



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Covilhã | Portugal

Formulação de Problemas 2D (e 3D)

Mecânica Estrutural (10391/1411)

2021

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais

1. Introdução

A análise por elementos finitos de problemas bidimensionais envolve os mesmos passos básicos dos problemas unidimensionais.

A análise é um pouco mais complicada pelo facto de os problemas bidimensionais serem descritos por equações diferenciais parciais sobre regiões geometricamente complexas.

A fronteira Γ de um domínio bidimensional Ω é, em geral, uma curva. Logo, os elementos finitos são formas geométricas bidimensionais simples que permitem aproximar um dado domínio bidimensional bem como a solução sobre esse domínio.

Assim, num problema bidimensional não procuramos apenas a solução aproximada de um dado problema mas também aproximamos o domínio através de uma malha apropriada.

1. Introdução

Consequentemente existirão erros de aproximação:

- devido à aproximação da solução;
- devido à discretização do domínio.

A malha de elementos finitos (discretização) consiste em simples elementos bidimensionais, como triângulos, retângulos e/ou quadriláteros que permitem a derivação única de funções de interpolação.

Os elementos são ligados entre si nos pontos nodais nas fronteiras dos elementos. A capacidade de representar geometrias irregulares por uma coleção de elementos finitos torna o método muito útil e prático para a solução de problemas de valor de contorno, de valor inicial ou de valores próprios em várias áreas da engenharia.

1. Introdução

Neste capítulo, os passos básicos dos problemas unidimensionais vão ser estendidos a problemas bidimensionais com uma única variável dependente.

Os passos básicos da análise de elementos finitos vão ser descritos recorrendo a uma equação diferencial parcial de segunda ordem que governa uma única variável.

Esta equação aparece em muitas áreas como mostra a tabela seguinte.



1. Introdução

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) = f \text{ in } \Omega$$

Natural boundary condition: $k \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u - u_\infty) = q \text{ on } \Gamma_q$

Essential boundary condition: $u = \hat{u} \text{ on } \Gamma_u$

Field of application	Primary variable u	Material constant k	Source variable f	Secondary variables $q, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$
Heat transfer	Temperature T	Conductivity k	Heat source g	Heat flow due to conduction $k \frac{\partial T}{\partial n}$ convection $h(T - T_\infty)$
Irrotational flow of an ideal fluid	Stream function ψ	Density ρ	Mass production σ	Velocities $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$ $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$
	Velocity potential ϕ	Density ρ	Mass production σ	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u$ $\frac{\partial \phi}{\partial y} = v$
Groundwater flow	Piezometric head ϕ	Permeability K	Recharge f (pumping, $-f$)	Seepage $q = k \frac{\partial \phi}{\partial n}$ Velocities $u = -k \frac{\partial \phi}{\partial x}$ $v = -k \frac{\partial \phi}{\partial y}$
Torsion of cylindrical members	Stress function Ψ	$k = 1$ $G = \text{shear modulus}$	$f = 2$ $\theta = \text{angle of twist per unit length}$	$G\theta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\sigma_{yz}$ $G\theta \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sigma_{xz}$
Electrostatics	Scalar potential ϕ	Dielectric constant ϵ	Charge density ρ	Displacement flux density D_n
Magnetostatics	Magnetic potential ϕ	Permeability μ	Charge density ρ	Magnetic flux density B_n
Membranes	Transverse deflection u	Tension in membrane T	Transversely distributed load	Normal force q



UBI
Covilhã
Portugal

2. Problemas de Valor de Contorno

Formulação de Problemas 2D (e 3D)

2.1. Equação do Modelo

Considere-se o problema de encontrar $u(x,y)$ da equação diferencial parcial de segunda ordem

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00}u - f = 0 \quad (2.1)$$

dados a_{ij} ($i,j=1,2$), a_{00} e f , e condições de fronteira especificadas.

As formas das condições de fronteira vão ficar claras através da formulação fraca. Como caso especial, pode obter-se a equação de Poisson a partir de (2.1) colocando $a_{11}=a_{22}=k(x,y)$ e $a_{12}=a_{21}=a_{00}=0$:

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) = f(x, y) \quad \text{em } \Omega \quad (2.2)$$

onde ∇ é o operador gradiente.

2.1. Equação do Modelo

Se i e j representarem os vetores unitários nas direções x e y , respetivamente, o operador gradiente pode ser escrito

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}$$

e (2.2) num sistema de coordenadas cartesiano fica

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (2.3)$$

Seguidamente deriva-se o modelo de elementos finitos da equação (2.1).

2.1. Equação do Modelo

Os passos principais são:

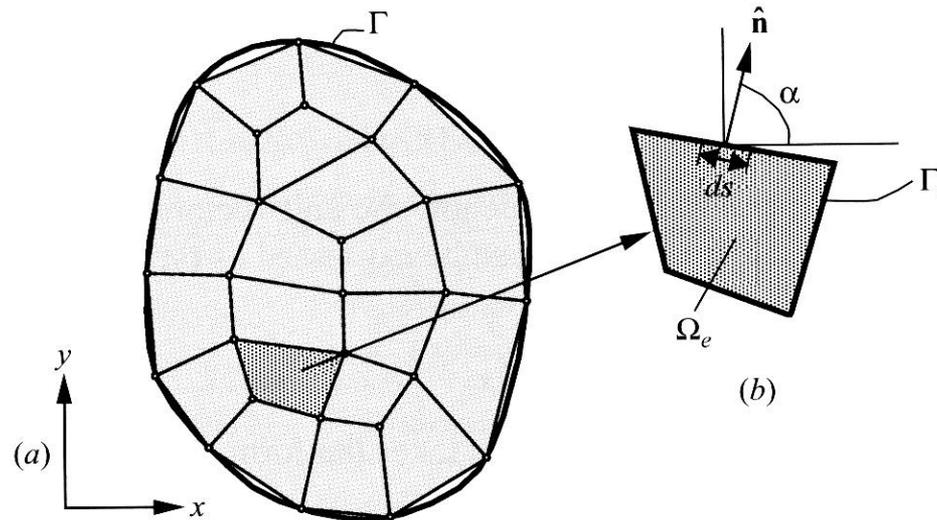
1. Discretização do domínio num conjunto de elementos finitos;
2. Formulação fraca (ou integral ponderado) da equação diferencial;
3. Derivação das funções de interpolação do elemento finito;
4. Desenvolvimento do modelo de elemento finito usando a forma fraca;
5. Montagem dos elementos finitos para obter o sistema de equações algébricas global;
6. Imposição das condições de fronteira;
7. Solução das equações;
8. Pós computação da solução e parâmetros de interesse.

2.1. Equação do Modelo

Os passos 6 e 7 permanecem iguais ao problema de elementos finitos unidimensionais porque no final do passo 5 tem-se um conjunto de equações algébricas cuja forma é independente da dimensão do domínio ou da natureza do problema.

2.2. Discretização em Elemento Finito

Em duas dimensões existe mais do que uma geometria que pode ser usada como elemento finito:



2.2. Discretização em Elemento Finito

Como se irá ver, as funções de interpolação dependem não só do número de nós do elemento e do número de incógnitas por nó, mas também da forma do elemento.

A forma do elemento tem que ser tal que a sua geometria seja definida por um conjunto de pontos, que são os nós do elemento, no desenvolvimento das funções de interpolação. O triângulo é a forma mais simples, seguida do retângulo.

A representação de uma dada região por um conjunto de elementos (discretização ou geração da malha) é um passo importante na análise de elementos finitos. A escolha do tipo de elemento finito, número de elementos, e densidade de elementos depende da geometria do domínio, do problema a ser analisado e o grau de precisão desejado.

2.2. Discretização em Elemento Finito

Obviamente, não existem fórmulas específicas para obter esta informação. Em geral, o analista é guiado pelo seu conhecimento técnico, compreensão do problema físico em estudo, e experiência na modelação por elementos finitos.

2.2. Discretização em Elemento Finito

As regras gerais para a geração da malha de uma formulação de elementos finitos inclui:

1. Os elementos selecionados devem caracterizar as equações que governam o problema;
2. O número, forma e tipo (linear ou quadrático) dos elementos deve ser tal que a geometria do domínio seja representada com a precisão desejada;
3. A densidade de elementos deve ser tal que as regiões com gradientes elevados da solução sejam modelados adequadamente (mais elementos ou elementos de ordem superior em regiões com gradientes elevados);
4. Os refinamentos da malha devem variar gradualmente das regiões com mais densidade para as regiões com menos densidade. Se forem usados elementos de transição, estes devem ser usados longe de regiões críticas. Elementos de transição são aqueles que ligam elementos de ordem inferior com elementos de ordem superior.

2.3. Forma Fraca

Para o desenvolvimento da forma fraca basta considerar um elemento típico.

Assumindo que Ω_e é um elemento típico, triangular ou quadrilateral, da malha de elementos finitos, pode desenvolver-se o modelo de elemento finito de (2.1) para Ω_e , seguindo o procedimento de três-passos já apresentado.

