rigidez torsional e $[B_i]$ é a matriz de flexibilidade torsional.

Note-se que a matriz de flexibilidade torsional é mais fácil de obter do que a matriz de rigidez através do método dos elementos finitos ou outros e através de medições experimentais.

2.2. A Secção Típica

Usando as equações (2.36) e (2.37), a condição crítica da superfície sustentadora é

$$[B]^{-1}\{\theta_i\} - \lambda[A]\{\theta_i\} = \{0\} \quad (2.38)$$

ou

$$\{\theta_i\} - \lambda[C]\{\theta_i\} = \{0\} \quad (2.39)$$

onde $[C]=[B]^{-1}[A]$.

A equação (2.39) pode ser escrita na forma de um problema padrão de valores próprios como

$$[[I] - \lambda[C]]\{\theta_i\} = \{0\} \quad (2.40)$$

2.2. A Secção Típica

onde $\lambda_i = \rho \pi U^2$. A solução do problema de valores próprios fornece como primeiro valor próprio o valor mais baixo de λ e, por isso, o valor mais baixo da velocidade de divergência estática da superfície sustentadora.

2.2. A Secção Típica

Exemplo 8.01 (continuação): Sabendo que a caixa de torção é feita de alumínio com massa volúmica $\rho_{al}=2700 \text{ kg/m}^3$, módulo de Young $E=68,9 \text{ GPa}$, módulo de corte $G=26 \text{ GPa}$, que o declive de sustentação do perfil alar é $dCl/d\alpha=2\pi \text{ rad}^{-1}$, que a massa volúmica do ar é $\rho=1,225 \text{ kg/m}^3$ e que $a=-0,2$, determine:

- a) a velocidade crítica de divergência, usando a teoria aerodinâmica quase-estática aplicada à secção típica aeroelástica.
- b) a velocidade crítica de divergência, usando a teoria aerodinâmica quase-estática em conjunto com a teoria do elemento de asa.

2.2. A Secção Típica

Em seguida analisa-se a secção típica para $S_w=0$ e com os graus de liberdade acoplados. Nesta condição, a equação de movimento (2.23) fica

$$\begin{aligned}mh'' + k_h h + c_h h' + c_{1h'} h' + k_{1\theta} \theta + c_{1\theta'} \theta' &= 0 \\ I_\theta \theta'' + k_\theta \theta + c_\theta \theta' + c_{2h'} h' + k_{2\theta} \theta + c_{2\theta'} \theta' &= 0\end{aligned}\tag{2.41}$$

O conjunto de equações (2.41) tem solução da forma

$$h = \underline{h}_0 e^{st} \quad \theta = \underline{\theta}_0 e^{st}\tag{2.42}$$

onde $\underline{h}_0$ e $\underline{\theta}_0$ são números complexos genéricos.

2.2. A Secção Típica

Substituindo as soluções de (2.42) em (2.41), são obtidas duas equações algébricas homogéneas e simultâneas em $\underline{h}_0$ e $\underline{\theta}_0$, e, para a solução não trivial, o determinante tem que ser zero, o que fornece a equação característica do sistema

$$\begin{aligned} (mI_{\theta})s^4 + (mc_{\theta eff} + I_{\theta}c_{heff})s^3 + (mk_{\theta eff} + c_{heff}c_{\theta eff} + k_h I_{\theta} - c_{2h'}c_{1\theta'})s^2 \\ + (c_{heff}k_{\theta eff} + k_h c_{\theta eff} - c_{2h'}k_{1\theta})s + (k_h k_{\theta eff}) = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Obtém-se uma instabilidade do sistema se a parte real de uma das raízes da equação (2.43) é positiva.

Pode mostrar-se que a condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema é obtida quando todas as raízes e o discriminante das raízes R têm o mesmo sinal.

2.2. A Secção Típica

O discriminante das raízes R é

$$a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2) \quad (2.44)$$

onde a_i são os coeficientes de s^i na equação (2.43).

Examinando os coeficientes de s^i de (2.43), observa-se que a_4 e a_3 são sempre positivos a partir de considerações físicas.

O coeficiente a_0 é negativo apenas se $K_{\theta eff}$ for negativo e isto produz a condição de divergência estática como apresentado anteriormente. Também se vê que, neste caso, uma das raízes da equação característica (2.43) vai ser zero, indicando que o ponto crítico de divergência ocorre para frequência nula.

2.2. A Secção Típica

Analizando o coeficiente a_1 para uma possível condição de instabilidade, $a_1 \leq 0$, e usando as equações (2.21) e (2.43), pode escrever-se que

$$(c_h + c_{1h'})(k_\theta + k_{2\theta}) + k_h(c_\theta + c_{2\theta'}) - c_{2\theta'}k_{1\theta} \leq 0 \quad (2.45)$$

Omitindo por agora os termos de amortecimento estrutural, pois estes são sempre estabilizadores, pode escrever-se a condição de instabilidade na forma

$$c_{1h'}(k_\theta + k_{2\theta}) + k_h c_{2\theta'} - c_{2\theta'}k_{1\theta} \leq 0 \quad (2.46)$$

A avaliação numérica de (2.46) fornece a velocidade crítica de flutter da secção típica sujeita a estas condições.

2.2. A Secção Típica

Se o amortecimento estrutural for mantido, a equação (2.45) fornecerá a condição crítica de flutter com os valores de amortecimento assumidos.

Considerando o caso em que $a=-1/2$ e desprezando o efeito do amortecimento estrutural, $k_{2\theta}$ e c_{2h} , são nulos porque $g=0$, e a equação (2.46) reduz a

$$\frac{f}{U} \left(k_{\theta} + k_h \frac{b^2}{4} \right) \leq 0 \quad (2.47)$$

Fisicamente, o termo dentro de parênteses é sempre positivo pelo que a condição de flutter só pode ocorrer para $f=0$, isto é, $U=0$.

2.2. A Secção Típica

Isto implica que se a velocidade do sistema for representada em função do amortecimento do sistema, quando o amortecimento estrutural é desprezado, as curvas começam com amortecimento do sistema nulo para velocidade nula.

Pode concluir-se que a secção típica com o centro de gravidade, o centro aerodinâmico e o eixo elástico coincidentes nunca pode ter uma instabilidade do tipo flutter ou do tipo divergente.

Analisando o coeficiente a_2 para uma possível condição de instabilidade, $a_2 \leq 0$, e usando as equações (2.21) e (2.43), pode escrever-se que

$$m(k_\theta + k_{2\theta}) + (c_h + c_{1h'}) (c_\theta + c_{2\theta'}) + k_h I_\theta - c_{2h'} c_{1\theta'} \leq 0 \quad (2.45b)$$

2.2. A Secção Típica

Omitindo por agora os termos de amortecimento estrutural, pois estes são sempre estabilizadores, pode escrever-se a condição de instabilidade na forma

$$m(k_{\theta} + k_{2\theta}) + c_{1h}c_{2\theta'} + k_h I_{\theta} - c_{2h}c_{1\theta'} \leq 0 \quad (2.46b)$$

A avaliação numérica de (2.46b) fornece a velocidade de flutter crítica da secção típica sujeita a estas condições.

