



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Covilhã | Portugal

Análise Modal

Mecânica Estrutural (10391/1411)

2023

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais

1. Introdução

Um problema de valores próprios é definido como sendo um problema em que desejamos obter os valores do parâmetro λ de forma que a equação

$$A(u) = \lambda B(u) \quad (1.1)$$

é satisfeita para valores não triviais de u .

Aqui A e B representam operadores matriciais ou operadores diferenciais, e os valores de λ para os quais (1.1) é satisfeita são chamados de valores próprios.

Para cada valor de λ existe um vetor u , chamado vetor próprio.

1. Introdução

Por exemplo, a equação

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u(x), \quad \text{com } A = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad B = 1$$

que aparece relacionada com a vibração axial natural de uma barra ou a vibração transversal de um cabo, constitui um problema de valores próprios. Aqui λ representa o quadrado da frequência de vibração ω .

Em geral, a determinação dos valores próprios tem interesse na engenharia e na matemática. Em problemas estruturais, os valores próprios representam ou as frequências naturais ou as cargas de instabilidade.

1. Introdução

Vamos desenvolver os modelos de elementos finitos de problemas de valores próprios descritos por equações diferenciais.

Uma vez que existe semelhança entre as equações diferenciais que governam os problemas de valores próprios e os problemas de valores de contorno, os passos necessários para a construção dos seus modelos de elementos finitos são totalmente análogos.

Os problemas de valores próprios diferenciais são reduzidos a problemas de valores próprios algébricos (isto é $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$) através da aproximação do elemento finito. Os métodos de solução dos problemas de valores próprios algébricos são usados para calcular os valores e os vetores próprios.

2. Formulação dos Problemas de Valores Próprios

2.1. Equação Parabólica

Considere-se a equação diferencial parcial

$$\rho c A \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k A \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q(x, t) \quad (2.2)$$

que aparece relacionada com a transferência de calor transiente em sistemas de uma dimensão (por exemplo uma parede plana ou uma palheta). Aqui u representa a temperatura, k a condutividade térmica, ρ a massa volúmica, A a área da secção transversal, c o calor específico e q a produção de calor por unidade de comprimento. As equações que envolvem a derivada de primeira ordem do tempo chamam-se equações parabólicas.

A solução homogénea (quando $q=0$) da equação (2.2) é frequentemente procurada na forma de um produto de uma função de x por uma função de t .

2.1. Equação Parabólica

Usando esta técnica (a técnica de separação de variáveis) na seguinte forma

$$u^h(x, t) = U(x)T(t) \quad (2.3)$$

e substituindo na solução homogénea de (2.2) tem-se

$$\rho c A U \frac{dT}{dt} - \frac{d}{dx} \left(k A \frac{dU}{dx} \right) T = 0$$

Separando as variáveis de t e x (assumindo que $\rho c A$ e $k A$ são funções apenas de x), obtém-se

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c A U} \frac{d}{dx} \left(k A \frac{dU}{dx} \right) \quad (2.4)$$

2.1. Equação Parabólica

Note-se que a parte esquerda da equação é apenas função de t enquanto que a parte direita é apenas função de x . Para duas funções de duas variáveis independentes serem iguais para todos os valores das variáveis independentes, ambas as funções têm que ser iguais à mesma constante, $-\lambda$ ($\lambda > 0$):

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c A U} \frac{d}{dx} \left(k A \frac{dU}{dx} \right) = -\lambda$$

ou

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda T \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dx} \left(k A \frac{dU}{dx} \right) + \lambda \rho c A U = 0 \quad (2.6)$$

2.1. Equação Parabólica

O sinal negativo da constante λ baseia-se no requisito físico de que a solução $U(x)$ tem que ser harmónica em x enquanto $T(t)$ decai exponencialmente com o aumento de t .

A solução de (2.5) é

$$T(t) = Ke^{-\lambda t} \quad (2.7)$$

onde K é uma constante de integração. Os valores de λ são determinados através da resolução de (2.6), que também dá $U(x)$. Com $T(t)$ e $U(x)$ conhecidas, tem-se a solução homogénea (2.3) completa de (2.2).