O primeiro passo consiste em multiplicar (2.1) pela função de ponderação w , que se assume ser diferenciável uma vez com respeito a x e y , e depois integra-se a equação sobre o elemento Ω_e :

$$0 = \int_{\Omega_e} w \left[-\frac{\partial}{\partial x}(F_1) - \frac{\partial}{\partial y}(F_2) + a_{00}u - f \right] dx dy \quad (2.4a)$$

2.3. Forma Fraca

onde

$$F_1 = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.4b)$$

$$F_2 = a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}$$

No segundo passo distribui-se as derivadas igualmente por w e u . Para conseguir isto integram-se os dois primeiros termos de (2.4a) por partes. Primeiro, atendendo às igualdades

$$\frac{\partial}{\partial x} (wF_1) = \frac{\partial w}{\partial x} F_1 + w \frac{\partial F_1}{\partial x} \quad \text{ou} \quad -w \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} (wF_1) \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (wF_2) = \frac{\partial w}{\partial y} F_2 + w \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad \text{ou} \quad -w \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} (wF_2) \quad (2.5b)$$

2.3. Forma Fraca

Depois, usando a forma dos componentes do teorema do gradiente

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} (wF_1) dx dy = \oint_{\Gamma_e} wF_1 n_x ds \quad (2.6a)$$

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial y} (wF_2) dx dy = \oint_{\Gamma_e} wF_2 n_y ds \quad (2.6b)$$

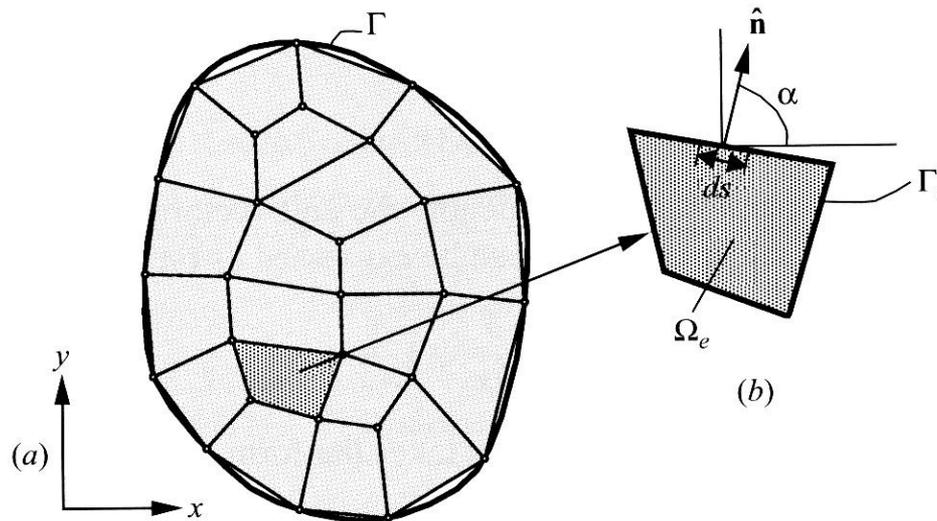
onde n_x e n_y são as componentes (isto é, os cosenos diretores) do vetor normal unitário

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j} \quad (2.7)$$

na fronteira Γ_e e ds é o comprimento de um elemento linha infinitesimal ao longo da fronteira.



2.3. Forma Fraca





2.3. Forma Fraca

Usando (2.5a), (2.5b), (2.6a) e (2.6b) em (2.4a) obtém-se

$$0 = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} w u - w f \right] dx dy \quad (2.8)$$
$$- \oint_{\Gamma_e} w \left[n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] ds$$

Inspecionando o integral de fronteira em (2.8), pode ver-se que a especificação de u constitui a condição de fronteira essencial e, por isso, u é a variável principal.

A especificação do coeficiente da função de ponderação na expressão da fronteira

$$q_n \equiv n_x \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

2.3. Forma Fraca

constitui a condição de fronteira natural. Assim, q_n é a variável secundária da formulação. A função $q_n = q_n(s)$ representa a projeção do vetor $a \cdot \nabla u$ ao longo da normal unitária n .

Por definição, q_n é positiva para fora da superfície quando nos movemos no sentido anti-horário ao longo da fronteira Γ_e . Na maior parte dos problemas, a variável secundária q_n tem interesse físico.

O terceiro e último passo da formulação é usar a definição (2.9) em (2.8) e escrever a forma fraca de (2.1) como

$$0 = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} w u - w f \right] dx dy - \int_{\Gamma_e} w q_n ds \quad (2.10)$$



2.3. Forma Fraca

ou

$$B^e(u, w) = l^e(w) \quad (2.11a)$$

onde as formas bilinear $B^e(.,.)$ e linear $l^e(.)$ são

$$B^e(u, w) = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} w u \right] dx dy \quad (2.11b)$$
$$l^e(w) = \int_{\Omega_e} w f dx dy + \oint_{\Gamma_e} w q_n ds$$

A forma fraca (ou forma integral ponderada) em (2.10) ou (2.11a) e (2.11b) é a base do modelo de elementos finito de (2.1).



2.3. Forma Fraca

Sempre que $B^e(w, u)$ é simétrico nos seus argumentos w e u , isto é, $B^e(w, u) = B^e(u, w)$, o funcional quadrático associado com o problema variacional (2.11a) pode ser obtido com

$$I^e(w) = B^e(w, w) - l^e(w) \quad (2.12a)$$

A forma bilinear em (2.11b) é simétrica se e só se $a_{12} = a_{21}$. Então o funcional é dado por

$$I^e(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \left[a_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + a_{00} u^2 \right] dx dy \quad (2.12b)$$
$$+ \int_{\Omega_e} u f dx dy + \oint_{\Gamma_e} u q_n ds$$

2.3.1. Forma Vetorial do Problema Variacional

É comum, especialmente na mecânica estrutural, exprimir as formulações de elementos finitos na forma vetorial (em termos de matrizes).

Embora a notação vetorial/matricial seja concisa, não é tão transparente como a forma explícita.

A equação (2.11a) pode ser escrita na forma

$$B^e(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = l^e(\mathbf{w}) \quad (2.13)$$

onde, no presente caso, \mathbf{w} é simplesmente w e \mathbf{u} é u .

Agora é necessário exprimir $B^e(.,.)$ e $l^e(.)$ em forma matricial.



2.3.1. Forma Vetorial do Problema Variacional

Colocando

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{00} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad 1 \right\}^T \quad (2.14)$$

então B^e e l^e de (2.11b) podem escreve-se na forma

$$B^e(w, u) = \int_{\Omega_e} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{array} \right\}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{00} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \end{array} \right\} dx dy \quad (2.15a)$$

$$l^e(w) = \int_{\Omega_e} \{w\}^T \{f\} dx dy + \oint_{\Gamma_e} \{w\}^T \{q_n\} ds$$



2.3.1. Forma Vetorial do Problema Variacional

ou simplesmente

$$\begin{aligned} B^e(\mathbf{w}, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{D}\mathbf{w})^T \mathbf{C} \mathbf{D}\mathbf{u} dx dy \\ l^e(\mathbf{w}) &= \int_{\Omega_e} \mathbf{w}^T \mathbf{f} dx dy + \oint_{\Gamma_e} \mathbf{w}^T \mathbf{q} ds \end{aligned} \quad (2.15b)$$

2.4. Modelo de Elemento Finito

A forma fraca em (2.10) requer que a aproximação escolhida para u seja no mínimo linear tanto em x como em y para que nenhum termo em (2.10) seja zero. Uma vez que a variável primária é a própria função, a família de funções de integração de Lagrange é admissível.

Suponha-se que u é aproximado num elemento finito típico Ω_e pela expressão

$$u(x, y) \approx u_h^e(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x, y) \quad \text{ou} \quad u_h^e(x, y) = (\Psi^e)^T \mathbf{u}^e \quad (2.16a)$$

onde \mathbf{u}^e e Ψ^e são vetores $n \times 1$

$$\mathbf{u}^e = \{u_1^e \ u_2^e \ u_3^e \ \dots \ u_n^e\}^T, \quad \Psi^e = \{\psi_1^e \ \psi_2^e \ \psi_3^e \ \dots \ \psi_n^e\}^T \quad (2.16b)$$

e u_j^e é o valor de u_h^e no nó j (x_j, y_j) do elemento;

2.4. Modelo de Elemento Finito

e ψ_j^e são as funções de interpolação de Lagrange com a seguinte propriedade

$$\psi_i^e(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.17)$$

Quando se derivam as equações do elemento finito em termos algébricos, não é necessário saber a forma do elemento Ω_e ou a forma de ψ_i^e . A forma específica de ψ_i^e é desenvolvida para formas particulares dos elementos tal como triangular, retangular, etc..

Substituindo a aproximação de elemento finito (2.16a) para u na forma fraca (2.10) ou (2.13) obtém-se



2.4. Modelo de Elemento Finito

$$0 = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(a_{11} \sum_{j=1}^n u_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + a_{12} \sum_{j=1}^n u_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(a_{21} \sum_{j=1}^n u_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + a_{22} \sum_{j=1}^n u_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) + a_{00} w \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e - wf \right] dxdy - \oint_{\Gamma_e} w q_n ds \quad (2.18a)$$

ou

$$0 = \int_{\Omega_e} (\mathbf{D}\mathbf{w})^T \mathbf{C}\mathbf{D}(\Psi^T \mathbf{u}^e) dxdy - \int_{\Omega_e} \mathbf{w}^T \mathbf{f} dxdy + \oint_{\Gamma_e} \mathbf{w}^T \mathbf{q} ds \quad (2.18b)$$

Esta equação deve ser válida para todas as escolhas admissíveis da função de ponderação w .