Se o amortecimento estrutural for mantido, a equação (2.46b) fornecerá a condição crítica de flutter com os valores de amortecimento assumidos.

2.2. A Secção Típica

Agora vamos analisar o caso em que o centro de gravidade não coincide com o eixo elástico, isto é, $S_w \neq 0$, desprezando o amortecimento estrutural uma vez que o seu efeito é favorável à estabilidade. Para dedicar a atenção ao efeito do centro de gravidade na estabilidade da secção típica vamos considerar que os eixos elástico e aerodinâmico estão na mesma posição.

Com estas condições, as equações de movimento (2.23) ficam

$$\begin{aligned} mh'' + S_w \theta'' + k_h h + c_h h' + k_{1\theta} \theta + c_{1\theta'} \theta' &= 0 \\ I_\theta \theta'' + S_w h'' + k_\theta \theta + c_{2h} h' + k_{2\theta} \theta + c_{2\theta'} \theta' &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Mais uma vez, estas equações têm soluções da forma

$$h = \underline{h}_0 e^{st} \quad \theta = \underline{\theta}_0 e^{st} \quad (2.49)$$

2.2. A Secção Típica

Substituindo as soluções de (2.49) em (2.48), obtêm-se duas equações algébricas cuja equação característica, não considerando a solução trivial, é dada por

$$\begin{aligned} & (mI_{\theta} - S_w^2)s^4 + \left(m \frac{fb^2}{4U} + I_{\theta} \frac{f}{U} - S_w \frac{fb}{4U} \right) s^3 \\ & + \left(mk_{\theta} + k_h I_{\theta} + f^2 \frac{b^2}{4U^2} - fS_w \right) s^2 + \left(k_h \frac{fb^2}{4U} + k_{\theta} \frac{f}{U} \right) s + (k_h k_{\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Examinando a equação (2.50) pode ver-se que, se S_w for negativo, a secção típica nunca entrará em instabilidade porque todos os coeficientes do discriminante de Routh têm o mesmo sinal.

2.2. A Secção Típica

Por outras palavras, uma secção típica com os eixos elástico e aerodinâmico coincidentes e o centro de gravidade posicionado no eixo elástico ou à sua frente não apresentará problemas de instabilidade aeroelástica, estática (divergência) ou dinâmica (flutter).

Se S_w for positivo, o coeficiente de s^4 será ainda positivo porque $mI_\theta > S_w$; o coeficiente de s^3 dá instabilidade apenas se $f=0$ como apresentado anteriormente. Assim, o único coeficiente que pode dar instabilidade é o de s^2 . Os outros coeficientes restantes, os de s^1 e s^0 , são positivos devido a considerações físicas.

A condição de instabilidade pode, então, ser escrita como

$$mk_\theta + k_h I_\theta + \frac{f^2 b^2}{4U^2} - fS_w \leq 0 \quad (2.51)$$

2.2. A Secção Típica

e a condição crítica de instabilidade de flutter pode ser escrita como

$$f_{1,2} = \frac{S_w \pm \sqrt{S_w^2 - 4(mk_\theta + k_h I_\theta)}}{\frac{2b^2}{4U^2}} \quad (2.52)$$

A equação (2.52) pode ser resolvida numericamente para se determinar a velocidade crítica de flutter nestas condições. Para simplificar a exposição, o amortecimento estrutural foi desprezado nas análises apresentadas nesta secção. No entanto, como referido anteriormente, o seu efeito é sempre estabilizador no sentido em que a velocidade crítica de instabilidade com o amortecimento estrutural é sempre superior àquela obtida com o amortecimento estrutural não incluído.

2.2. A Secção Típica

Nesta secção só foi usada a teoria simples de aerodinâmica quase-estática e, apesar da sua simplicidade, ela demonstrou ser capaz de explicar a causa dos vários tipos de instabilidade de natureza aeroelástica e o efeito de vários parâmetros envolvidos no problema.

Na secção seguinte será usada uma teoria mais elaborada na formulação do problema e serão discutidos os seus méritos relativos quando comparada à teoria aerodinâmica quase-estática.

2.2. A Secção Típica

- Exemplo 8.02:** Usando os dados do exemplo 8.01, determine:
- a) a velocidade crítica de flutter, usando a teoria aerodinâmica quase-estática aplicada à secção típica aeroelástica.

2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

A determinação exata das forças aerodinâmicas que atuam no perfil em movimento transiente em torno do estado inicial de equilíbrio é complexa e muito detalhada.

Em cada instante de tempo, a mudança de posição do perfil resulta numa alteração da circulação em seu torno, o que provoca uma mudança no vórtice do bordo de fuga.

Estes vórtices produzem velocidades verticais no perfil e afetam as cargas aerodinâmicas incrementais não estacionárias na secção sustentadora, tornando o problema extremamente complicado de analisar em termos físicos e de representar em termos matemáticos.

2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

Por outro lado, como foi demonstrado em 2.1, no ponto crítico de instabilidade dinâmica o movimento do sistema é uma oscilação harmónica pura.

Este facto promoveu o desenvolvimento da formulação das cargas aerodinâmicas incrementais não estacionárias que atuam num perfil em movimento harmónico simples, o que limita o tipo de não permanência; no entanto, ela apresenta a solução exata no ponto de instabilidade crítica.

Os primeiros estudos foram realizados por Birnbaum, Wagner, Kussner e Glauert e mais tarde por Theodorsen e Ellenberger no período de 1924 a 1939. Em 1940, Kussner na Alemanha e Theodorsen e Garrick nos EUA, obtiveram numa forma simples, as forças e momentos incrementais que atuam num perfil bidimensional em movimento harmónico simples.

2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

Theodorsen obteve a sustentação e o momento de arfagem incremental para o caso incompressível, usando as soluções potenciais linearizadas para os tipos de movimento individuais, isto é, as soluções individuais devido a θ , θ' , h' , etc.

Assumindo linearidade para somar as soluções individuais e aplicando o teorema de Bernoulli, ele obteve a sustentação incremental total como

$$L_{ea} = \pi \rho b^3 \left\{ -\frac{h''}{b} - \frac{2U}{b^2} C(k) h' + a \theta'' + \left[2 \left(a - \frac{1}{2} \right) C(k) - 1 \right] \right. \\ \left. \times \frac{U}{b} \theta' - \frac{2U^2}{b^2} C(k) \theta \right\} \quad (2.53)$$

2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

e o momento incremental em torno do eixo elástico da secção típica como

$$M_{ea} = \pi \rho b^4 \left\{ -\frac{a}{b} h'' - \frac{2Ug}{b^2} C(k) h' + \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \theta'' + \left[2 \left(\frac{1}{4} - a^2 \right) C(k) - \frac{1}{2} + a \right] \frac{U}{b} \theta - \frac{2gU^2}{b^2} C(k) \theta \right\} \quad (2.54)$$

onde $C(k)$ é a função de Theodorsen dada por

$$C(k) = F(k) + iG(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} = \frac{K_1(ik)}{K_0(ik) + K_1(ik)} \quad (2.55)$$

onde $H_0^{(2)}$ e $H_1^{(2)}$ são as funções de Hankel do segundo tipo e ordem zero e um, respetivamente; K_0 e K_1 são as funções modificadas de Bessel do segundo tipo e ordem zero e um, respetivamente;

2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

e $F(k)$ e $G(k)$ são as partes reais e imaginária, respetivamente, da função de Theodorsen.

