



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Covilhã | Portugal

Conceitos Fundamentais: Problema Unidimensional

Mecânica Estrutural (10391/10411)

2021

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais



1. Etapas do Método dos Elementos Finitos

- Pré-Processamento:
 - Definição do problema e do domínio.
 - Discretização ou divisão do domínio em elementos.
 - Numeração dos nós e dos elementos.
 - Gerar propriedades geométricas (coordenadas, áreas de secções transversais, etc.).
- Processamento:
 - Obter as equações dos elementos $[k]\{u\}=\{f\}$.
 - Escolha da função de aproximação.
 - Ajuste ótimo da função de aproximação.
 - Montagem ou colocação das equações dos elementos $[K]\{u'\}=\{F'\}$.
 - Acréscimo das condições iniciais e de contorno $[\bar{K}']\{u'\} = \{\bar{F}'\}$.
 - Solução do sistema linear (ou não linear) $\{u'\}$.



1. Etapas do Método dos Elementos Finitos

- Pós-Processamento:
 - Determinação de variáveis secundárias.
 - Apresentação dos resultados ou visualização gráfica.

1.1. Pré-Processamento

- Discretização:

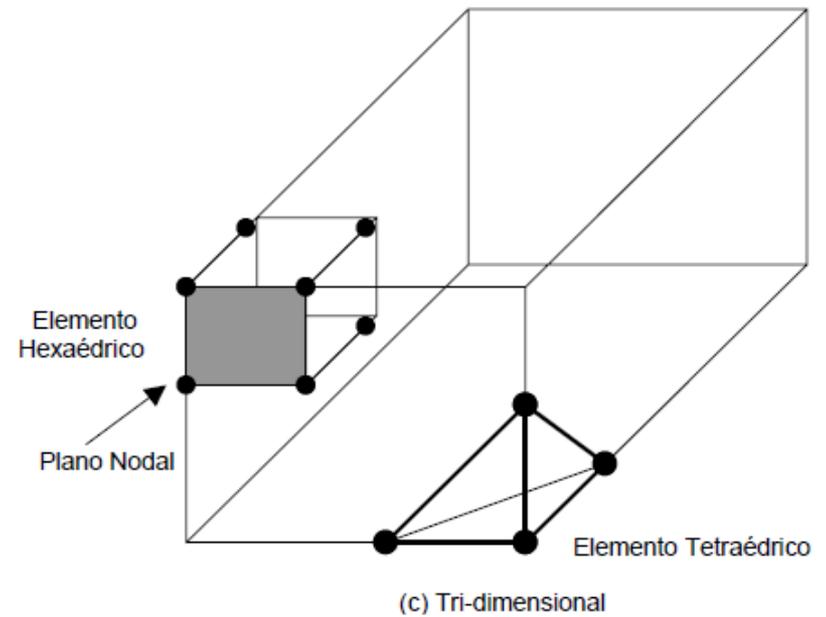
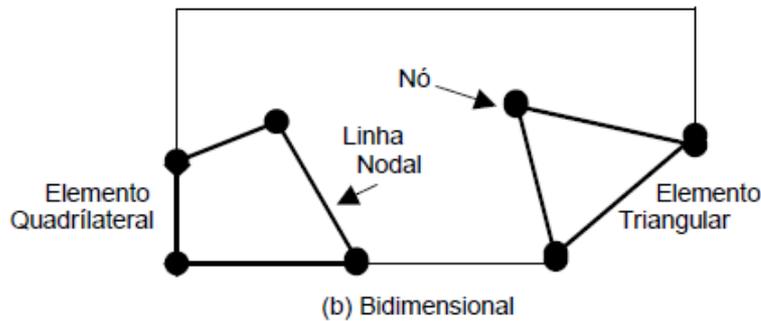
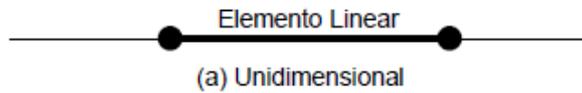
Este passo envolve a divisão do domínio da solução em elementos finitos, os quais podem ter uma, duas ou três dimensões.

Os pontos de interseção das linhas que descrevem os lados dos elementos são referenciados como nós, e os lados são chamados de linhas ou planos nodais.



1.1. Pré-Processamento

- Discretização:



1.2. Processamento

- Equações dos Elementos:

A seguir, desenvolvem-se equações, a fim de aproximar a solução de cada elemento.

Isso envolve dois sub-passos:

- Primeiro, escolhe-se uma função apropriada com coeficientes desconhecidos, que serão usados para aproximar a solução.
- Por último, avaliam-se os coeficientes, para que as funções se aproximem da solução, de forma considerada ótima.

1.2. Processamento

- Escolha das Funções de Aproximação:

Por serem de fácil manipulação matemática, os polinómios são frequentemente empregues para este propósito.

Para o caso unidimensional, a alternativa mais simples é um polinómio de primeira ordem, ou uma linha reta:

$$u(x) = a_0 + a_1x \quad (1.1)$$

Nesta fórmula, $u(x)$ é a variável dependente; a_0 e a_1 são constantes; e x é a variável independente.

Essa função deve passar através dos valores $u(x)$ nos pontos finais dos elementos em x_1 e x_2 .

1.2. Processamento

Portanto:

$$u_1 = a_0 + a_1 x_1$$

$$u_2 = a_0 + a_1 x_2$$

onde $u_1 = u(x_1)$ e $u_2 = u(x_2)$.