Uma vez que são necessárias n equações algébricas independentes para resolver as n incógnitas $u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e$ escolhem-se n funções independentes lineares para w .

2.4. Modelo de Elemento Finito

$w = \psi_1^e, \psi_2^e, \dots, \psi_n^e$ (ou $w = \{\psi_1^e \ \psi_2^e \ \dots \ \psi_n^e\} = \Psi^T$). Esta escolha particular para a função de ponderação é natural quando a função de ponderação é vista como uma variação virtual da incógnita dependente, isto é

$$w = \delta u \approx \sum_{i=1}^n \delta u_i \psi_i$$

e o modelo de elemento finito resultante é conhecido como *modelo de elemento finito de forma fraca* ou *modelo de elemento finito de Ritz*.

Para cada escolha de w obtém-se uma relação algébrica entre $(u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e)$.

2.4. Modelo de Elemento Finito

A equação algébrica resultante da substituição de ψ_i^e para w dentro de (2.18a) é numerada como a primeira equação algébrica, aquela resultante de $w = \psi_2^e$ é numerada como a segunda equação, e assim consecutivamente.

Assim, a equação algébrica i é obtida substituindo $w = \psi_i^e$ em (2.18a):

$$0 = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) + a_{00} \psi_i^e \psi_j^e \right] dx dy \right\} u_j - \int_{\Omega_e} f \psi_i^e dx dy - \oint_{\Gamma_e} q_n \psi_i^e ds$$

ou

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e = f_j^e + Q_j^e \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.19a)$$

2.4. Modelo de Elemento Finito

onde

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \right) \right. \\
 &\quad \left. + a_{00} \psi_i^e \psi_j^e \right] dx dy \\
 f_i^e &= \int_{\Omega_e} f \psi_i^e dx dy \\
 Q_i^e &= \oint_{\Gamma_e} q_n \psi_i^e ds
 \end{aligned} \tag{2.19b}$$

Na forma matricial (2.19a) toma a forma

$$\mathbf{[K}^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad \text{ou} \quad \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e + \mathbf{Q}^e \tag{2.20a}$$

2.4. Modelo de Elemento Finito

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx dy \\
 \mathbf{f}^e &= \int_{\Omega_e} \Psi \mathbf{f} dx dy \\
 \mathbf{Q}^e &= \oint_{\Gamma_e} \Psi \mathbf{q} ds
 \end{aligned} \tag{2.20b}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} \Psi^T = \begin{bmatrix} \psi_{1,x}^e & \psi_{2,x}^e & \cdots & \psi_{n,x}^e \\ \psi_{1,y}^e & \psi_{2,y}^e & \cdots & \psi_{n,y}^e \\ \psi_1^e & \psi_2^e & \cdots & \psi_n^e \end{bmatrix}$$

Note-se que $K_{ij}=K_{ji}$, isto é, $[\mathbf{K}^e]$ é uma matriz simétrica de ordem $n \times n$, apenas quando $a_{12}=a_{21}$.

2.4. Modelo de Elemento Finito

As equações (2.20a) e (2.20b) representam o modelo do elemento finito de (2.1).

Isto completa o desenvolvimento do modelo do elemento finito.

Antes de descrever a montagem das equações do elemento é conveniente derivar as funções de interpolação ψ_i^e para certos elementos básicos e calcular as matrizes (2.19b) do elemento.

2.5. Derivação da Função de Interpolação

A aproximação de elemento finito $u_h^e(x,y)$ no elemento Ω_e tem que satisfazer as condições seguintes para que a solução aproximada convirja para a solução verdadeira:

1. A representação de u_h^e tem que ser contínua como necessário na forma fraca do problema (isto é, todos os termos na forma fraca são representados como valores diferentes de zero):
2. Os polinómios usados para representar u_h^e têm que ser completos (isto é, todos os termos desde a constante até aos termos da ordem superior têm que estar presentes em u_h^e);
3. Todos os termos do polinómio devem ser linearmente independentes.



2.5. Derivação da Função de Interpolação

O número de termos linearmente independentes na representação de u_h^e dita a forma e número de graus de liberdade do elemento.

Em seguida serão vistos alguns polinómios básicos e elementos relacionados para o problema do modelo com um único grau de liberdade por nó.

2.5.1. Elemento Triangular

Examinando a forma fraca (2.10) e as matrizes do elemento finito (2.19b) pode ver-se que os ψ_i^e têm que ser pelo menos funções lineares de x e y .

O polinómio linear completo em x e y de Ω_e tem a forma

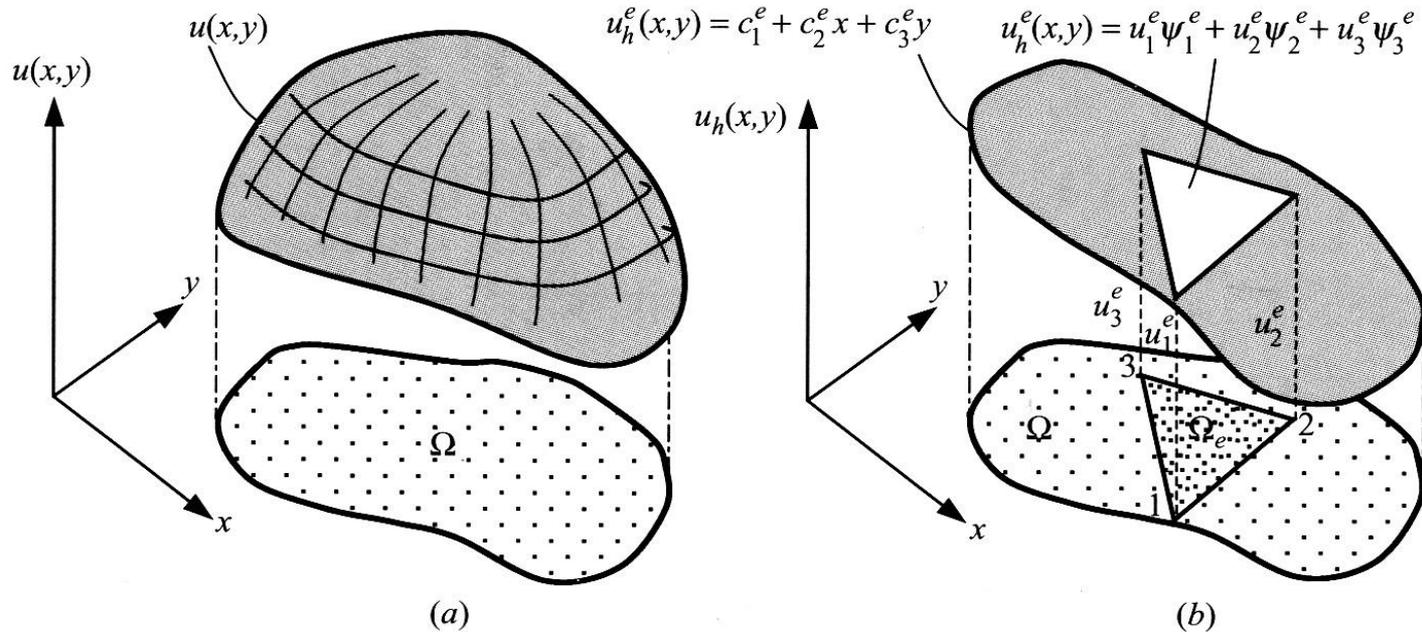
$$u_h^e(x, y) = c_1^e + c_2^e x + c_3^e y \quad (2.21)$$

onde c_i^e são constantes.

O conjunto $\{1, x, y\}$ é linearmente independente e completo. A equação (2.21) define um plano único para valores fixos de c_i^e . Assim, se $u(x, y)$ é uma superfície curva, $u_h^e(x, y)$ aproxima a superfície por um plano.

2.5.1. Elemento Triangular

Em particular, $u_h^e(x,y)$ é definido de forma única num triângulo pelos três valores de $u_h^e(x,y)$ nos vértices do triângulo.



2.5.1. Elemento Triangular

Vamos escrever

$$u_h^e(x_1, y_1) = u_1^e, \quad u_h^e(x_2, y_2) = u_2^e, \quad u_h^e(x_3, y_3) = u_3^e \quad (2.22)$$

onde (x_i, y_i) representa as coordenadas do vértice i do triângulo. Notar que o triângulo é único quando definido pelos três pares de coordenadas (x_i, y_i) .

As três constantes c_i^e ($i=1,2,3$) em (2.21) podem ser expressas em termos dos três valores nodais u_i^e ($i=1,2,3$). Assim, o polinómio (2.21) é associado com um elemento triangular e existem três nós identificados, nomeadamente os vértices do triângulo.