Todas estas funções são função do parâmetro de frequência reduzida adimensional, k , que é definido por

$$k = \frac{b\omega}{U} \quad (2.56)$$

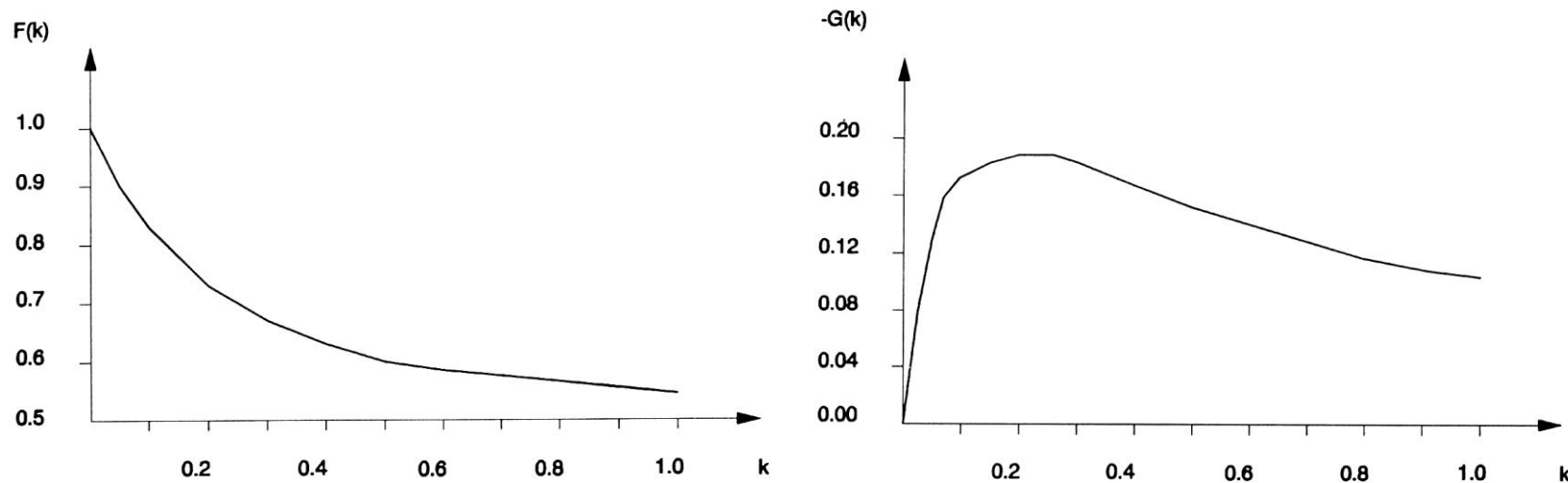
onde ω é a frequência de oscilação da secção típica.

As funções de Hankel e as funções modificadas de Bessel do segundo tipo podem ser encontradas em forma de tabela ou em forma de séries de potência em vários livros de funções matemáticas.

As partes real e imaginária das funções de Theodorsen, $F(k)$ e $G(k)$, são funções analíticas com comportamento suave.

2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

As partes real e imaginária das funções de Theodorsen, $F(k)$ e $G(k)$, são mostradas nas figuras abaixo em função do parâmetro de frequência reduzida k para $k < 1$.



2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

A tabela abaixo mostra uma pequena compilação das funções $F(k)$ e $G(k)$. Existem na literatura várias expressões aproximadas para as partes real e imaginária da função de Theodorsen.

k	F	$-G$	k	F	$-G$
∞	0.5000	0	0.80	0.5541	0.1165
10.00	0.5006	0.0124	0.50	0.5979	0.1507
6.00	0.5017	0.0206	0.20	0.7276	0.1886
4.00	0.5036	0.0305	0.05	0.9090	0.1305
1.00	0.5394	0.1003	0	1.000	0

2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

Uma fórmula simples e precisa para o cálculo destas funções foi obtida por Jonas na seguinte forma

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.0455}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.3}{k}i} \quad \text{para } k \leq 0.5$$

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.041}{k}i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.32}{k}i} \quad \text{para } k > 0.5$$
(2.57)

O erro máximo desta equação para a primeira parte é 2,7% e para a segunda parte é -2,1%.

Como o movimento é harmónico, as soluções têm a seguinte forma

$$h = \underline{h}_0 e^{i\omega t} \quad \theta = \underline{\theta}_0 e^{i\omega t}$$
(2.58)

2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

As soluções da equação (2.58), quando substituídas nas equações (2.53) e (2.54), dão expressões para a sustentação incremental total e para o momento em torno do eixo elástico da secção típica na forma

$$\begin{aligned} L_{ea} &= \pi \rho \omega^2 b^3 \left[L_h \frac{h}{b} + (L_\alpha - g L_h) \theta \right] \\ M_{ea} &= \pi \rho \omega^2 b^4 \left\{ (M_\alpha - g M_h) \frac{h}{b} + [M_\alpha - g(L_\alpha + M_h) + g^2 L_h] \theta \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.3. A Secção Típica Usando a Teoria Potencial Transiente Linearizada

Os coeficientes L_h , L_α , M_h e M_α estão publicados em várias referências e são dados por:

$$L_h = 1 - i \frac{2C(k)}{k}$$

$$L_\alpha = \frac{1}{2} - i \frac{1 + 2C(k)}{k} - \frac{2C(k)}{k^2}$$

$$M_h = \frac{1}{2}$$

$$M_\alpha = \frac{3}{8} - i \frac{1}{k}$$

2.3.1. Solução de Theodorsen para o Determinante do Flutter

Usando as expressões das cargas aerodinâmicas oscilatórias incrementais dadas pela equação (2.59) e substituindo as soluções harmónicas de (2.58) nas equações de movimento, pode escrever-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_0/b \\ \underline{\theta}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \mu \left[1 - \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega_h}{\omega_\theta} \right)^2 (1 + ic_h) \right] + L_h \\ B &= \mu x_\alpha + L_\alpha - L_h g \quad C = \mu x_\alpha + \frac{1}{2} - L_h g \\ D &= \mu x_\alpha^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 (1 + ic_h) \right] + L_h g^2 + M_\alpha - L_\alpha g - \frac{1}{2} g \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.3.1. Solução de Theodorsen para o Determinante do Flutter

e

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2} \quad r_\alpha^2 = \frac{I_\alpha}{mb^2} \quad (2.62)$$

Em (2.61) x_α é a distância entre o centro de gravidade (cg) e o eixo elástico e é positivo quando o cg se encontra atrás do eixo elástico.