Estas equações podem ser resolvidas usando a regra de Cramer, por exemplo, onde

$$a_0 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

Este resultado pode, então, ser substituído na Eq. (1.1), a qual, depois de se rearranjarem os termos, pode ser escrita como

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (1.2)$$

1.2. Processamento

onde

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (1.3)$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (1.4)$$

A Eq. (1.2) é chamada função de aproximação ou de forma, e N_1 e N_2 são chamadas de funções de interpolação.

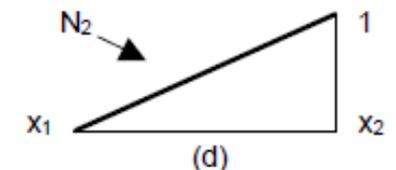
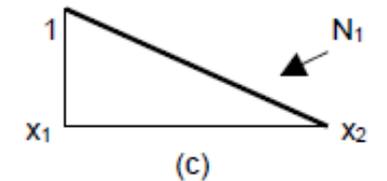
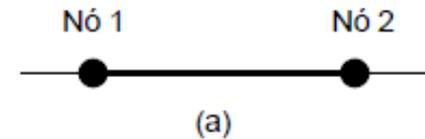
Inspecionando melhor, percebe-se que a Eq. (1.2) é, de facto, o polinómio interpolador de primeira ordem de Lagrange. Ela fornece um significado para estimar valores intermédios (interpolares) entre valores dados u_1 e u_2 nos nós.

1.2. Processamento

A figura (b) mostra uma função de aproximação ou forma para (a) um elemento linear.

As funções de interpolação correspondentes são mostradas em (c) e (d).

Note-se que a soma das funções de interpolação (N_1+N_2) é igual a 1.



1.2. Processamento

Além disto, lidar com equações lineares facilita operações como a diferenciação e integração. Tais manipulações, mais à frente, serão importantes noutros itens.

A derivada da Eq. (1.2) é:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx}u_1 + \frac{dN_2}{dx}u_2 \quad (1.5)$$

De acordo com as Eq. (1.3) e (1.4), as derivadas de N_1 e N_2 podem ser calculadas como:

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} \quad (1.6)$$

E, portanto, a derivada de u é:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} (-u_1 + u_2) \quad (1.7)$$

1.2. Processamento

Por outras palavras, essa é a diferença de u dividida pela diferença de x , representando o declive da reta que liga os nós. O integral pode ser expresso como

$$\int_{x_1}^{x_2} u dx = \int_{x_1}^{x_2} (N_1 u_1 + N_2 u_2) dx$$

Cada termo, no lado direito, é somente o integral de um triângulo retângulo com base $x_2 - x_1$ e altura u . Isto é

$$\frac{1}{2} (x_2 - x_1) u$$

O integral completo é:

$$\int_{x_1}^{x_2} u dx = \frac{u_1 + u_2}{2} (x_2 - x_1) \quad (1.8)$$

1.2. Processamento

Esta é a regra do trapézio.

1.2. Processamento

- Obtenção de um Ajuste Ótimo na Função de Aproximação: Após a escolha da função de interpolação, as equações que governam o comportamento dos elementos deve ser desenvolvida. Elas representam um ajuste da função de aproximação, com a finalidade de obtenção da solução da equação diferencial subjacente.

Estão disponíveis vários métodos para este propósito. Entre os mais comuns, cita-se a aproximação direta, o método dos resíduos ponderados e a técnica variacional.

O resultado desses métodos é análogo para o ajuste de curvas. Contudo, em vez de ajustar funções para dados, eles especificam relações entre a Eq. (1.2) desconhecida para satisfazer as EDPs subjacentes numa forma apropriada.

1.2. Processamento

Matematicamente, o resultado das equações dos elementos irá, frequentemente, consistir num conjunto de equações lineares algébricas, podendo ser expresso na forma matricial:

$$[k]\{u\} = \{F\} \quad (1.9)$$

onde $[k]$ é uma matriz de propriedade ou de rigidez do elemento; $\{u\}$ é um vetor coluna de valores desconhecidos dos nós; e $\{F\}$ é um vetor coluna, refletindo o efeito de quaisquer influências externas aplicadas nos nós.

Percebe-se, que, em alguns casos, as equações podem ser não lineares. Contudo, nos exemplos elementares descritos aqui e em muitos dos problemas práticos, os sistemas são lineares.

1.2. Processamento

- Montagem:

Depois de se obterem as equações dos elementos individuais, elas devem ser colocadas juntas ou montadas, para caracterizar o comportamento unificado do sistema inteiro.

O processo de montagem é governado pelo conceito de continuidade. Isto é, as soluções de elementos contíguos são combinadas, e os valores desconhecidos (algumas vezes, as derivadas) dos seus nós comuns são equivalentes.

Assim, a solução total será contínua.

Quando todas as versões individuais da Eq. (1.9) são, finalmente, montadas, o sistema inteiro é expresso sob forma matricial, como

$$[K]\{u'\} = \{F'\} \quad (1.10)$$

1.2. Processamento

Nesta equação, $[K]$ é a matriz de propriedade montada e $\{u'\}$ e $\{F'\}$ são vetores colunas de valores desconhecidos dos nós e forças externas. Os apóstrofes denotam uma montagem dos vetores $\{u\}$ e $\{F\}$ dos elementos individuais.

1.2. Processamento

- Condições de Contorno e Iniciais:

Antes da Eq. (1.10) poder ser resolvida, deve-se modificá-la, para considerar as condições iniciais e de contorno do sistema. Estes ajustes resultam em

$$[\bar{K}]\{u'\} = \{\bar{F}'\} \quad (1.11)$$

onde as barras indicam que as condições de fronteira foram incorporadas.