2.5.1. Elemento Triangular

As equações em (2.22) têm a forma explícita

$$u_1 \equiv u_h(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1$$

$$u_2 \equiv u_h(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2$$

$$u_3 \equiv u_h(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3$$

onde o índice do elemento e é omitido por simplicidade. Esta forma vai ser usada em seguida.

Em forma matricial tem-se

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{c} \quad (2.23)$$

A solução de (2.23) para c_i ($i=1,2,3$) precisa da inversa da matriz de coeficientes \mathbf{A} .

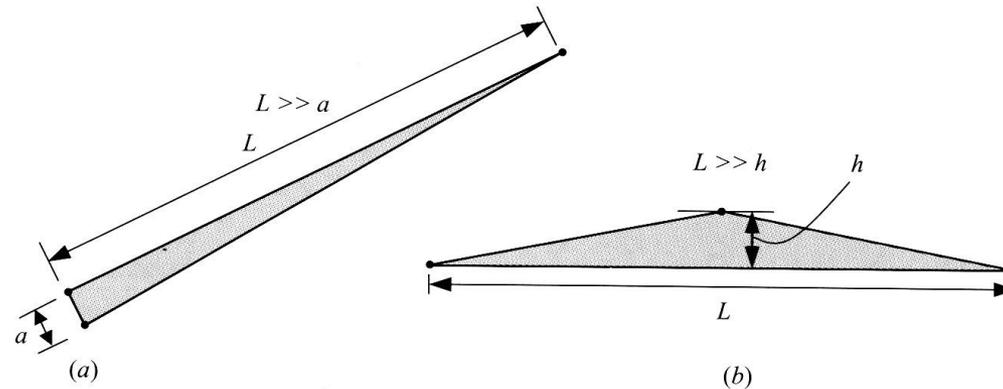
2.5.1. Elemento Triangular

A inversa deixa de existir sempre que quaisquer duas linhas ou colunas são iguais. Só quando todos os nós estão na mesma linha é que se tem duas colunas ou duas linhas iguais na matriz de coeficientes em (2.23).

Assim, em teoria, desde que os três vértices do triângulo sejam distintos e não estejam na mesma linha, a matriz de coeficientes pode ser invertida. No entanto, em computações reais, se dois nós estão muito perto do terceiro nó ou os três nós formam quase uma linha reta, a matriz de coeficientes pode ser quase singular numericamente e não ter inversa.

2.5.1. Elemento Triangular

Assim, os elementos com geometrias estreitas devem ser evitados.



Invertendo a matriz de coeficientes em (2.23) obtém-se

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad 2A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

onde $2A$ é o determinante da matriz A .

2.5.1. Elemento Triangular

A é a área do triângulo cujos vértices estão em (x_i, y_i) ($i=1,2,3$).
Resolvendo para c_i em termos de u_i obtém-se

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2A} (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) \\ c_2 &= \frac{1}{2A} (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3) \\ c_3 &= \frac{1}{2A} (\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3) \end{aligned} \quad (2.24a)$$

onde α_i , β_i e γ_i são constantes que dependem apenas das coordenadas globais dos nós (x_i, y_i) do elemento

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= -(x_j - x_k) \end{aligned} \right\} (i \neq j \neq k; i, j, k \text{ permutam em ordem natural}) \quad (2.24b)$$

2.5.1. Elemento Triangular

Substituindo para c_j de (2.24a) em (2.21) obtém-se

$$\begin{aligned} u_h^e(x, y) &= \frac{1}{2A} [(u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3) + (u_1\beta_1 + u_2\beta_2 + u_3\beta_3)x \\ &\quad + (u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + u_3\gamma_3)y] \\ &= \sum_{i=1}^3 u_i^e \psi_i^e(x, y) \end{aligned} \quad (2.25a)$$

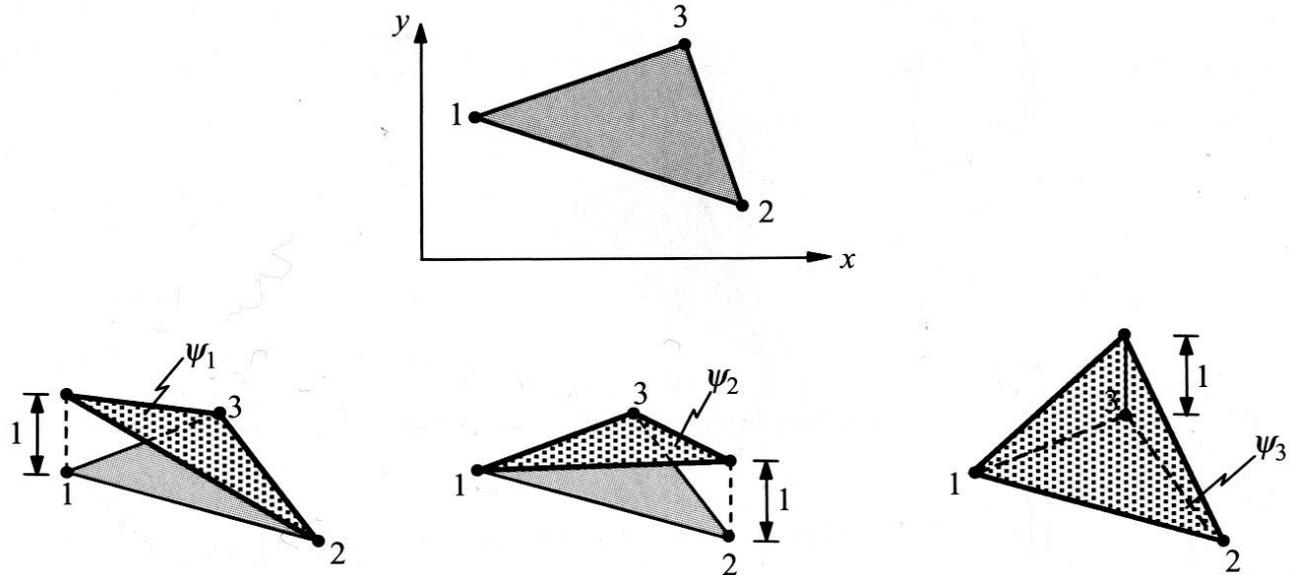
onde ψ_i^e são as funções de interpolação linear do elemento

$$\psi_i^e = \frac{1}{2A} (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y) \quad (i=1,2,3) \quad (2.25b)$$

e α_i^e , β_i^e e γ_i^e são as constantes definidas em (2.24b).

2.5.1. Elemento Triangular

As funções de interpolação linear ψ_i^e estão representadas na figura.



2.5.1. Elemento Triangular

As funções de interpolação ψ_i^e têm as seguintes propriedades

$$\psi_i^e(x_j^e, y_j^e) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.26a)$$

$$\sum_{i=1}^3 \psi_i^e = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} = 0 \quad (2.26b)$$

Pode notar-se que (2.24a) determina uma superfície plana que passa por u_1 , u_2 e u_3 .

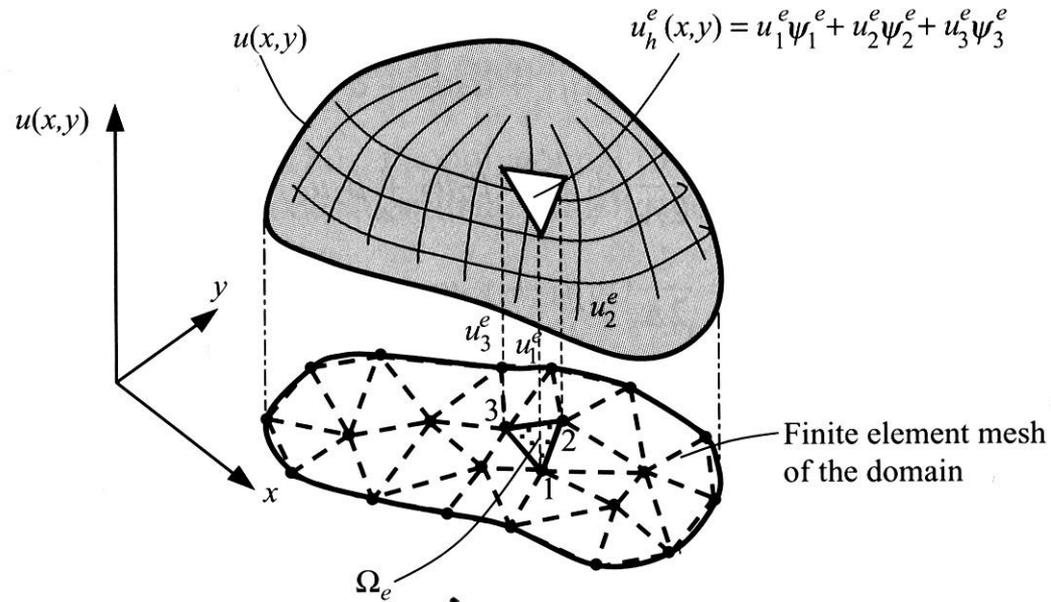
Assim, o uso de funções de interpolação lineares ψ_i^e de um triângulo resulta na aproximação da superfície curva $u(x, y)$ por uma função planar

$$u_h^e = \sum_{i=1}^3 u_i^e \psi_i^e$$

como mostra a figura seguinte.