O problema de resolver (2.6) para λ e $U(x)$ chama-se de problema de valores próprios, λ chama-se o valor próprio e $U(x)$ a função própria.

2.1. Equação Parabólica

Quando k , A , ρ e c são constantes, a solução de (2.6) é

$$U(x) = C \sin \alpha x + D \cos \alpha x, \quad \alpha^2 = \frac{\rho c}{k} \lambda \quad (2.8)$$

onde C e D são constantes de integração. As condições de fronteira do problema são usadas para determinar as relações algébricas entre C e D . As relações algébricas podem ser expressas na forma matricial como $([A] - \alpha[B])\{V\} = \{0\}$, onde $[A]$ e $[B]$ dependem, em geral, de k , c e ρ , e $\{V\}$ é o vetor das constantes de integração C e D . Uma vez que C e D não podem ser ambas zero (se não obter-se-ia a solução trivial), é necessário que o determinante da matriz de coeficientes $[A] - \alpha[B]$ seja zero. Isto resulta num problema de valores próprios algébrico cuja solução dá α (e daí λ) e $\{V\} = (C, D)$.

2.1. Equação Parabólica

Para organizar as ideias, considere-se a equação (2.6) sujeita às condições de fronteira (por exemplo uma palheta com uma temperatura especificada em $x=0$ e isolada em $x=L$)

$$U(0) = 0, \quad \left[kA \frac{dU}{dx} \right]_{x=L} = 0 \quad (2.9)$$

Pode ver-se que as condições de fronteira não homogéneas podem ser convertidas em condições de fronteira homogéneas através da mudança de variáveis. Usando as condições de fronteira acima em (2.8), obtém-se

$$0 = C \cdot 0 + D \cdot 1, \quad 0 = \alpha(C \cos \alpha L - D \sin \alpha L)$$

ou

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos \alpha L & -\sin \alpha L \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

2.1. Equação Parabólica

Para a solução não trivial (isto é, C e D não podem ser ambas zero), colocamos o determinante da matriz de coeficientes em (2.10) igual a zero e obtém-se (uma vez que α não pode ser zero)

$$\cos \alpha L = 0 \rightarrow \alpha_n L = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

Daqui, a solução homogénea fica (notar que a constante K em (2.7) é absorvida por C_n)

$$u^h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} \sin \alpha_n x, \quad \lambda_n = \alpha_n^2 \left(\frac{k}{\rho c} \right), \quad \alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \quad (2.11)$$

As constantes C_n são determinadas usando as condições iniciais do problema, $u(x, 0) = u_0(x)$:

$$u^h(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \alpha_n x = u_0(x)$$

2.1. Equação Parabólica

Multiplicando ambos os lados por $\sin \alpha_m x$, integrando no intervalo $(0, L)$ e usando a condição de ortogonalidade

$$\int_0^L \sin \alpha_n x \sin \alpha_m x dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{L}{2}, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (2.12)$$

obtém-se

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \alpha_n x dx \quad (2.13)$$

A solução completa de (2.6) é dada pela soma da solução homogénea com a solução particular

$$u(x, t) = u^h(x, t) + u^p(x, t)$$

2.1. Equação Parabólica

O exemplo apresentado acima mostra a necessidade de calcular os valores próprios (α_n) no contexto da determinação da resposta transiente de uma equação parabólica.

Em seguida, irá considerar-se a resposta transiente de uma equação de segunda ordem no tempo, conhecida por equação hiperbólica.

2.2. Equação Hiperbólica

O movimento axial de uma barra, por exemplo, é descrito pela equação

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t) \quad (2.14)$$

onde u representa o deslocamento axial, E o módulo de elasticidade, A a área da secção transversal, ρ a massa volúmica e f a força axial por unidade de comprimento.