1.2. Processamento

- Solução:

Para se obter a solução da Eq. (1.11) usam-se técnicas para a resolução de sistemas lineares e não lineares. Em muitos casos, os elementos serão configurados de modo que as equações resultantes possam ser unidas, diminuindo o tamanho do sistema.

Assim, o esquema de eficiência mais alto disponível para cada sistema pode ser empregue.

O uso de simetrias, onde uma parte do sistema é igual à outra, possibilita a redução da ordem do sistema linear.

1.3. Pós-Processamento

- Apresentação dos Resultados:

Depois de obtida a solução, esta é exibida na forma de tabelas ou gráficos.

As variáveis secundárias também são determinadas e apresentadas.

Apesar dos passos precedentes serem muito genéricos, eles são comuns na maioria das implementações do Método dos Elementos Finitos.

No item seguinte, ilustra-se a forma como eles podem ser aplicados na obtenção do resultado numérico de um sistema físico simples: molas ligadas em série.

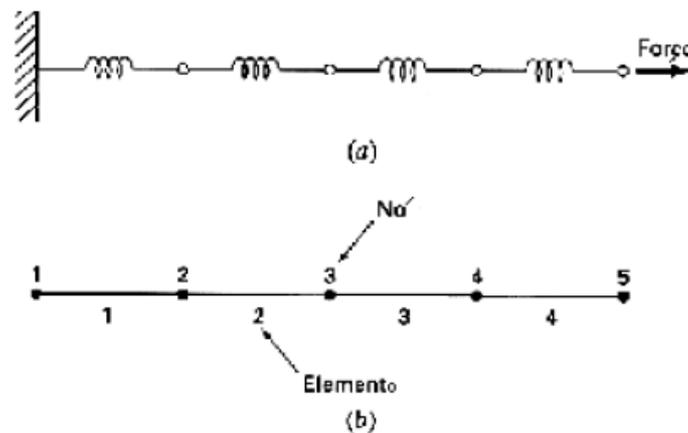
2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

- Solução de Elementos Finitos para Molas em Série:

A figura mostra (a) um conjunto de molas interligadas em série e (b) a sua representação em elementos finitos.

Uma extremidade é fixa na parede, enquanto a outra é submetida a uma força constante F .

Cada mola é representada por um elemento. Portanto, o sistema consiste em quatro elementos e cinco nós.



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

- Descrição do Problema:

A figura mostra um conjunto de molas ligadas em série.

Uma extremidade é fixa a uma parede, enquanto a outra é sujeita a uma força constante F .

Usando, passo a passo, os procedimentos do Método dos Elementos Finitos, determina-se o deslocamento das molas.

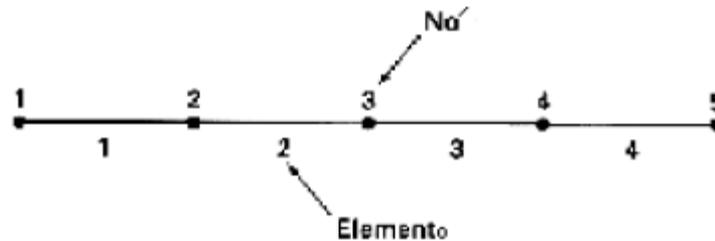


2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

- Discretização:

O modo de particionar esse sistema é, obviamente, tratar cada mola como um elemento.

Assim, o sistema consiste em quatro elementos e cinco nós.





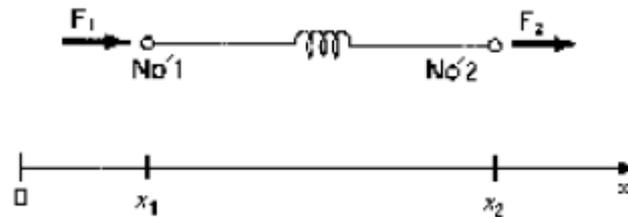
2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

- Equações dos Elementos:

Como este sistema é muito simples, as equações dos elementos podem ser escritas diretamente, sem o recurso da aproximação matemática.

Este é um exemplo de aproximação direta para os elementos derivados.

A figura mostra um elemento individual.





2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

A relação entre a força F e o deslocamento x pode ser representada, matematicamente, pela lei de Hooke

$$F = kx$$

onde k representa a constante da mola, a qual pode ser interpretada como a força requerida para causar uma unidade de deslocamento.

Se uma força F_1 é aplicada no nó 1, o seguinte balanço de força (reação) deve existir

$$F_1 = k(x_1 - x_2)$$

onde x_1 é deslocamento do nó 1 da sua posição de equilíbrio e x_2 o deslocamento do nó 2 da sua posição de equilíbrio.



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

Assim, $x_2 - x_1$ representa o alongamento (em tração ou em compressão) da mola relativamente ao equilíbrio.

Esta equação pode também ser escrita como

$$F_1 = kx_1 - kx_2$$

Para um sistema estacionário, o balanço de forças também necessita que $F_1 = -F_2$ e, portanto:

$$F_2 = -kx_1 + kx_2$$

Estas duas equações simultâneas especificam o comportamento do elemento em resposta às forças aplicadas.



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

Elas podem ser escritas numa forma matricial, como

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Ou, então

$$[k]\{x\} = \{F\}$$

onde a matriz $[k]$ é a matriz de propriedade do elemento. Neste caso, é também referenciada como a matriz de rigidez do elemento.

Note-se, que esta última equação foi moldada no formato da Eq. (1.9). Assim, obteve-se sucesso na geração de uma equação matricial, que descreve o comportamento de um elemento típico no sistema.