2.5.1. Elemento Triangular





2.6. Avaliação das Matrizes e Vetores do Elemento

O cálculo exato das matrizes $[K^e]$ e $\{f^e\}$ do elemento em (2.19b) não é em geral fácil. As matrizes são avaliadas usando técnicas de integração numérica.

No entanto, quando a_{ij} , a_{00} e f são constantes ao longo do elemento, é possível avaliar os integrais exatamente ao longo dos elementos triangulares ou retangulares lineares.

O integral de fronteira em $\{Q^e\}$ em (2.19b) pode ser avaliado sempre que q_n é conhecido. Para um elemento interior, a contribuição do integral de fronteira cancela com contribuições similares de elementos adjacentes da malha (semelhante ao Q_i^e nos problemas unidimensionais).



2.6. Avaliação das Matrizes e Vetores do Elemento

Para simplificar a escrita, podemos escrever $[K^e]$ em (2.19b) como a soma de cinco matrizes básicas $[S^{\alpha\beta}]$ ($\alpha, \beta=0, 1, 2$)

$$[K^e] = a_{00}[S^{00}] + a_{11}[S^{11}] + a_{12}[S^{12}] + a_{21}[S^{12}]^T + a_{22}[S^{22}] \quad (2.38)$$

onde $[.]^T$ representa a transposta da matriz e

$$S_{ij}^{\alpha\beta} = \int_{\Omega_e} \psi_{i,\alpha} \psi_{j,\beta} dx dy \quad (2.39)$$

com $\psi_{i,\alpha} \equiv \partial \psi_i / \partial x_\alpha$, $x_1 = x$ e $x_2 = y$; $\psi_{i,0} = \psi_i$.

Todas as matrizes em (2.38) e funções de interpolação em (2.39) são definidas sobre o elemento.

Agora é necessário calcular as matrizes em (2.39) e (2.19b) usando as funções de interpolação linear.

2.6.1. Matrizes de um Elemento Triangular Linear

Primeiro, note-se que os integrais de polinómios sobre domínios de triângulos arbitrários podem ser calculados com exatidão.

Para isso, assuma-se que I_{mn} é o integral da expressão $x^m y^n$ sobre um triângulo arbitrário Δ

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \quad (2.40)$$

Então, sendo (x_i, y_i) as coordenadas dos vértices do triângulo, pode ser mostrado que



2.6.1. Matrizes de um Elemento Triangular Linear

$$\begin{aligned} I_{00} &= \int_{\Delta} x^0 y^0 dx dy = \int_{\Delta} 1 \cdot dx dy = A \quad \text{área do triângulo} \\ I_{10} &= \int_{\Delta} x^1 y^0 dx dy = \int_{\Delta} x dx dy = A \hat{x}, \quad \hat{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i \\ I_{01} &= \int_{\Delta} x^0 y^1 dx dy = \int_{\Delta} y dx dy = A \hat{y}, \quad \hat{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i \\ I_{11} &= \int_{\Delta} xy dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9 \hat{x} \hat{y} \right) \\ I_{20} &= \int_{\Delta} x^2 dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9 \hat{x}^2 \right) \\ I_{02} &= \int_{\Delta} y^2 dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9 \hat{y}^2 \right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Podemos usar estes resultados para avaliar os integrais definidos sobre elementos triangulares.



2.6.1. Matrizes de um Elemento Triangular Linear

Em seguida, calcula-se $[K^e]$ e $\{f^e\}$ para um elemento triangular linear assumindo que a_{ij} e f são constantes ao longo do elemento. Tendo em conta, também, que

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^e = 2A_e, \quad \sum_{i=1}^3 \beta_i^e = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i^e = 0 \quad (2.42a)$$

$$\alpha_i^e + \beta_i^e \hat{x}_e + \gamma_i^e \hat{y}_e = \frac{2}{3} A_e \quad (2.42b)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{\beta_i^e}{2A_e}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i^e}{2A_e} \quad (2.43)$$

obtém-se



2.6.1. Matrizes de um Elemento Triangular Linear

$$\begin{aligned}
 S_{ij}^{11} &= \frac{1}{4A} \beta_i \beta_j, & S_{ij}^{12} &= \frac{1}{4A} \beta_i \gamma_j, & S_{ij}^{22} &= \frac{1}{4A} \gamma_i \gamma_j \\
 S_{ij}^{00} &= \frac{1}{4A} \left\{ [\alpha_i \alpha_j + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \hat{x} + (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \hat{y}] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{A} [I_{20} \beta_i \beta_j + I_{11} (\gamma_i \beta_j + \gamma_j \beta_i) + I_{02} \gamma_i \gamma_j] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Tendo em conta a identidade (2.42b) e para um valor constante de $f=f_e$ ao longo do elemento, tem-se

$$\begin{aligned}
 f_i^e &= \int_{\Delta_e} f_e \psi_i^e(x, y) dx dy = \frac{f_e}{2A_e} \int_{\Delta_e} (\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y) dx dy \\
 &= \frac{f_e}{2A_e} (\alpha_i^e I_{00} + \beta_i^e I_{10} + \gamma_i^e I_{01}) = \frac{f_e}{2A_e} (\alpha_i^e A_e + \beta_i^e A_e \hat{x}_e + \gamma_i^e A_e \hat{y}_e) \\
 &= \frac{1}{2} f_e (\alpha_i^e + \beta_i^e \hat{x}_e + \gamma_i^e \hat{y}_e) = \frac{1}{3} f_e A_e
 \end{aligned} \tag{2.45}$$



2.6.1. Matrizes de um Elemento Triangular Linear

O resultado em (2.45) devia ser óbvio porque para uma fonte constante f_e a magnitude total da fonte (por exemplo calor) no elemento é igual a $f_e A_e$, que é distribuído igualmente por todos os nós, resultando num valor nodal de $f_e A_e / 3$.

Uma vez conhecidas as coordenadas dos nós dos elementos, pode calcular-se α_i^e , β_i^e e γ_i^e a partir de (2.24b) e substituir na equação (2.44) para se obter as matrizes do elemento que, por sua vez, são usadas em (2.38) para se obter a matriz $[K^e]$.

Em particular, quando a_{12} , a_{21} e a_{00} são zero e a_{11} e a_{22} são constantes no elemento, a equação (2.1) fica

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - f = 0 \quad \text{em } \Omega_e \quad (2.46)$$

2.6.1. Matrizes de um Elemento Triangular Linear

e a matriz de coeficientes associados para um elemento triangular linear é

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4A_e} (a_{11}^e \beta_i^e \beta_j^e + a_{22}^e \gamma_i^e \gamma_j^e) \quad (2.47)$$



2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira

Vamos considerar a avaliação do integral de fronteira do tipo (ver equação (2.19b))

$$Q_i^e = \oint_{\Gamma_e} q_n^e \psi_i^e(s) ds \quad (2.56)$$

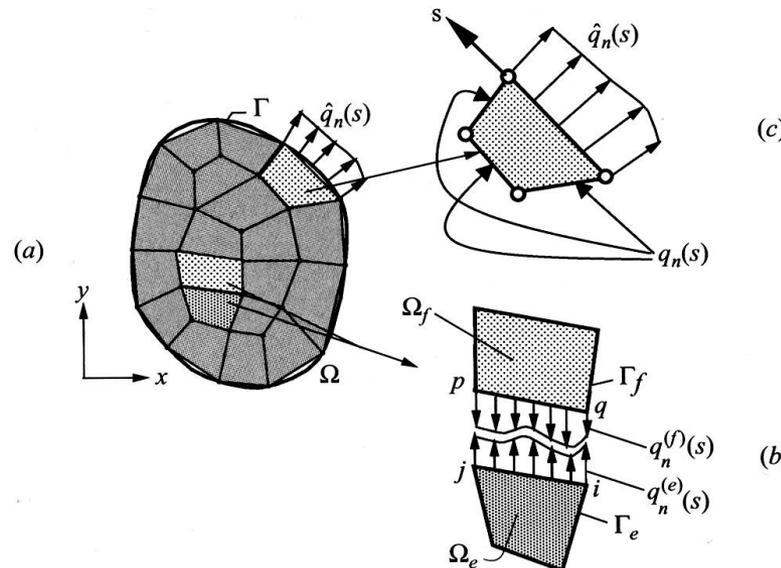
onde q_n^e é uma função conhecida da distância s ao longo da fronteira Γ_e .

Não é necessário calcular este integral quando uma porção de Γ_e não coincide com a fronteira Γ do domínio total Ω . Em porções de Γ_e que estão no interior do domínio Ω , q_n^e no lado (i,j) do elemento Ω_e cancela com q_n^f no lado (p,q) do elemento Ω_f quando os lados (i,j) do elemento Ω_e e (p,q) do elemento Ω_f são o mesmo (isto é no interface dos elementos Ω_e e Ω_f).

2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira

Isto pode ser visto como o equilíbrio do “fluxo” interno.

Quando Γ_e coincide com a fronteira do domínio Ω , q_n ou é conhecido como função de s ou deve ser determinado no pós-processamento. A variável primária deve ser especificada na porção da fronteira onde q_n não é especificado.