Para uma solução não trivial da equação (2.60), escreve-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \Delta_R + i\Delta_I = 0 \quad (2.63)$$

onde Δ_R e Δ_I são as partes real e imaginária do determinante, respetivamente.

2.3.1. Solução de Theodorsen para o Determinante do Flutter

A solução começa assumindo um valor para k ($k = \omega b / U$).

Calculam-se os coeficientes aerodinâmicos ou usam-se tabelas aerodinâmicas para obter os valores destes coeficientes para o valor predefinido de k . Escreve-se $X = 1 / \omega^2$, resolve-se $\Delta_R = 0$ e obtém-se o valor de X_R correspondente. Resolve-se $\Delta_I = 0$, obtém-se o valor de X_I correspondente e repete-se todo o processo para diferentes valores de k .

Desenham-se as curvas de X_R e X_I em função de k .

Na interseção das duas curvas, tem-se o mesmo valor de X ($X = 1 / \omega^2$). Determina-se este valor de ω e o valor correspondente de k . Deste valor de k , calcula-se a velocidade correspondente U . Estes valores de ω e U são as condições críticas de flutter do problema.

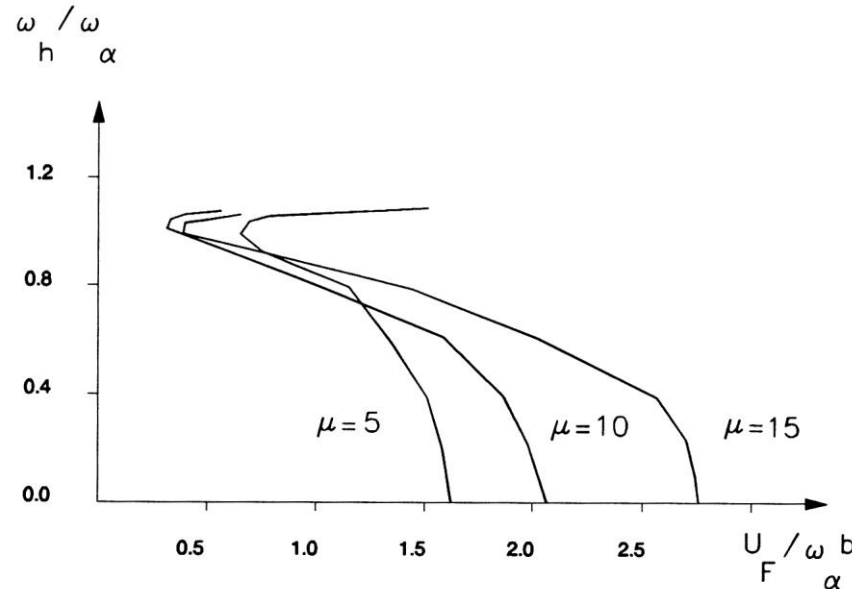
2.3.2. Estudos Paramétricos Usando a Teoria Potencial Bidimensional

As velocidades críticas de flutter de uma secção típica são calculadas para diferentes configurações para se fazer um estudo paramétrico dos vários parâmetros envolvidos no problema.

Os resultados estão resumidos nas figuras seguintes.

2.3.2. Estudos Paramétricos Usando a Teoria Potencial Bidimensional

1. Com o aumento de ω_h / ω_a , a velocidade de flutter diminui, com a velocidade mínima a ocorrer para $\omega_h / \omega_a = 1$, resultando do facto de a instabilidade de flutter ocorrer devido ao acoplamento das duas frequências. Assim, a velocidade mínima ocorre quando $\omega_h = \omega_a$.



$$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2}$$

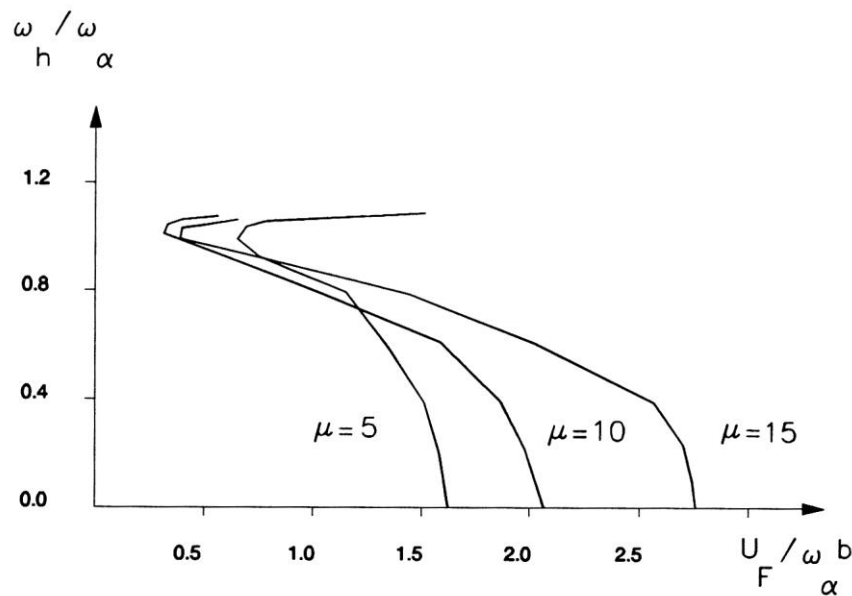
$$a = -0,2$$

$$r_\alpha^2 = 1/3$$

$$x_\alpha = 0,1$$

2.3.2. Estudos Paramétricos Usando a Teoria Potencial Bidimensional

2. O efeito da massa volúmica do ar na velocidade de flutter é o aumento de U_F com a redução de ρ , isto é, torna-se conservador executar os cálculos de flutter ao nível do mar.