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

Antes de se passar ao passo seguinte, a montagem da solução total, introduzir-se-á alguma notação diferente.

Aos elementos de $[k]$ e de $\{F\}$ são, convencionalmente, colocados sobrescrito e subscrito na forma

$$\begin{bmatrix} k_{11}^e & -k_{12}^e \\ -k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix}$$

onde, o sobrescrito e designa que estas são equações do elemento e . Nos k são também colocados subscritos, e k_{ij} denota a sua localização na linha i e coluna j da matriz.

Para o presente caso, elas são também fisicamente interpretadas como representando a força requerida no nó i , para induzir uma unidade de deslocamento no nó j .



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

- Montagem:

Antes das equações do elementos serem montadas, todos os elementos e nós devem ser numerados.

Esse esquema global de numeração especifica a configuração ou topologia do sistema (o presente caso usa um esquema idêntico ao da figura inicial).

Ou seja, mostra-se o nó que pertence a cada elemento. Uma vez tendo a topologia especificada, as equações, para cada elemento, podem ser escritas com referência às coordenadas globais.

As equações dos elementos podem então ser adicionadas, uma de cada vez, para montar o sistema total.



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

O resultado final pode ser expresso na forma matricial como (ver Eq. (1.11)):

$$[K]\{x'\} = \{F'\}$$

onde

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & -k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & -k_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & -k_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & -k_{12}^4 \\ & & & -k_{21}^4 & k_{22}^4 \end{bmatrix}$$

e

$$\{F'\} = \{F_1^1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad F_2^4\}^T$$



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

e $\{x'\}$ e $\{F'\}$ são os vetores de deslocamento e de força expandidos.

Quanto às equações que foram montadas, as forças internas cancelaram-se entre si por terem sentidos opostos. Assim, o resultado final para $\{F'\}$ é zero, em todas as linhas, exceto no primeiro e último nós.

A estrutura da matriz de propriedade montada é tridiagonal. Isso é um resultado direto do esquema particular de numeração escolhido antes da montagem. Embora não seja muito importante no contexto presente, com a realização de tal união, sistemas esparsos podem ser uma vantagem na colocação de problemas mais complicados devido à existência de esquemas eficientes disponíveis para a resolução de tais sistemas.



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

- Condições de Contorno:

O presente sistema é sujeito a simples condições de contorno em $x_1=0$. Introduzindo essas condições, e aplicando o esquema de renumeração, reduz-se o sistema para (com todos os $k=1$)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

O sistema está agora na forma da Eq. (1.12) e está pronto para ser resolvido. Embora a redução das equações seja, certamente, uma aproximação valiosa incorporada nas condições de contorno, pode preferir-se deixar o número de equações intactas quando a solução é realizada por computador.



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

Neste caso, temos que $F_1 = -F$ (reação de F na parede) e $x_1 = 0$. Assim, o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

Uma vez incorporadas as condições de contorno, passa-se ao próximo passo: a solução.



2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

- Solução:

Resolvendo o sistema linear com uma das técnicas numéricas, onde todos os $k=1$ e $F=1$, temos:

$$x_1=0$$

$$x_2=1$$

$$x_3=2$$

$$x_4=3$$

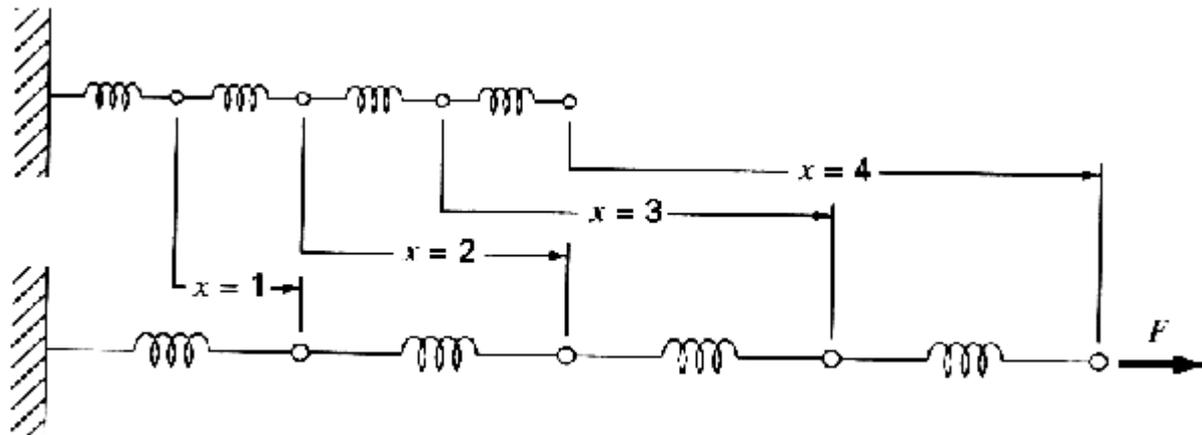
$$x_5=4$$

2. Exemplo de Elementos Finitos Unidimensionais

- Apresentação de Resultados:

O resultado pode agora ser desenhado graficamente.

Na figura os resultados são os esperados. Cada mola é alongada uma unidade de deslocamento:





3. Método da Aproximação de Galerkin

Agora descreve-se um método para obter soluções aproximadas de problemas de valor de contorno baseados na formulação fraca. Vai inicialmente fazer-se um tratamento abstrato.

O primeiro passo no desenvolvimento do método é construir aproximações de dimensões finitas de γ e ν .

Estas coleções de funções são denotadas por γ^h e ν^h , respetivamente. O sobrescrito refere para a associação de γ^h e ν^h com uma divisão ou discretização do domínio Ω , o qual é parametrizado por um comprimento característico de escala h .