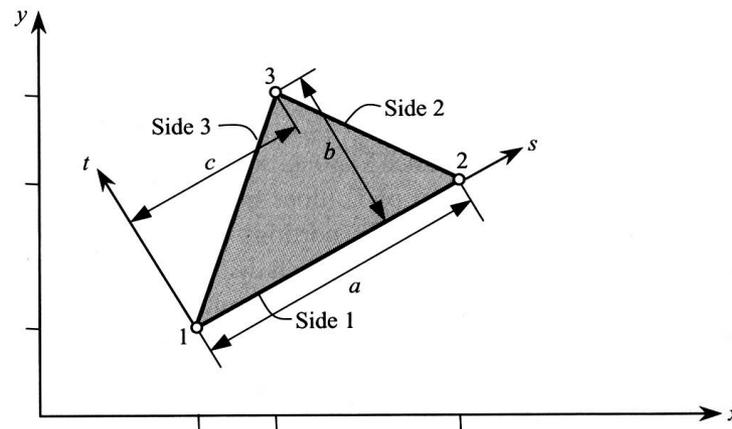




2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira

A fronteira Γ_e de um elemento bi-dimensional consiste em segmentos de reta, que podem ser considerados como elementos uni-dimensionais. Assim, a avaliação dos integrais de fronteira em problemas bi-dimensionais consiste em avaliar integrais de linha.

Por exemplo, considere-se um elemento triangular linear como mostra a figura.





2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira

As funções de interpolação linear para este elemento são dadas por (2.25).

Agora, escolhe-se o sistema de coordenadas locais (s,t) com a origem no ponto 1 e a coordenada s paralela ao lado que liga os nós 1 e 2. Os dois sistemas de eixos (x,y) e (s,t) são relacionados com

$$x = a_1 + b_1s + c_1t$$

$$y = a_2 + b_2s + c_2t$$

As constantes a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 e c_2 podem ser determinadas com as seguintes condições

$$\text{quando } s = 0, t = 0, \quad x = x_1, y = y_1$$

$$\text{quando } s = a, t = 0, \quad x = x_2, y = y_2$$

$$\text{quando } s = c, t = b, \quad x = x_3, y = y_3$$



2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira

Obtém-se

$$\begin{aligned}x(s, t) &= x_1 + (x_2 - x_1) \frac{s}{a} + \left[\left(\frac{c}{a} - 1 \right) x_1 - \frac{c}{a} x_2 + x_3 \right] \frac{t}{b} \\y(s, t) &= y_1 + (y_2 - y_1) \frac{s}{a} + \left[\left(\frac{c}{a} - 1 \right) y_1 - \frac{c}{a} y_2 + y_3 \right] \frac{t}{b}\end{aligned}\tag{2.57}$$

As equações (2.57) permitem-nos exprimir $\psi_i(x, y)$ como $\psi_i(s, t)$ que pode ser avaliada no lado que liga os nós 1 e 2 colocando $t=0$ em $\psi_i(s, t)$:

$$\psi_i(s) \equiv \psi_i(s, 0) = \psi_i(x(s, 0), y(s, 0))$$

$$x(s) = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{s}{a}, \quad y(s) = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{s}{a}$$



2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira

Por exemplo, tem-se

$$\begin{aligned}\psi_1(s) &= \frac{1}{2A} \left\{ \alpha_1 + \beta_1 \left[\left(1 - \frac{s}{a}\right) x_1 + \frac{s}{a} x_2 \right] + \gamma_1 \left[\left(1 - \frac{s}{a}\right) y_1 + \frac{s}{a} y_2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2A} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \left(1 - \frac{s}{a}\right) = 1 - \frac{s}{a}\end{aligned}$$

onde as definições de α_1 , β_1 e γ_1 são usadas para reescrever a expressão completa.

De forma idêntica tem-se

$$\psi_2(s) = \frac{s}{a}, \quad \psi_3(s) = 0$$

onde $a=h_{12}$ é o comprimento do lado 1-2.



2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira

Note-se que $\psi_1(s)$ e $\psi_2(s)$ são exatamente as funções lineares e unidimensionais associadas com o elemento linha que liga os nós 1 e 2.

De forma similar, quando $\psi_i(x,y)$ são avaliadas no lado 3-1 do elemento, obtém-se

$$\psi_1(s) = \frac{s}{h_{13}}, \quad \psi_2(s) = 0, \quad \psi_3(s) = 1 - \frac{s}{h_{13}}$$

onde a coordenada s é medida ao longo do lado 3-1, com origem no ponto 3, e h_{13} é o comprimento do lado 1-3. Assim, a avaliação de Q_i^e envolve a utilização das funções de interpolação unidimensionais e as incógnitas de q_n na fronteira.



2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira

Em geral, o integral (2.56) ao longo da fronteira do elemento triangular linear pode ser expresso como

$$Q_i^e = \int_{1-2} \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_{2-3} \psi_i(s) q_n(s) ds + \int_{3-1} \psi_i(s) q_n(s) ds \quad (2.58a)$$

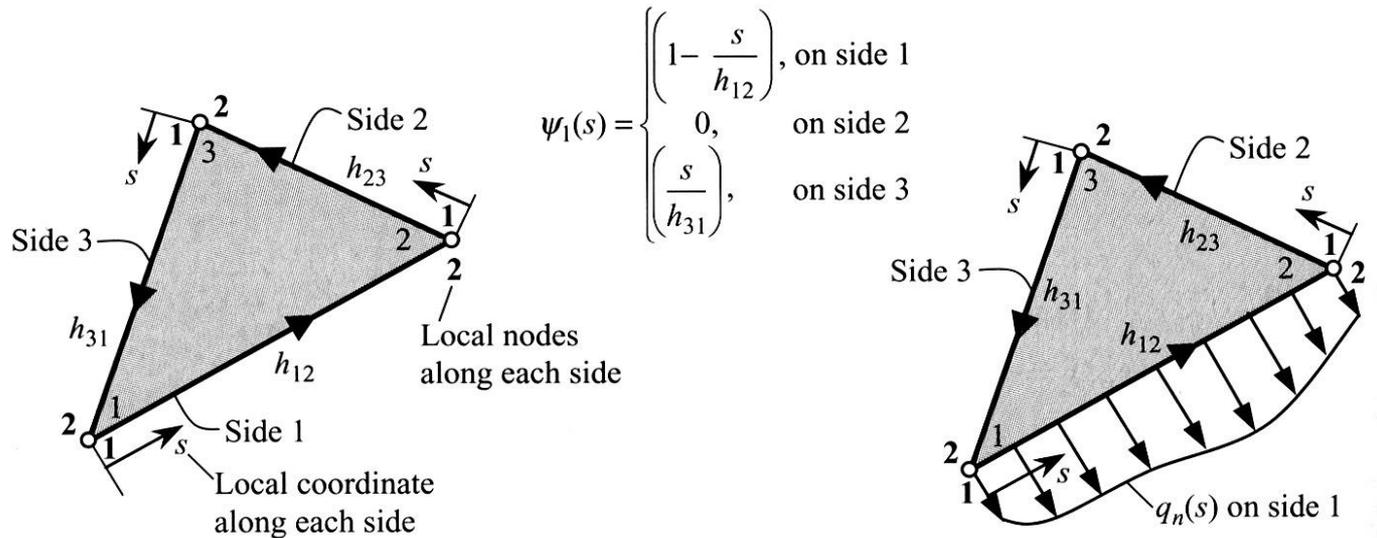
$$\equiv Q_{i1}^e + Q_{i2}^e + Q_{i3}^e$$

onde \int_{i-j} representa o integral ao longo da linha que liga o nó i ao nó j , a coordenada s é medida do nó i para o nó j , com a origem no nó i , e Q_{ij}^e é definido como sendo a contribuição de q_n no lado J do elemento Ω_e em Q_i^e :

$$Q_{iJ}^e = \int_{\text{lado } J} \psi_i q_n ds \quad (2.58b)$$

onde i refere-se ao nó i do elemento e J refere-se ao lado J do elemento.

2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira





2.6.2. Avaliação dos Integrais de Fronteira

Por exemplo, tem-se

$$Q_1^e = \oint_{\Gamma_e} q_n \psi_1(s) ds = \int_{1-2} (q_n)_{1-2} \psi_1 ds + \int_{3-1} (q_n)_{3-1} \psi_1 ds$$

A contribuição do lado 2-3 é zero porque ψ_1 é zero no lado 2-3 de um elemento triangular.

Para um elemento retangular, Q_1^e tem quatro partes mas apenas as contribuições dos lados 1-2 e 4-1 são diferentes de zero porque ψ_1 é zero nos lados 2-3 e 3-4.