$$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2}$$

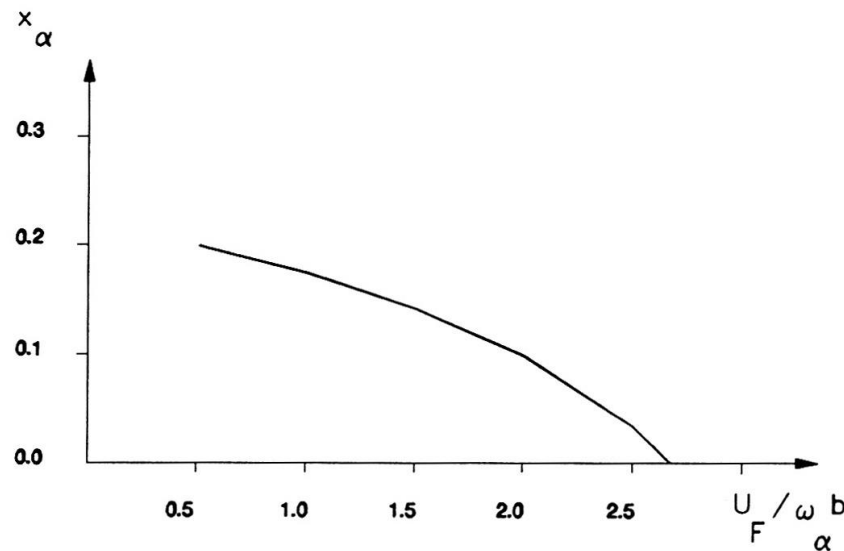
$$a = -0,2$$

$$r_\alpha^2 = 1/3$$

$$x_\alpha = 0,1$$

2.3.2. Estudos Paramétricos Usando a Teoria Potencial Bidimensional

3. Com o aumento de x_α , a velocidade de flutter diminui.



$$x_\alpha = \frac{S_w}{mb}$$

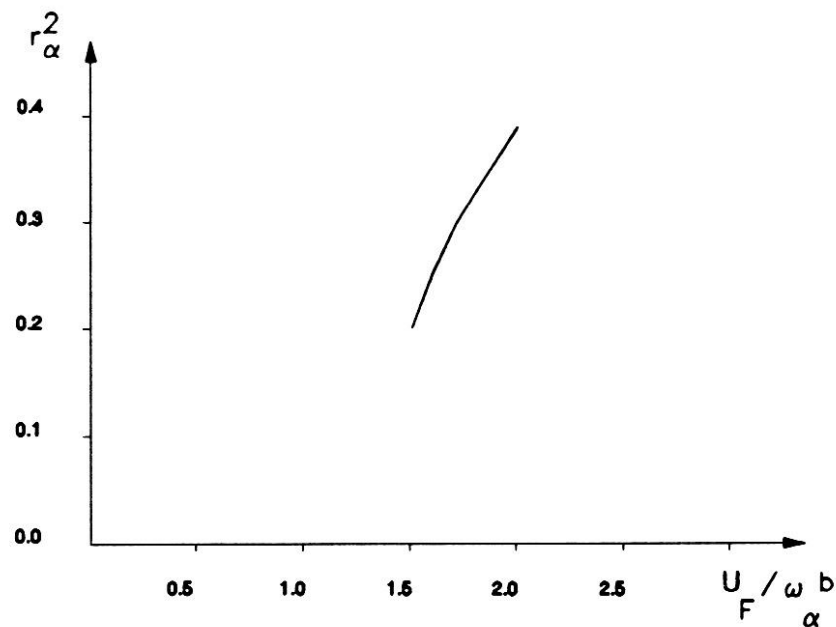
$$\mu = 10$$

$$a = -0,3$$

$$r_\alpha^2 = 0,25$$

2.3.2. Estudos Paramétricos Usando a Teoria Potencial Bidimensional

4. Com o aumento de r_α^2 , isto é, um aumento da rigidez à torção, a velocidade de flutter aumenta.



$$r_\alpha^2 = \frac{I_\alpha}{mb^2}$$

$$\mu = 10$$

$$a = -0,2$$

$$x_\alpha = 0,1$$

$$\omega_h / \omega_\alpha = 0,3$$

2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

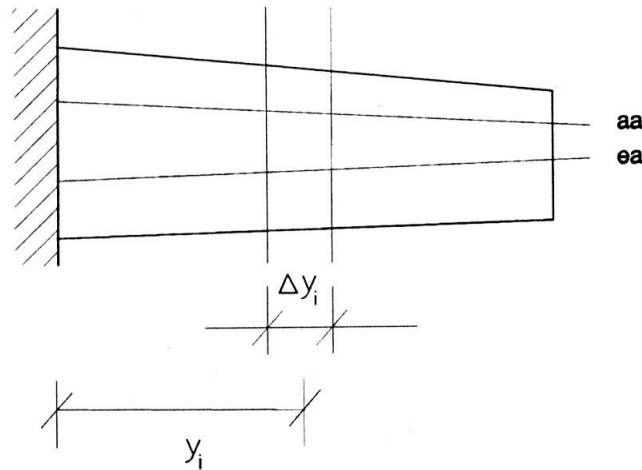
A teoria da secção típica pode ser extendida diretamente para o cálculo da instabilidade aeroelástica da asa plana de razão de aspeto elevada e sem grandes massas concentradas em voo de baixa velocidade usando a simplificação aerodinâmica da teoria do elemento de asa.

Mais uma vez, a aproximação da teoria do elemento de asa para superfícies sustentadoras de grande razão de aspeto consiste na divisão da superfície sustentadora em tiras, de largura pequena mas finita, distribuídas ao longo da envergadura e assumindo que o escoamento em cada tira é bidimensional e não interage com o escoamento de outra tira da superfície sustentadora.

O comprimento da corda da tira é tido como a média geométrica das cordas dessa tira.

2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

Considere-se, mais uma vez, a superfície sustentadora da figura, dividida em tiras com uma largura de Δy_i , uma corda média c_i e uma posição na envergadura y_i .



2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

Para cada tira vai usar-se a seguinte notação:

$m(y_i)$ = massa por unidade de largura na estação i ;

$I(y_i)$ = momento de inércia em torno do eixo elástico (ea) por unidade de largura na estação i ;

$S_w(y_i)$ = momento estático da massa em torno de ea por unidade de largura na estação i .

Para cada tira na estação y_i , podem escrever-se expressões para a deflexão e a rotação na seguinte forma

$$\begin{aligned} h(y,t) &= f(y)\underline{h} \\ \theta(y,t) &= \theta(y)\underline{\theta} \end{aligned} \tag{2.64}$$

onde se assume que $f(y)$ e $\theta(y)$ são os modos de flexão e de torção desacoplados normalizados para valores unitários na ponta da asa.

2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

A expressão para a energia de extensão de deformação para a asa pode ser escrita como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [f(y)\underline{h}] \right\}^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^l GJ(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\theta(y)\underline{\theta}] \right\}^2 dy \quad (2.65)$$

onde

$EI(y)$ = rigidez à flexão na estação i ;

$GJ(y)$ = rigidez à torção na estação i ;

l = comprimento total da semi-envergadura.

2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

Definindo k_h e k_θ como

$$k_h = \int_0^l EI(y) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [f(y)] \right\}^2 dy$$
$$k_\theta = \int_0^l GJ(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\theta(y)] \right\}^2 dy$$
(2.66)

A expressão da energia de extensão de deformação de uma asa fica

$$U = \frac{1}{2} k_h \underline{h}^2 + \frac{1}{2} k_\theta \underline{\theta}^2$$
(2.67)

Definindo, agora, as frequências naturais não acopladas à flexão e à torção como ω_h e ω_θ , respetivamente, pode escrever-se uma nova expressão para a energia de extensão.