A solução de (2.14) consiste em duas partes: a solução homogénea u^h (quando $f=0$) e a solução particular u^p . A solução homogénea é obtida pela técnica da separação das variáveis, como visto anteriormente para a equação parabólica.

2.2. Equação Hiperbólica

A solução homogénea da equação (2.14) também é assumida como tendo a forma de (2.3). Substituindo (2.3) na forma homogénea de (2.14) dá

$$\rho AU \frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{d}{dx} \left(EA \frac{dU}{dx} \right) T = 0$$

Assumindo que ρA e EA são apenas funções de x , fica-se com

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{\rho A U} \frac{d}{dx} \left(EA \frac{dU}{dx} \right) = -\alpha^2$$

ou

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \alpha^2 T = 0 \quad (2.15)$$

$$-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{dU}{dx} \right) - \alpha^2 \rho AU = 0 \quad (2.16)$$

2.2. Equação Hiperbólica

O sinal negativo da constante α baseia-se no requisito físico de que $u(x, t)$ é harmónica em x e t .

A solução de (2.15) é

$$T(t) = Ke^{-i\alpha t} = K_1 \cos \alpha t + K_2 \sin \alpha t \quad (2.17)$$

onde K_1 e K_2 são constantes de integração. A solução de (2.16), quando E , A e ρ são constantes, é

$$U(x) = C \sin \bar{\alpha} x + D \cos \bar{\alpha} x, \quad \bar{\alpha}^2 = \frac{\rho}{E} \alpha^2 \quad (2.18)$$

onde C e D são novamente constantes de integração. No processo de determinar as constantes C e D usando as condições de fronteira do problema, é necessário resolver um problema de valores próprios.

2.2. Equação Hiperbólica

Ao contrário do caso do problema da condução de calor, as quantidades α_n no caso das barras têm um significado físico direto, nomeadamente, representam as frequências naturais do sistema. Assim, na mecânica estrutural podemos estar interessados em determinar apenas as frequências naturais do sistema e não a resposta transiente.

Quando estamos interessados apenas nas frequências naturais do sistema, o problema de valores próprios pode ser formulado diretamente da equação de movimento (2.14) assumindo que a forma da solução é periódica no tempo t

$$u(x, t) = U(x)e^{-i\omega t} \quad (2.19)$$

onde ω representa a frequência natural de vibração e i é $\sqrt{-1}$.

2.2. Equação Hiperbólica

Em (2.19) $U(x)$ representa a configuração da estrutura na frequência dada, chamada forma modal (isto é, para cada valor de ω existe uma forma modal associada). Substituindo (2.19) na forma homogênea (2.14) dá

$$\left[-\rho A \omega^2 U - \frac{d}{dx} \left(EA \frac{dU}{dx} \right) \right] e^{-i\omega t} = 0$$

ou

$$-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{dU}{dx} \right) - \omega^2 \rho A U = 0$$

o que é idêntico a (2.16) com $\alpha = \omega$.

Equações similares podem ser formuladas para as frequências naturais de vigas.

2.2. Equação Hiperbólica

Outro problema que está diretamente relacionado com as equações de equilíbrio de governo é a instabilidade de vigas-colunas.

Em resumo, os problemas de valores próprios associados a equações parabólicas são obtidos a partir das equações de movimento correspondentes assumindo uma solução na forma

$$u(x, t) = U(x)e^{-\alpha t}, \quad \lambda = \alpha \quad (2.20a)$$

Enquanto que os problemas associados a equações hiperbólicas são obtidos assumindo uma solução com a forma

$$u(x, t) = U(x)e^{-i\omega t}, \quad \lambda = \omega^2 \quad (2.20b)$$

onde λ representa o valor próprio.

2.3. Formulação em Elemento Finito

Comparando as equações (2.6) e (2.16) com a equação modelo

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) + cu - f = 0 \quad \text{para } 0 < x < L$$

observa-se que as equações que governam os problemas de valores próprios são casos especiais das equações modelo estudadas anteriormente.