2.7. Montagem das Equações do Elemento

A montagem das equações do elemento finito é baseada nos mesmos dois princípios que foram usados nos problemas unidimensionais:

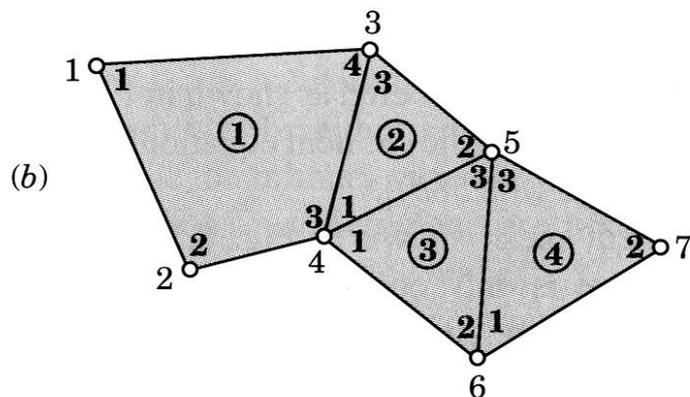
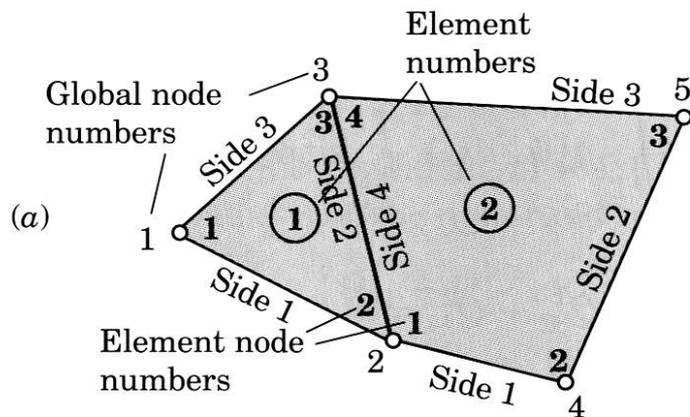
1. Continuidade das variáveis primárias
2. “Equilíbrio” das variáveis secundárias

Pode ilustrar-se o procedimento considerando uma malha de elementos finitos constituída por elementos triangulares e um elemento quadrilateral.

Vamos considerar que K_{ij}^1 ($i, j=1, 2, 3$) representa a matriz de coeficientes do elemento triangular e que K_{ij}^2 ($i, j=1, \dots, 4$) representa a matriz de coeficientes do elemento quadrilateral.



2.7. Montagem das Equações do Elemento



Global	⇒	Local (element)
K_{11}		K_{11}^1
K_{12}		K_{12}^1
K_{13}		K_{13}^1
K_{22}		$K_{22}^1 + K_{11}^2$
K_{23}		$K_{23}^1 + K_{14}^2$
K_{14}		0
K_{15}		0
K_{14}		K_{13}^1
K_{23}		K_{24}^1
K_{44}		$K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{11}^3$
K_{45}		$K_{12}^2 + K_{13}^3$
K_{25}		0
K_{47}		0



2.7. Montagem das Equações do Elemento

Da malha de elementos finitos da figura (a) acima podemos notar a correspondência seguinte (isto é, as relações de conectividade) entre os nós globais e do elemento:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \times \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

onde x indica que não existe valor.

A correspondência entre os valores nodais locais e globais é

$$u_1^1 = U_1, \quad u_2^1 = u_1^2 = U_2, \quad u_3^1 = u_4^2 = U_3, \quad u_2^2 = U_4, \quad u_3^2 = U_5 \quad (2.60)$$

que consiste em impor a continuidade das variáveis primárias nos nós comuns dos elementos 1 e 2.



2.7. Montagem das Equações do Elemento

Note-se que a continuidade das variáveis primárias nos nós inter-elemento garante a continuidade da variável primária ao longo de toda a fronteira inter-elemento. Para o caso da figura, o requisito de $u_2^1 = u_1^2$ e $u_3^1 = u_4^2$ garante que $u_h^1(s) = u_h^2(s)$ no lado que liga os nós globais 2 e 3.

Isto pode ser mostrado da seguinte forma. A solução $u_h^1(s)$ ao longo da linha que liga os nós globais 2 e 3 é linear e é dada por

$$u_h^1(s) = u_2^1 \left(1 - \frac{s}{h}\right) + u_3^1 \frac{s}{h}$$

onde s é a coordenada local com a sua origem no nó 2 e h é o comprimento do lado 2-3 (ou lado 2).



2.7. Montagem das Equações do Elemento

De forma idêntica, a solução de elemento finito ao longo da mesma linha mas no elemento 2 é

$$u_h^2(s) = u_1^2 \left(1 - \frac{s}{h}\right) + u_4^2 \frac{s}{h}$$

Uma vez que $u_2^1 = u_1^2$ e $u_3^1 = u_4^2$, então $u_h^1(s) = u_h^2(s)$ para todos os valores de s ao longo do interface dos dois elementos.

Em seguida usa-se o equilíbrio das variáveis secundárias. No interface entre os dois elementos, o fluxo dos dois elementos deve ser igual em magnitude e oposto em sinal. Para os dois elementos da figura, o interface é ao longo do lado que liga os nós globais 2 e 3.



2.7. Montagem das Equações do Elemento

Assim, o fluxo interno q_n^1 no lado 2-3 do elemento 1 deve equilibrar o fluxo q_n^2 no lado 4-1 do elemento 2:

$$(q_n^1)_{2-3} = (q_n^2)_{4-1} \quad \text{ou} \quad (q_n^1)_{2-3} = (-q_n^2)_{1-4} \quad (2.61)$$

No método dos elementos finitos impõe-se a relação acima na forma de integrais ponderados:

$$\int_{h_{23}^1} q_n^1 \psi_2^1 ds = - \int_{h_{14}^2} q_n^2 \psi_1^2 ds, \quad \int_{h_{23}^1} q_n^1 \psi_3^1 ds = - \int_{h_{14}^2} q_n^2 \psi_4^2 ds \quad (2.62a)$$

onde h_{pq}^e representa o comprimento do lado que liga o nó p ao nó q do elemento Ω_e .

As equações acima podem ser escritas na forma



2.7. Montagem das Equações do Elemento

$$\int_{h_{23}^1} q_n^1 \psi_2^1 ds + \int_{h_{14}^2} q_n^2 \psi_1^2 ds = 0, \quad \int_{h_{23}^1} q_n^1 \psi_3^1 ds + \int_{h_{14}^2} q_n^2 \psi_4^2 ds = 0 \quad (2.62b)$$

ou

$$Q_{23}^1 + Q_{14}^2 = 0, \quad Q_{32}^1 + Q_{41}^2 = 0 \quad (2.62c)$$

onde Q_{iJ}^e representa a parte de Q_i^e que vem do lado J do elemento e :

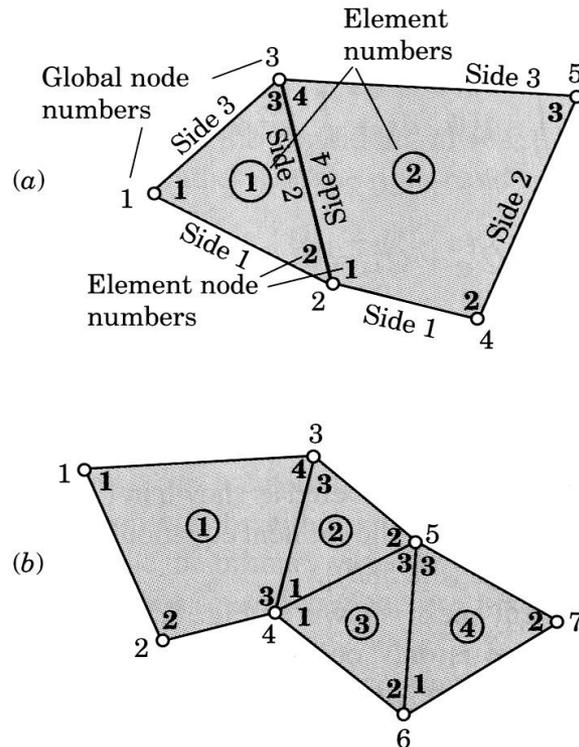
$$Q_{iJ}^e = \int_{\text{lado } J} q_n^e \psi_i^e ds$$

Os lados de elementos triangulares ou quadrilaterais são numerados como mostra a figura. Estas relações de equilíbrio devem ser impostas na montagem das equações do elemento.



2.7. Montagem das Equações do Elemento

Note-se que Q_{ij}^e é apenas uma porção de Q_i^e [ver (2.56) e (2.58b)].