Deseja ter-se γ^h e ν^h como sendo subconjuntos de γ e ν , respetivamente.



3. Método da Aproximação de Galerkin

Isto pode ser escrito como

$$\gamma^h \subset \gamma \quad (\text{isto é, se } u^h \in \gamma^h, \text{ então } u^h \in \gamma) \quad (3.1)$$

$$\nu^h \subset \nu \quad (\text{isto é, se } w^h \in \nu^h, \text{ então } w^h \in \nu) \quad (3.2)$$

onde o significado preciso é dado em parênteses.

Consequentemente, de (3.1) e (3.2), sendo $u^h \in \gamma^h$ e $w^h \in \nu^h$, então

$$u^h(1) = g \quad (3.3)$$

$$w^h(1) = 0 \quad (3.4)$$

As coleções γ , ν , γ^h , e ν^h , são frequentemente referidas como espaço de funções.



3. Método da Aproximação de Galerkin

A terminologia espaço em matemática usualmente conota uma estrutura linear.

Este tem o seguinte significado: se c_1 e c_2 são constantes e v e w estão em ν , então c_1v+c_2w está também em ν .

Ambos ν e ν^h são assim vistos como possuindo as propriedades do espaço linear. Contudo, essas propriedades não são claramente compartilhadas por γ e γ^h devido à não homogeneidade das condições de contorno.

Por exemplo, u_1 e u_2 são membros de γ , então $u_1+u_2 \notin \gamma$, uma vez que $u_1(1)+u_2(1)=g+g= 2g$ está em violação com a definição de γ . Contudo, a terminologia de espaço de funções ainda é aplicada para γ e γ^h .

3.1. Método (Bubnov-) Galerkin

Assume-se que o conjunto \mathcal{V}^h seja dado. Então, para cada membro $v^h \in \mathcal{V}^h$, constrói-se uma função $u^h \in \mathcal{V}^h$ tal que

$$u^h = v^h + g^h \quad (3.5)$$

onde g^h é uma função dada satisfazendo a condição de contorno essencial, isto é,

$$g^h(1) = g \quad (3.6)$$

Note-se que (3.5) satisfaz também as condições requeridas de contorno

$$u^h(1) = v^h(1) + g^h(1) = 0 + g \quad (3.7)$$

3.1. Método (Bubnov-) Galerkin

Assim (3.5) constitui uma definição de γ^h , que é, γ^h são todas as funções da forma de (3.5). O ponto importante a observar é que, acima de tudo, as funções g^h , γ^h e \mathcal{V}^h são compostas por conjuntos idênticos de funções.

Agora escreve-se a equação variacional

$$a(w, u) = (w, f) + w(0)h \quad (3.8)$$

onde

$$a(w, u) = \int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx \quad (3.9)$$

$$(w, f) = \int_0^1 wf dx \quad (3.10)$$

em termos de $u^h \in \gamma^h$ e $w^h \in \mathcal{V}^h$.

3.1. Método (Bubnov-) Galerkin

Assim

$$a(w^h, u^h) = (w^h, f^h) + w^h(0)h \quad (3.11)$$

Esta equação é considerada como definindo uma solução aproximada (fraca), u^h .

Substituindo (3.5) em (3.11), e a bilinearidade de $a(.,.)$ possibilita escrever

$$a(w^h, u^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, g^h) \quad (3.12)$$

O lado direito consiste totalmente em termos associados com dados fornecidos (isso é, f , g e h). A equação (3.12) é usada para definir v^h , a parte desconhecida de u^h .

3.1. Método (Bubnov-) Galerkin

A forma (Bubnov-) Galerkin do problema, denotada por (G) é representada como se segue:

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } f, g \text{ e } h, \text{ achar } u^h = v^h + g^h, \text{ onde } v^h \in \mathcal{V}^h \\ \text{tal que para todo } w^h \in \mathcal{V}^h \\ a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, g^h) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Note-se que (G) é uma coleção de funções com dimensões finitas em \mathcal{V}^h .

O método de Bubnov-Galerkin é comumente referenciado como simplesmente método de Galerkin, terminologia que se adotará.

A equação (3.12) é algumas vezes referida como Equação de Galerkin. O método de aproximações do tipo considerado é exemplo do chamado Método dos Resíduos Ponderados.



4. Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas

O método de Galerkin conduz a um sistema de equações algébricas lineares.

Para ver isso, é necessário detalhar mais a definição de u^h . Assim u^h consiste de qualquer combinação linear de funções dadas denotadas por $N_A: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $A=1, 2, \dots, n$.

Isso significa que se $w^h \in u^h$, então existem constantes c_A , $A=1, 2, \dots, n$, tal que

$$w^h = \sum_{A=1}^n c_A N_A = c_1 N_1 + c_2 N_2 + c_3 N_3 + \dots + c_n N_n \quad (4.1)$$

As funções N_A são conhecidas como funções de forma, base ou interpolação. Requer-se que cada N_A satisfaça

$$N_A(1) = 0, \quad A = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$



4. Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas

da qual segue por (4.1) que $w^h(1)=0$, como é necessário. \mathcal{V}^h tem dimensões n por razões óbvias.

Para definir membros de γ^h é necessário especificar g^h . Para esse fim, introduz-se uma outra função de forma $N_{n+1}:\bar{\Omega}\rightarrow\mathbb{R}$, a qual tem a seguinte propriedade

$$N_{n+1}(1) = 1 \quad (4.3)$$

(Note que $N_{n+1} \notin \mathcal{V}^h$) Então g^h é dado por

$$g^h = gN_{n+1} \quad (4.4)$$

e então

$$g^h(1) = g \quad (4.5)$$



4. Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas

Com essas definições, $u^h \in \gamma^h$ pode ser escrito como

$$u^h = v^h + g^h = \sum_{A=1}^n d_A N_A + g N_{n+1} \quad (4.6)$$

onde os d_A são constantes e das quais se vê que $u^h(1)=g$.