2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

Assim

$$U = \frac{1}{2} M \omega_h^2 \underline{h}^2 + \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2 \underline{\theta}^2 \quad (2.68)$$

onde M e I_θ são as massas generalizadas para a flexão e para a torção, respetivamente, e são dadas por

$$\begin{aligned} M &= \int_0^l m(y) [f(y)]^2 dy \\ I_\theta &= \int_0^l I(y) [\theta(y)]^2 dy \end{aligned} \quad (2.69)$$

A expressão da energia cinética para uma asa é

$$T = \frac{1}{2} M \underline{h}'^2 + \frac{1}{2} I_\theta \underline{\theta}'^2 + S \underline{h}' \underline{\theta}' \quad (2.70)$$

onde S é o momento estático da massa total.

2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

Este valor é dado por

$$S = \int_0^l S_w f(y) \theta(y) dy \quad (2.71)$$

Considerando que a estrutura da asa possui amortecimento estrutural viscoso, pode escrever-se para a representação do amortecimento estrutural a função de dissipação como

$$D = \frac{1}{2} c_h \underline{h'}^2 + \frac{1}{2} c_\theta \underline{\theta'}^2 \quad (2.72)$$

Em qualquer estação y_i , pode escrever-se para a sustentação e para o momento aerodinâmico em torno do eixo elástico as mesmas expressões dadas pela equação (2.59), mas substituindo h e θ por $f(y)\underline{h}$ e $\theta(y)\underline{\theta}$, respetivamente.

2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

Desta forma, as cargas aerodinâmicas incrementais na estação y_i ficam

$$\begin{aligned} L_{ea} &= \pi \rho \omega^2 b^3 \left[L_h f(y) \frac{h}{b} + (L_\alpha - g L_h) \theta(y) \underline{\theta} \right] \\ M_{ea} &= \pi \rho \omega^2 b^4 \left\{ (M_\alpha - g L_h) f(y) \frac{h}{b} + [M_\alpha - g(L_\alpha + M_h) + g^2 L_h] \theta(y) \underline{\theta} \right\} \end{aligned} \quad (2.73)$$

e para o total da meia asa, as forças aerodinâmicas incrementais generalizadas ficam

$$\begin{aligned} Q_h &= \int_0^l L_{ea} f(y) dy \\ Q_\theta &= \int_0^l M_{ea} \theta(y) dy \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

Os integrais das equações (2.74) são avaliados numericamente assumindo valores constantes para cada tira. As cargas aerodinâmicas podem, assim, ser escritas na seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} Q_h \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \pi \rho \omega^2 \begin{bmatrix} A_{hh} & A_{h\theta} \\ A_{\theta h} & A_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{h} \\ \underline{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{hh} &= \int_0^l L_h b^2 [f(y)]^2 dy \\ A_{h\theta} &= \int_0^l b^3 f(y) \theta(y) (L_\alpha - g L_h) dy \\ A_{\theta h} &= \int_0^l b^3 f(y) \theta(y) (M_h - g L_h) dy \\ A_{\theta\theta} &= \int_0^l b^4 [\theta(y)]^2 \left[M_\alpha - g (L_\alpha + M_h) + \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 L_h \right] dy \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.3.3. Extensão a Superfícies Sustentadoras Tridimensionais

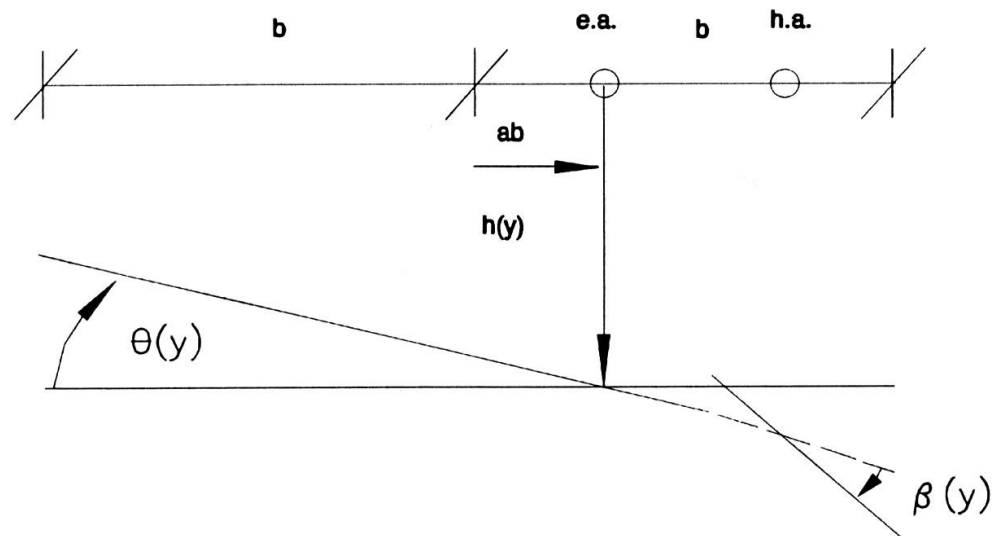
Aplicando as equações de movimento de Lagrange, obtém-se para a vibração livre, as seguintes equações de uma asa

$$\begin{aligned} \left[M + \pi\rho A_{hh} - M(1 + ic_h) \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 \right] \underline{h} + (S + \pi\rho A_{h\theta}) \underline{\theta} &= 0 \\ (S + \pi\rho A_{\theta h}) \underline{h} + \left[I_\theta + \pi\rho A_{\theta\theta} - I_\theta(1 + ic_\theta) \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 \right] \underline{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

A solução obtém-se da mesma forma usando o método de solução de Theodorsen como visto na secção 2.3 para o caso da secção típica bidimensional.

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

Considere-se a secção típica da figura, na qual foi introduzida uma superfície de controlo adicionando um terceiro grau de liberdade.



2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

Adota-se a mesma notação usada para a secção típica com dois graus de liberdade e considera-se que a linha de articulação da superfície de controlo se encontra a uma distância cb da origem e que o seu bordo de ataque se encontra a uma distância eb da origem.

O terceiro grau de liberdade é a rotação da superfície de controlo β medida em relação à rotação da superfície principal sendo positiva com o bordo de ataque para cima como mostra a figura.

A mesma teoria usada para a secção típica com dois graus de liberdade pode ser estendida para o caso de três graus de liberdade sem grande dificuldade.

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

Vamos ver a teoria do elemento de asa para uma semiasa completa para a secção típica com três graus de liberdade.

Vai usar-se a seguinte notação:

$m(y_i)$ = massa por unidade de largura na estação i ;

$I(y_i)$ = momento de inércia em torno de ea por unidade de largura na estação i ;

$S_w(y_i)$ = momento estático da massa em torno de ea por unidade de largura na estação i ;

$I_\beta(y_i)$ = momento de inércia da massa da superfície de controlo em torno de ea por unidade de largura na estação i ;

$S_\beta(y_i)$ = momento estático da massa da superfície de controlo em torno de ea por unidade de largura na estação i .