Global	⇒	Local (element)
K_{11}		K_{11}^1
K_{12}		K_{12}^1
K_{13}		K_{13}^1
K_{22}		$K_{22}^1 + K_{11}^2$
K_{23}		$K_{23}^1 + K_{14}^2$
K_{14}		0
K_{15}		0
K_{14}		K_{13}^1
K_{23}		K_{24}^1
K_{44}		$K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{11}^3$
K_{45}		$K_{12}^2 + K_{13}^3$
K_{25}		0
K_{47}		0



2.7. Montagem das Equações do Elemento

As equações do elemento da malha de dois elementos da figura são escritas em primeiro lugar. Para o problema em questão, existe apenas um grau de liberdade primário por nó. Para o elemento triangular, as equações do elemento têm a forma

$$\begin{aligned} K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 &= f_1^1 + Q_1^1 \\ K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 &= f_2^1 + Q_2^1 \\ K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 &= f_3^1 + Q_3^1 \end{aligned} \tag{2.63a}$$



2.7. Montagem das Equações do Elemento

Para o elemento quadrilateral, as equações do elemento são dadas por

$$\begin{aligned}
 K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 &= f_1^2 + Q_1^2 \\
 K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 &= f_2^2 + Q_2^2 \\
 K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 &= f_3^2 + Q_3^2 \\
 K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 &= f_4^2 + Q_4^2
 \end{aligned}
 \tag{2.63b}$$

Para se impor o equilíbrio das variáveis secundárias em (2.62c) é necessário que se adicione a segunda equação do elemento 1 à primeira equação do elemento 2 e, também, que se adicione a terceira equação do elemento 1 à quarta equação do elemento 2:

$$\begin{aligned}
 (K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1) + (K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2) &= (f_2^1 + Q_2^1) + (f_1^2 + Q_1^2) \\
 (K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1) + (K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2) &= (f_3^1 + Q_3^1) + (f_4^2 + Q_4^2)
 \end{aligned}$$



2.7. Montagem das Equações do Elemento

Usando a notação global em (2.60), podemos escrever as equações em cima como

$$K_{21}^1 U_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^2) U_2 + (K_{23}^1 + K_{14}^2) U_3 + K_{12}^2 U_4 + K_{13}^2 U_5 = f_2^1 + f_1^2 + (Q_2^1 + Q_1^2)$$

$$K_{31}^1 U_1 + (K_{32}^1 + K_{41}^2) U_2 + (K_{23}^1 + K_{44}^2) U_3 + K_{42}^2 U_4 + K_{43}^2 U_5 = f_3^1 + f_4^2 + (Q_3^1 + Q_4^2)$$

Agora, pode impor-se as condições em (2.62c), igualando a zero as porções apropriadas das expressões dentro de parênteses do lado direito das equações acima:

$$Q_2^1 + Q_1^2 = (Q_{21}^1 + Q_{22}^1 + Q_{23}^1) + (Q_{11}^2 + Q_{12}^2 + Q_{13}^2 + Q_{14}^2)$$

$$= Q_{21}^1 + Q_{22}^1 + \underline{(Q_{23}^1 + Q_{14}^2)} + Q_{11}^2 + Q_{12}^2 + Q_{13}^2$$

$$Q_3^1 + Q_4^2 = (Q_{31}^1 + Q_{32}^1 + Q_{33}^1) + (Q_{41}^2 + Q_{42}^2 + Q_{43}^2 + Q_{44}^2)$$

$$= Q_{31}^1 + Q_{33}^1 + \underline{(Q_{32}^1 + Q_{41}^2)} + Q_{42}^2 + Q_{43}^2 + Q_{44}^2$$

Os termos sublinhados são zero pelas relações de equilíbrio (2.62c).



2.7. Montagem das Equações do Elemento

Os outros termos de cada equação ou são conhecidos porque q_n é conhecido na fronteira ou permanecem incógnitos porque a variável primária é especificada na fronteira.

Em geral, quando vários elementos estão ligados, a montagem dos elementos é feita através da colocação dos coeficientes dos elementos K_{ij}^e , f_i^e e Q_i^e nas posições adequadas da matriz e vetor da direita globais. Isto é feito com as relações de conectividade, isto é, com as relações de correspondência do número local do nó com o número global do nó.

Por exemplo, se o número global do nó 3 corresponder ao nó 3 do elemento 1 e ao nó 4 do elemento 2, então tem-se

$$F_3 = F_3^1 + F_4^2 \equiv f_3^1 + f_4^2 + Q_3^1 + Q_4^2, \quad K_{33} = K_{33}^1 + K_{44}^2$$



2.7. Montagem das Equações do Elemento

Se os números globais dos nós 2 e 3 corresponderem, respetivamente, aos nós 2 e 3 do elemento 1 e aos nós 1 e 4 do elemento 2, então os coeficientes globais K_{22} , K_{23} e K_{33} são dados por

$$K_{22} = K_{22}^1 + K_{11}^2, \quad K_{23} = K_{23}^1 + K_{14}^2, \quad K_{33} = K_{33}^1 + K_{44}^2$$

De forma idêntica, os componentes fonte dos nós globais 2 e 3 são adicionados:

$$F_2 = F_2^1 + F_1^2, \quad F_3 = F_3^1 + F_4^2$$

Para a malha de dois elementos da figura anterior, pode obter-se as equações montadas.



2.7. Montagem das Equações do Elemento

Assim

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{23}^1 + K_{14}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{41}^2 & K_{33}^1 + K_{44}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{24}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{34}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ F_3^1 + F_4^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

O procedimento de montagem descrito acima pode ser usado para montar elementos de qualquer forma e tipo.

Por exemplo, considere-se a malha de elementos finitos mostrada na figura (b) anterior. A posição (4,4) da matriz global de coeficientes contém $K_{33}^1 + K_{11}^2 + K_{11}^3$. A posição 4 no vetor montado contém $F_3^1 + F_1^2 + F_1^3$.



2.7. Montagem das Equações do Elemento

As posições (1,5), (1,6), (1,7), (2,5), (2,6), (2,7), (3,6), (3,7) e (4,7) da matriz global contêm zeros porque $K_{IJ}=0$ quando os nós globais I e J não correspondem aos nós do mesmo elemento da malha.

Estão completos os cinco primeiros passos na modelação por elementos finitos da equação (2.1). Os dois passos seguintes da análise, nomeadamente a imposição das condições de fronteira e a solução das equações são iguais ao caso dos problemas unidimensionais.

2.8. Cálculos Posteriores

A solução do elemento finito em qualquer ponto (x,y) num elemento Ω_e é dada por

$$u_h^e(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x, y) \quad (2.65)$$

e as suas derivadas são calculadas a partir de (2.65) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_h^e}{\partial x} &= \sum_{j=1}^n u_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \\ \frac{\partial u_h^e}{\partial y} &= \sum_{j=1}^n u_j^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.66)$$

As equações (2.65) e (2.66) podem ser usadas para calcular a solução e as suas derivadas em qualquer ponto (x,y) dentro do elemento.



2.8. Cálculos Posteriores

É útil gerar, pela interpolação de (2.65), a informação necessária para representar graficamente u_h^e e as suas derivadas.

As derivadas de u_h^e não serão contínuas nas fronteiras entre elementos porque a continuidade das derivadas não é imposta durante o procedimento de montagem. A forma fraca das equações sugere que a variável primária é u , que é considerada a variável nodal. Se outras variáveis, como derivadas de ordem superior da incógnita dependente, forem consideradas como variáveis nodais para as tornar contínuas na fronteira entre elementos, o grau de interpolação (ou a ordem do elemento) aumenta.

2.8. Cálculos Posteriores

Por outro lado, a continuidade das derivadas de ordem superior que não são identificadas como variáveis primárias pode violar os princípios físicos do problema.

Por exemplo, se $\partial u / \partial x$ for tornado contínuo viola-se o requisito de que $q_x (=a_{11} \partial u / \partial x)$ é contínuo no interface de dois materiais diferentes porque a_{11} é diferente para os dois materiais no interface.

Para o elemento triangular linear, as derivadas são constantes dentro do elemento:

$$\psi_j^e = \frac{1}{2A_e} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y), \quad \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} = \frac{1}{2A_e} \beta_j, \quad \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} = \frac{1}{2A_e} \gamma_j$$

$$\frac{\partial u_h^e}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \frac{u_j^e \beta_j}{2A_e}, \quad \frac{\partial u_h^e}{\partial y} = \sum_{j=1}^n \frac{u_j^e \gamma_j}{2A_e} \quad (2.67)$$



2.8. Cálculos Posteriores

Para o elemento retangular linear, $\partial U^e / \partial \bar{x}$ é linear em y e $\partial u_h^e / \partial \bar{y}$ é linear em x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \bar{x}} &= -\frac{1}{a} \left(1 - \frac{\bar{y} + \bar{y}_j}{b} \right), & \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{b} \left(1 - \frac{\bar{x} + \bar{x}_j}{a} \right) \\ \frac{\partial u_h^e}{\partial \bar{x}} &= \frac{1}{a} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+2} u_j^e \left(1 - \frac{\bar{y} + \bar{y}_j}{b} \right), & \frac{\partial u_h^e}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{b} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+2} u_j^e \left(1 - \frac{\bar{x} + \bar{x}_j}{a} \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde \bar{x} e \bar{y} são as coordenadas locais.

Apesar de $\partial u_h^e / \partial \bar{x}$ e $\partial u_h^e / \partial \bar{y}$ serem funções lineares de x e y , respetivamente, em cada elemento, elas são descontínuas nas fronteiras entre elementos. Consequentemente, as quantidades calculadas usando as derivadas da solução do elemento finito u_h^e são descontínuas nas fronteiras entre elementos.

2.8. Cálculos Posteriores

Por exemplo, se calcularmos $q_x^e = a_{11}^e \partial u_h^e / \partial x$ num nó partilhado por três elementos diferentes, são esperados três valores diferentes de q_x^e . A diferença entre os três valores vai-se reduzindo à medida que a malha é refinada. Alguns programas comerciais de elementos finitos fornecem apenas um valor de q_x no nó através da média obtida dos valores dos vários elementos ligados no nó.