Substituindo (4.1) e (4.6) na Equação de Galerkin tem-se

$$a\left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, \sum_{B=1}^n d_B N_B\right) = \left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, f\right) + \left[\sum_{A=1}^n c_A N_A(0)\right] h - a\left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, g N_{1+n}\right) \quad (4.7)$$

Usando a bilinearidade de $a(.,.)$ e $(.,.)$, (4.7) fica

$$0 = \sum_{A=1}^n c_A G_A \quad (4.8)$$

onde

$$G_A = \sum_{B=1}^n a(N_A, N_B) d_B - (N_A, f) - N_A(0) h + a(N_A, N_{n+1}) g \quad (4.9)$$



4. Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas

Agora a equação de Galerkin é garantida para todo $w^h \in \mathcal{V}^h$.

De (4.1), isso significa que a equação de Galerkin é válida para todos os c_A , $A=1,2,\dots,n$.

Uma vez que os coeficientes c_A são arbitrários em (4.8), necessariamente segue que cada G_A , $A=1,2,\dots,n$, deve ser igual a zero, isto é, de (4.9)

$$\sum_{B=1}^n a(N_A, N_B) d_B = (N_A, f) - N_A(0)h + a(N_A, N_{n+1})g \quad (4.10)$$

Note-se que todos os termos são conhecidos em (4.10) exceto os d_B .

Então (4.10) constitui um sistema de n equações em n incógnitas. Este sistema pode ser escrito numa forma mais concisa como se segue.



4. Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas

Assim, tem-se

$$K_{AB} = a(N_A, N_B) \quad (4.11)$$

$$F_A = (N_A, f) - N_A(0)h + a(N_A, N_{n+1})g \quad (4.12)$$

Então (4.10) fica

$$\sum_{B=1}^n K_{AB} d_B = F_A, \quad A = 1, 2, \dots, n \quad (4.13)$$

Este sistema de equações também se pode escrever na forma matricial.



4. Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas

Assim

$$K = [K_{AB}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$F = \{F_A\} = \{F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_{n-1} \quad F_n\}^T \quad (4.15)$$

e

$$d = \{d_B\} = \{d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_{n-1} \quad d_n\}^T \quad (4.16)$$



4. Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas

Assim (4.13) pode ser escrita na seguinte forma

$$Kd = F \quad (4.17)$$

As seguintes terminologias são, frequentemente aplicadas, especialmente quando o problema em consideração pertence a um sistema mecânico:

- **K = Matriz de Rigidez**
- **F = Vetor de Forças**
- **d = Vetor Deslocamentos**

No entanto, uma grande variedade de interpretações físicas são possíveis.



4. Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas

Neste ponto, pode representar-se a matriz equivalente, (M), do problema de Galerkin.

$$(M) \begin{cases} \text{Dadas a matriz de coeficientes } K \text{ e o vetor } F, \text{ achar } d \text{ tal que} \\ Kd = F \end{cases} \quad (4.18)$$

A solução de (M) é justamente $d=K^{-1}.F$ (assumindo que a inversa de K , K^{-1} , existe).

Uma vez que d é conhecido, a solução (G) pode ser obtida em qualquer ponto $x \in \Omega$, empregando (4.6), assim,

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^n d_A N_A(x) + g N_{n+1}(x) \quad (4.19)$$

Do mesmo modo, derivadas de u^h , se requeridas, podem se obtidas pela diferenciação termo por termo.



4. Matriz de Rigidez e Vetor de Cargas

Deve ser enfatizado, que a solução (G) é uma solução aproximada de (W).

Consequentemente, a equação diferencial e as condições de contorno naturais são apenas aproximadamente satisfeitas.

A qualidade da aproximação depende das escolhas das funções de aproximação N_A e do número de n .

4.1. Observações

1. A matriz K é simétrica.

Isso segue da simetria de $a(.,.)$ e do uso do método de Galerkin (que é, as mesmas funções de forma são usadas para as variações e soluções admissíveis):

$$K_{AB} = a(N_A, N_B) = a(N_B, N_A) = K_{BA} \quad (4.20)$$

ou em notação matricial

$$K = K^T \quad (4.21)$$

onde o sobrescrito T denota a matriz transposta.

A simetria de K tem importantes implicações computacionais.

4.1. Observações

2. Vai-se relembrar os passos seguidos para o problema matricial, já que eles são típicos do processo que se deve desenvolver na solução de um dado problema usando o Método dos Elementos Finitos:

$$(S) \Leftrightarrow (W) \approx (G) \Leftrightarrow (M) \quad (4.22)$$

A única aproximação aparentemente feita está na resolução aproximada de (W) via (G) . Em situações mais complexas encontradas na prática, o número de aproximações aumenta. Por exemplo, os dados f , g e h podem ser aproximados, como também o domínio Ω , o cálculo de integrais e assim por diante. Prova de convergência e análise de erros envolvem considerações de cada aproximação.

4.1. Observações

3. Algumas vezes é conveniente escrever

$$u^h(x) \Leftrightarrow \sum_{A=1}^{n+1} N_A(x) d_A \quad (4.23)$$

onde $d_{n+1}=g$.