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

Para cada tira na estação y_i , pode escrever-se para a deflexão da superfície principal, a rotação da superfície principal e a rotação da superfície de controlo:

$$\begin{aligned} h(y,t) &= f(y)\underline{h} \\ \theta(y,t) &= \theta(y)\underline{\theta} \\ \beta(y,t) &= \beta(y)\underline{\beta} \approx \underline{\beta} \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde foi assumido que a rotação da superfície de controlo é uma rotação de corpo rígido em torno da linha de articulação, isto é, o ângulo β é assumido constante ao longo da envergadura.

A energia de extensão para pequenas deformações da semi-asa completa é

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [f(y)\underline{h}] \right\}^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^l GJ(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\theta(y)\underline{\theta}] \right\}^2 dy + \frac{1}{2} k_\beta \beta^2 \quad (2.79)$$

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

Em que a notação é a mesma usada na secção 2.3.

Usando a equação (2.66) pode escrever-se a energia potencial na forma

$$U = \frac{1}{2} M \omega_h^2 \underline{h}^2 + \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2 \underline{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_\beta \omega_\beta^2 \underline{\beta}^2 \quad (2.80)$$

onde ω_β é a frequência de rotação da superfície de controlo, M e I_θ são dados pela equação (2.69) e I_β é dado por

$$I_\beta = \int_{l_1}^l I_\beta(y) dy \quad (2.81)$$

Onde l_1 é a distância desde a raiz da asa até à corda interior da superfície de controlo.

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

Incluindo amortecimento estrutural viscoso na análise, pode escrever-se a função de dissipação na forma

$$D = \frac{1}{2} c_h \underline{h}'^2 + \frac{1}{2} c_\theta \underline{\theta}'^2 + \frac{1}{2} c_\beta \underline{\beta}'^2 \quad (2.82)$$

A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} M \underline{h}'^2 + \frac{1}{2} I_\theta \underline{\theta}'^2 + S \underline{h}' \underline{\theta}' + \frac{1}{2} I_\beta \underline{\beta}'^2 + S_\beta \underline{h}' \underline{\beta}' + P_{\theta\beta} \underline{\theta}' \underline{\beta}' \quad (2.83)$$

onde

$$\begin{aligned} S_\beta &= \int_{l_1}^l S_\beta(y) f(y) dy \\ P_{\theta\beta} &= \int_{l_1}^l [S_\beta(y)(c-a)b + I_\beta(y)] f(y) dy \end{aligned} \quad (2.84)$$

e as restantes constantes já foram definidas anteriormente.

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

As cargas aerodinâmicas para tiras da asa sem superfície de controlo são iguais às dadas na secção 2.3. As cargas aerodinâmicas para as tiras com superfícies de controlo são dadas por Theodorsen em termos da função de Theodorsen e envolvem outras funções devido à presença da superfície de controlo. Estas também podem ser escritas em função de outras constantes para três graus de liberdade. Estes coeficientes estão tabelados em vários livros.

As cargas aerodinâmicas, sustentação no centro aerodinâmico, momento no centro aerodinâmico e momento aerodinâmico em torno da linha de articulação por unidade de envergadura, para uma tira com superfície de controlo, podem ser escritas na seguinte forma:

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

$$\begin{aligned}
 L' &= \pi \rho \omega^2 b^3 \left[L_h f(y) \frac{h}{b} + (L_\alpha - g L_h) \theta(y) \underline{\theta} + (L_\beta - d L_z) \underline{\beta} \right] \\
 M' &= \pi \rho \omega^2 b^4 \left\{ (M_\alpha - g L_h) f(y) \frac{h}{b} + [M_\alpha - g(L_\alpha + M_h) + g^2 L_h] \theta(y) \underline{\theta} \right. \\
 &\quad \left. + [g L_\beta - d M_z + d g L_z] \underline{\beta} \right\} \\
 T' &= \pi \rho \omega^2 b^4 \left\{ (T_h - d P_h) f(y) \frac{h}{b} + [T_\alpha - d(P_\alpha - g T_h + g d P_h)] \theta(y) \underline{\theta} \right. \\
 &\quad \left. + [T_\beta - d(P_\beta + T_z) + d^2 P_z] \underline{\beta} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

onde

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{1}{2} + a \\
 d &= c - e
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

e para o total da meia asa, as forças aerodinâmicas incrementais generalizadas ficam

$$\begin{aligned}Q_h &= \int_0^{l_1} L_{ea} f(y) dy + \int_{l_1}^l L' f(y) dy \\Q_\theta &= \int_0^{l_1} M_{ea} \theta(y) dy + \int_{l_1}^l M' \theta(y) dy \\Q_\beta &= \int_{l_1}^l T' \beta(y) dy\end{aligned}\tag{2.87}$$

Os coeficientes aerodinâmicos nas equações (2.85) são dados em referências.

Os integrais nas equações (2.87) são avaliados numericamente considerando valores constantes para cada tira da asa.

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

As cargas aerodinâmicas podem, assim, ser escritas na seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} Q_h \\ Q_\theta \\ Q_\beta \end{Bmatrix} = \pi \rho \omega^2 \begin{bmatrix} A_{hh} & A_{h\theta} & A_{h\beta} \\ A_{\theta h} & A_{\theta\theta} & A_{\theta\beta} \\ A_{\beta h} & A_{\beta\theta} & A_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{h} \\ \underline{\theta} \\ \underline{\beta} \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{hh} &= \int_0^l L_h b^2 [f(y)]^2 dy \\ A_{h\theta} &= \int_0^l b^3 f(y) \theta(y) (L_\alpha - g L_h) dy \\ A_{\theta h} &= \int_0^l b^3 f(y) \theta(y) (M_h - g L_h) dy \\ A_{\theta\theta} &= \int_0^l b^4 [\theta(y)]^2 [M_\alpha - g(L_\alpha + M_h) + g^2 L_h] dy \end{aligned} \quad (2.89a)$$

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

$$\begin{aligned}
 A_{h\beta} &= \int_{l_1}^l b^3 f(y) (L_\beta - dL_z) dy \\
 A_{\theta\beta} &= \int_{l_1}^l b^3 \theta(y) (M_\beta - gL_\beta - dM_z + dgL_z) dy \\
 A_{\beta h} &= \int_{l_1}^l b^3 f(y) (T_h - dP_h) dy \\
 A_{\beta\theta} &= \int_{l_1}^l b^4 f(y) (T_\theta - dP_\theta - gT_h - gdP_h) dy \\
 A_{\beta\beta} &= \int_{l_1}^l b^4 [T_\beta - d(P_\beta + T_z) + d^2 P_z] dy
 \end{aligned} \tag{2.89b}$$

As equações de movimento de Lagrange são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi'} \right) - \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial D}{\partial \xi'} = Q_\xi \tag{2.90}$$

onde $\xi = h, \theta$ ou β .