Aqui vamos ver resumidamente os passos na formulação de problemas de valor próprio pelo método dos elementos finitos.

Podem ver-se dois casos:

1. Uma equação em uma incógnita (problemas de transferência de calor, de barras, de vigas de Euler-Bernoulli);
2. Um par de equações em duas variáveis (viga de Timoshenko).

2.3.1. Problemas Tipo Barra

Considere-se o problema de resolução da equação

$$-\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{dU}{dx}\right] + c(x)U(x) = \lambda c_0(x)U(x) \quad (2.21)$$

para λ e $U(x)$. Nesta equação a , c e c_0 são incógnitas que dependem do problema físico, λ é o valor próprio e U é o vetor próprio.

Casos especiais da equação (2.21) são, por exemplo:

1. Transferência de calor

$$a = kA, \quad c = P\beta, \quad c_0 = \rho cA \quad (2.22)$$

2. Barras

$$a = EA, \quad c = 0, \quad c_0 = \rho A \quad (2.23)$$

2.3.1. Problemas Tipo Barra

Num elemento Ω_e típico, procura-se uma aproximação por elemento finito de U na forma

$$U_h^e(x) = \sum_{j=1}^n u_j^e(x) \psi_j^e(x) \quad (2.24)$$

A forma fraca de (2.21) é

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{dU}{dx} + cwU - \lambda c_0 wU \right) dx - Q_1^2 w(x_a) - Q_n^2 w(x_b) \quad (2.25)$$

onde w é a função de ponderação e Q_1^e e Q_n^e são as variáveis secundárias nos nós 1 e n , respetivamente

$$Q_1^e = - \left[a \frac{dU}{dx} \right]_{x_a}, \quad Q_n^e = \left[a \frac{dU}{dx} \right]_{x_b} \quad (2.26)$$

2.3.1. Problemas Tipo Barra

Substituindo a aproximação de elemento finito (2.24) na forma fraca (2.25) resulta no modelo de elemento finito da equação de valores próprios (2.21):

$$[K^e]\{u^e\} - \lambda[M^e]\{u^e\} = \{Q^e\} \quad (2.27a)$$

onde

$$K_{ij}^e = \int_{x_a}^{x_b} \left[a(x) \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c(x) \psi_i^e \psi_j^e \right] dx$$

$$M_{ij}^e = \int_{x_a}^{x_b} c_0(x) \psi_i^e \psi_j^e dx \quad (2.27b)$$

A equação (2.27a) contém os modelos de elemento finito das equações de valores próprios (2.6) e (2.16) como casos especiais.

2.3.1. Problemas Tipo Barra

A montagem das equações do elemento e a imposição das condições de fronteira nas equações montadas permanece igual aos casos estáticos vistos anteriormente.

No entanto, a solução das equações condensadas para as variáveis nodais primárias que não são conhecidas fica reduzida a um problema algébrico de valores próprios onde o determinante da matriz de coeficientes é igualado a zero para determinar os valores de λ e consequentemente os valores da função própria $U(x)$.

2.3.2. Vibração Natural de Vigas

Para a teoria da viga de Euler-Bernoulli, a equação de movimento tem a forma

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q(x, t) \quad (2.36)$$

onde ρ representa a massa volúmica, A representa a área da secção transversal, E é o módulo de elasticidade e I é o segundo momento de área da secção. A expressão que envolve ρI é conhecida pelo termo da inércia rotativa (“rotary inertia”).

A equação (2.36) pode ser formulada como um problema de valores próprios para se obterem as frequências naturais de vibração, assumindo o movimento periódico

$$w(x, t) = W(x) e^{-i\omega t} \quad (2.37)$$

2.3.2. Vibração Natural de Vigas

onde ω é a frequência natural do movimento transversal e $W(x)$ é a forma do modo de movimento transversal. Substituindo a equação (2.37) em (2.36) dá

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - \lambda \left(\rho A W - \rho I \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = 0 \quad (2.38)$$

onde $\lambda = \omega^2$.