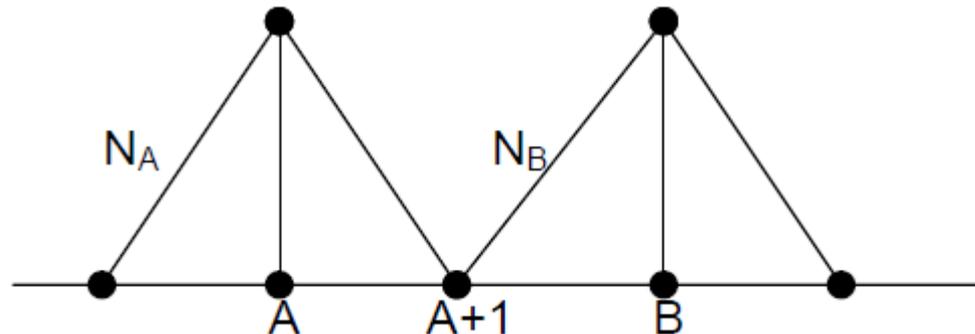


5. Propriedades da Matriz de Rigidez

As funções de forma N_A , $A=1,2,\dots,n+1$ são zero fora da vizinhança do nó. Como resultado, muitos termos de K são zero. Isso pode ser visto como se segue.

Seja $B>A+1$ (a porção diferente de zero de N_B e N_A não faz sobreposição), então, pela figura

$$K_{AB} = \int_0^1 \underbrace{N_{A,x} N_{B,x}}_0 dx = 0 \quad (5.1)$$





5. Propriedades da Matriz de Rigidez

A simetria de K implica, adicionalmente, que (5.1) é garantida para $A > B + 1$. É dito que K é semi-diagonal, isto é, os seus valores diferentes de zero estão numa banda sobre a diagonal principal.

A figura seguinte mostra essa propriedade. Matrizes semi-diagonais têm vantagens significativas uma vez que os elementos zero fora da banda não são armazenados e nem operados pelos computadores.

A matriz de rigidez obtida na análise de elementos finitos, em geral tem banda estreita, e conduz ela mesma a uma formulação e solução mais económica.



5. Propriedades da Matriz de Rigidez

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & k_{n-2,n-3} & k_{n-2,n-2} & k_{n-2,n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & k_{n-1,n-2} & k_{n-1,n-1} & k_{n-1,n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & k_{n,n-1} & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Definição:

- Uma matriz A $n \times n$ é definida positiva se
 - $c^T A c \geq 0$ para qualquer vetor c de ordem n ; e
 - $c^T A c = 0$ implica que $c=0$.

5. Propriedades da Matriz de Rigidez

Observa-se:

- Uma matriz definida positiva e simétrica possui uma única inversa.
- Os valores próprios de uma matriz definida positiva são reais e positivos.

Teorema:

- A matriz K $n \times n$ definida em (4.11) é definida positiva.



5. Propriedades da Matriz de Rigidez

Prova:

- Seja c_A , $A=1,2, \dots, n$, e os componentes de c (isto é, $c=\{c_A\}$), um vetor arbitrário. Usam-se estes c_A para construir um membro de \mathcal{V}^h ,

$$w^h = \sum_{A=1}^n c_A N_A$$

onde os N_A são as funções bases para \mathcal{V}^h . Então

- Definição de K_{AB}

$$c^T K c = \sum_{A,B=1}^n c_A K_{AB} c_B = \sum_{A,B=1}^n c_A a(N_A, N_B) c_B$$

- Bilinearidade de $a(\dots, \dots)$

$$c^T K c = a\left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, \sum_{B=1}^n c_B N_B\right)$$



5. Propriedades da Matriz de Rigidez

- Definição de w^h

$$c^T Kc = a(w^h, w^h)$$

- e

$$c^T Kc = \int_0^1 (w_{,x}^h)^2 dx \geq 0$$

- Assume $c^T Kc=0$. Por parte da prova anterior,

$$\int_0^1 (w_{,x}^h)^2 dx = 0$$

e, conseqüentemente, w^h deve ser constante: uma vez que $w^h \in U^h$, $w^h(1)=0$.

Combinando estes factos, conclui-se que $w^h(x)=0$ para qualquer $x \in [0,1]$, o qual é possível somente se cada $c_A=0$, $A=1,2,\dots,n$.
Então $c=0$.



5. Propriedades da Matriz de Rigidez

Note-se que a segunda parte desta prova depende da definição de K e das condições de contorno essenciais de valor zero construída dentro da definição de \mathcal{V}^h .

Resumindo:

- K definida por (4.11) é
 - Simétrica
 - Semi-diagonal
 - Definida positiva

A consequência prática das propriedades acima é uma solução computacional de $Kd=F$ muito eficiente.

6. Coordenadas Locais e Globais

Até aqui, analisou-se o Método dos Elementos Finitos simplesmente como um procedimento de aproximação de Galerkin aplicado para formulações fracas do problema em questão.

O que faz com que se tenha feito um procedimento de elementos finitos é a característica das funções bases selecionadas; particularmente a sua suavidade “Piecewise” e o suporte local (isto é, $N_A \equiv 0$ fora da vizinhança do nó A).

Matematicamente, esse é o ponto de vista global no qual as funções base são consideradas como definidas em todo o domínio do problema de valor de contorno.

O ponto de vista global é muito usado para estabelecer as propriedades matemáticas do Método dos Elementos Finitos.

6. Coordenadas Locais e Globais

Agora deseja-se discutir um outro ponto de vista chamado de ponto de vista local ou do elemento.

Este ponto de vista é tradicional em engenharia e é muito usado na implementação computacional do Método dos Elementos Finitos e no desenvolvimento de elementos finitos.