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

Aplicando as equações de movimento de Lagrange para uma solução harmónica da forma

$$h = \underline{h}_0 e^{i\omega t} \quad \theta = \underline{\theta}_0 e^{i\omega t} \quad \beta = \underline{\beta}_0 e^{i\omega t} \quad (2.91)$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{h} \\ \underline{\theta} \\ \underline{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.92)$$

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

onde

$$\begin{aligned}
 A &= \left[M + \pi \rho A_{hh} - M \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 (1 + i c_h) \right] \\
 B &= S + \pi \rho A_{h\theta} \\
 C &= S_\beta + \pi \rho A_{h\beta} \\
 C &= S_\beta + \pi \rho A_{h\beta} \\
 E &= \left[I_\theta + \pi \rho A_{\theta\theta} - I_\theta \left(\frac{\omega_\theta}{\omega} \right)^2 (1 + i c_\alpha) \right] \\
 F &= P_{\theta\beta} + \pi \rho A_{\theta\beta} \\
 G &= S_\beta + \pi \rho A_{\beta h} \\
 H &= P_{\beta\theta} + \pi \rho A_{\beta\theta} \\
 I &= \left[I_\beta + \pi \rho A_{\beta\beta} - I_\beta \left(\frac{\omega_\beta}{\omega} \right)^2 (1 + i c_\beta) \right]
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

2.4. A Secção Típica com Superfície de Controlo

A solução deste problema obtém-se da mesma forma discutida na secção 2.3 usando o método de solução de Theodorsen na determinação dos valores críticos da velocidade de flutter.

2.5. Reversão e Eficiência da Superfície de Controlo

A aplicação da teoria aerodinâmica do elemento de asa dado na secção 2.4 vai ser estendida a um problema muito importante na aeroelasticidade: reversão e eficiência de controlo.

Nesta apresentação será apenas discutido o caso da reversão e eficiência do aileron porque a extensão a outras superfícies de controlo é simples.

O ailerons controlam o rolamento de um avião. Devido à rotação de nariz em cima do aileron da asa direita, vai haver um aumento na sustentação dessa asa. Ao mesmo tempo, vai haver uma diminuição de sustentação na asa esquerda devido à rotação de nariz em baixo do aileron da asa esquerda.

O resultado global é um momento de rolamento em torno do eixo longitudinal da fuselagem.

2.5. Reversão e Eficiência da Superfície de Controlo

A rotação de nariz em cima do aileron direito cria um momento da secção da asa em torno do seu eixo elástico que tende a diminuir o ângulo de ataque da asa devido à sua flexibilidade e vice-versa na asa esquerda. Este efeito causa uma redução do momento de rolamento produzido em torno do eixo longitudinal da fuselagem comparado com o momento de rolamento produzido por uma asa totalmente rígida.

Apesar da rigidez da asa ser constante, a carga aerodinâmica aumenta com a velocidade de voo e, por isso, espera-se que numa dada velocidade o efeito da deflexão do aileron no rolamento seja nulo e que acima desta velocidade o efeito esteja invertido.

2.5. Reversão e Eficiência da Superfície de Controlo

A eficiência do aileron é definida como sendo a razão entre o momento de rolamento obtido pela asa flexível e o momento de rolamento produzido por uma asa equivalente totalmente rígida. A sustentação incremental do perfil por unidade de envergadura é dado por

$$L' = 2\pi\rho U^2 \left(b\theta + b \frac{\partial C_l}{\partial \beta} \beta \right) \quad (2.94)$$

onde ρ é a densidade do ar, U é a velocidade de voo, b é o comprimento de metade da corda da secção, θ é o ângulo de ataque incremental na secção em questão, β é a deflexão do aileron na secção correspondente e o declive de sustentação 2π é assumido por simplicidade.

2.5. Reversão e Eficiência da Superfície de Controlo

Assumindo que b é constante ao longo da envergadura do aileron, pode escrever-se para o momento de rolamento (RM) total

$$RM = 4\pi\rho U^2 \left(\sum_{asa} b_i y_i \Delta y_i \theta_i + \beta \sum_{aileron} b_i \frac{T_{10}}{\pi} y_i \Delta y_i \right) \quad (2.95)$$

onde T_{10} é uma função da razão da corda do aileron pela corda do perfil.

Na velocidade de reversão de controlo, o momento de rolamento é nulo, logo a equação (2.95) pode ser escrita na forma

$$\beta = - \frac{\sum_{asa} b_i y_i \Delta y_i \theta_i}{\sum_{aileron} b_i \frac{T_{10}}{\pi} y_i \Delta y_i} \quad (2.96)$$

2.5. Reversão e Eficiência da Superfície de Controlo

O momento aerodinâmico incremental na estação i devido à deflexão do aileron é

$$\Delta M_i = \lambda \left\{ 2g b_i^2 \theta_i + \left(2g \frac{T_{10}}{\pi} - \frac{T_4 + T_{10}}{\pi} \right)_i b_i^2 \beta \right\} \Delta y_i \quad (2.97)$$

Substituindo a equação (2.96) na equação (2.97) tem-se

$$\Delta M_i = \lambda \left\{ 2g b_i^2 \theta_i - \left(2g \frac{T_{10}}{\pi} - \frac{T_4 + T_{10}}{\pi} \right)_i b_i^2 \frac{\sum_{asa} b_i y_i \Delta y_i \theta_i}{\sum_{aileron} b_i \frac{T_{10}}{\pi} y_i \Delta y_i} \right\} \Delta y_i \quad (2.98)$$

e, para a meia asa completa, pode escrever-se em forma de matriz

$$\{\Delta M_i\} = \lambda [F] \{\theta_i\} \quad (2.99)$$

2.5. Reversão e Eficiência da Superfície de Controlo

onde $[F]$ é uma matriz diagonal com os elementos da tira correspondentes dados pela equação(2.98). Mais uma vez, os ângulos de rotação $\{\theta_i\}$ estão relacionados com os momentos de torção $\{\Delta M_i\}$ através da matriz de coeficientes de influência $[B]$, logo

$$\{\theta_i\} = [B]\{\Delta M_i\} \quad (2.100)$$

Usando as equações (2.99) e (2.100) pode escrever-se

$$\{\theta_i\} = \lambda[B][F]\{\theta_i\} = \lambda[G]\{\theta_i\} \quad (2.101)$$

onde

$$[G] = [B][F] \quad (2.102)$$

2.5. Reversão e Eficiência da Superfície de Controlo

A equação (2.101) representa um problema de valores próprios. O valor próprio de valor mais baixo fornece a velocidade de reversão mais baixa.

Os coeficientes aerodinâmicos T_4 e T_{10} são calculados por Theodorsen como funções de e , a razão da corda do aileron pela corda do perfil. A tabela abaixo mostra alguns destes valores.

e	T_4	T_{10}
0.0	-1.57080	2.57080
0.1	-1.37112	2.46562
0.2	-1.17348	2.34922
0.3	-0.97993	2.22004
0.4	-0.79266	2.07578
0.5	-0.61418	1.91323
0.6	-0.44730	1.72731
0.7	-0.29550	1.50954