A forma fraca de (2.38) é dada por

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{x_a}^{x_b} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 W}{dx^2} - \lambda \rho A W - \lambda \rho I \frac{d^2 W}{dx^2} \right) dx \\ & + \left\{ v \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + \lambda \rho I \frac{d^2 W}{dx^2} \right] \right\}_{x_a}^{x_b} + \left[\left(-\frac{dv}{dx} \right) EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right]_{x_a}^{x_b} \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde v é a função de ponderação.

2.3.2. Vibração Natural de Vigas

Note-se que o termo da inércia rotativa contribui para o termo da força de corte, resultando numa força de corte efetiva que tem que ser conhecida num ponto de contorno quando a deflexão é desconhecida nesse ponto.

Para obter o modelo de elemento finito da equação (2.39), assume-se uma aproximação de elemento finito da forma

$$W(x) = \sum_{j=1}^4 \Delta_j^e \phi_j^e(x) \quad (2.40)$$

onde ϕ_j^e são os polinómios cúbicos de Hermite e obtém-se o modelo de elemento finito

$$([K^e] - \omega^2 [M^e]) \{\Delta^e\} = \{Q^e\} \quad (2.41a)$$

onde

2.3.2. Vibração Natural de Vigas

$$K_{ij}^e = \int_{x_a}^{x_b} EI \frac{d^2 \phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j^e}{dx^2} dx$$

$$M_{ij}^e = \int_{x_a}^{x_b} \left(\rho A \phi_i^e \phi_j^e + \rho I \frac{d\phi_i^e}{dx} \frac{d\phi_j^e}{dx} \right) dx \quad (2.41b)$$

$$\begin{aligned} Q_1^e &\equiv \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + \lambda \rho I \frac{d^2 W}{dx^2} \right] \Big|_{x_a}, & Q_2^e &\equiv \left(EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_{x_a} \\ Q_3^e &\equiv - \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + \lambda \rho I \frac{d^2 W}{dx^2} \right] \Big|_{x_b}, & Q_4^e &\equiv - \left(EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) \Big|_{x_b} \end{aligned} \quad (2.41c)$$

2.3.2. Vibração Natural de Vigas

Para valores constantes de EI e ρA , a matriz de rigidez $[K^e]$ e a matriz de massa $[M^e]$ são

$$[K^e] = \frac{2E_e I_e}{h_e^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & 2h_e^2 & 3h_e & h_e^2 \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$[M^e] = \frac{\rho^e A_e h_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22h_e & 54 & 13h_e \\ -22h_e & 4h_e^2 & -13h_e & -3h_e^2 \\ 54 & -13h_e & 156 & 22h_e \\ 13h_e & -3h_e^2 & 22h_e & 4h_e^2 \end{bmatrix} + \frac{\rho^e I_e}{30h_e} \begin{bmatrix} 36 & -3h_e & -36 & -3h_e \\ -3h_e & 4h_e^2 & 3h_e & -h_e^2 \\ -36 & 3h_e & 36 & 3h_e \\ -3h_e & -h_e^2 & 3h_e & 4h_e^2 \end{bmatrix}$$

Quando a inércia rotativa é desprezada, omite-se a segunda parte da matriz de massa.

2.3.2. Vibração Natural de Vigas

Na vibração natural, quando a simetria do sistema é usada para modelar o problema, são previstos apenas modos simétricos. É necessário modelar o sistema completo para se poder obter todos os modos de vibração.

2.3.2. Vibração Natural de Vigas

Exemplo 7.01: Considere uma viga de secção transversal retangular $B \times H$, fixa em $x=0$ e livre em $x=L$. É necessário determinar as quatro primeiras frequências de flexão da viga. As condições de fronteira da estrutura são

$$w(0)=0 \quad , \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad , \quad \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=L} = 0 \quad , \quad \left(EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=L} = 0$$

para a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

Os dois primeiros termos são as condições de fronteira essenciais (geométricas) e os dois últimos são as condições de fronteira naturais (forças).