Começa-se o tratamento do ponto de vista local com uma questão: O que é um elemento finito?

Tenta-se dar uma resposta em termos do espaço de elementos finitos lineares “Piecewise” que se definiu previamente.

6. Coordenadas Locais e Globais

Um elemento individual consiste das seguintes quantidades.

- Elemento Finito Linear (Descrição Global)
 - (g1) Domínio: $[x_A, x_{A+1}]$
 - (g2) Nós: $\{x_A, x_{A+1}\}$
 - (g3) Graus de Liberdade: $\{d_A, d_{A+1}\}$
 - (g4) Funções de Interpolação: $\{N_A, N_{A+1}\}$
 - (g5) Funções de Aproximação: $u^h(x) = N_A(x)d_A + N_{A+1}(x)d_{A+1}$, $x \in [x_A, x_{A+1}]$

No Método dos Resíduos Ponderados no qual γ^h e ψ^h são construídos em cima de diferentes classes de funções (isto é, Método de Petrov-Galerkin), pode-se também especificar um conjunto de funções teste ou ponderadas, ditas $\{\tilde{N}_A, \tilde{N}_{A+1}\}$.

O conjunto inteiro de \tilde{N}_A poderia então constituir uma base para ψ^h . No método de Galerkin $\tilde{N}_A = N_A$.

6. Coordenadas Locais e Globais

Em palavras, um elemento finito linear é justamente a totalidade das possibilidades associadas com as funções u^h restritas para o domínio dos elementos.

As quantidades acima são em termos dos parâmetros globais chamados de coordenadas globais, funções de forma globais, ordenação de nós globais e assim por diante.

Passa-se agora a introduzir um conjunto de quantidades locais, correspondentes a quantidades globais, tal que cálculos para um elemento típico podem ser padronizados.

6. Coordenadas Locais e Globais

Estes são dados a seguir:.

- Elemento Finito Linear (Descrição Local)
 - (g1) Domínio: $[\xi_1, \xi_2]$
 - (g2) Nós: $\{\xi_1, \xi_2\}$
 - (g3) Graus de Liberdade: $\{d_1, d_2\}$
 - (g4) Funções de Interpolação : $\{N_1, N_2\}$
 - (g5) Funções de Aproximação: $u^h(\xi) = N_1(\xi)d_1 + N_2(\xi)d_2$

Note-se que na descrição local, a numeração dos nós começa com 1.

Relacionam-se os domínios da descrição global e local por uma transformação afim $\xi: [x_A, x_{A+1}] \rightarrow [\xi_1, \xi_2]$, tal que $\xi(x_A) = \xi_1$ e $\xi(x_{A+1}) = \xi_2$.

6. Coordenadas Locais e Globais

Isto é padronizado na prática tomando $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = +1$. Estes são elementos isoparamétricos.

Então ξ pode ser representado pela expressão

$$\xi(x) = c_1 + c_2 x \quad (6.1)$$

onde c_1 e c_2 são constantes que são determinadas por

$$\begin{cases} c_1 + c_2 x_A = -1 \\ c_1 + c_2 x_{A+1} = 1 \end{cases} \quad (6.2)$$

Resolvendo o sistema de equações obtém-se

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{x_{A+1} + x_A}{x_{A+1} - x_A} \\ c_2 = \frac{2}{x_{A+1} - x_A} \end{cases} \quad (6.3)$$

6. Coordenadas Locais e Globais

Substituindo em (6.1) resulta em

$$\xi(x) = \frac{2x - x_A - x_{A+1}}{h_A} \quad (6.4)$$

onde $h_A = x_{A+1} - x_A$, o comprimento do elemento A .

O inverso de ξ é obtido pela resolução em ordem a x :

$$x(\xi) = \frac{h_A \xi - x_A - x_{A+1}}{2} \quad (6.5)$$

Em (6.4), ξ é um mapeamento e x é um ponto, e pelo contrário, em (6.5) x é um mapeamento e ξ é um ponto.

6. Coordenadas Locais e Globais

Na sequência, adota-se a notação convencional na qual os sub-índices a, b, c, \dots pertencem ao sistema de numeração local. Os sub-índices A, B, C, \dots irão sempre pertencer ao sistema de numeração global.

Para controlar a proliferação de notações, usa-se a mesma notação para o sistema local e global (por exemplo, d_a e d_A ou N_a e N_A). Isso geralmente não causa confusão pois o contexto irá tornar claro qual o ponto de vista que está a ser adotado.

Para não haver perigo de confusão, um sobrescrito e será introduzido para denotar uma quantidade com descrição local associada com o número do elemento e (por exemplo, $d_a^e = d_A$, $N_a^e(\xi) = N_A(x^e(\xi))$, onde $x^e: [\xi_1, \xi_2] \rightarrow [x_1^e, x_2^e] = [x_A, x_{A+1}]$, etc.).

6. Coordenadas Locais e Globais

Em termos de ξ , as funções de forma na descrição local tomam a forma padrão

$$N_a(\xi) = \frac{(1 + \xi_a \xi)}{2} \quad a = 1, 2 \quad (6.6)$$

Note também que (6.5) pode ser escrito em termos de (6.6):

$$x^e(\xi) = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi) x_a^e \quad (6.7)$$

Esta tem a mesma forma que as funções de interpolação. Por referência, nota-se o seguinte resultado

$$N_{a,\xi} = \frac{\xi_a}{2} = \frac{(-1)^a}{2} \quad (6.8)$$

$$x_{,\xi}^e = \frac{h^e}{2} \quad (6.9)$$

6. Coordenadas Locais e Globais

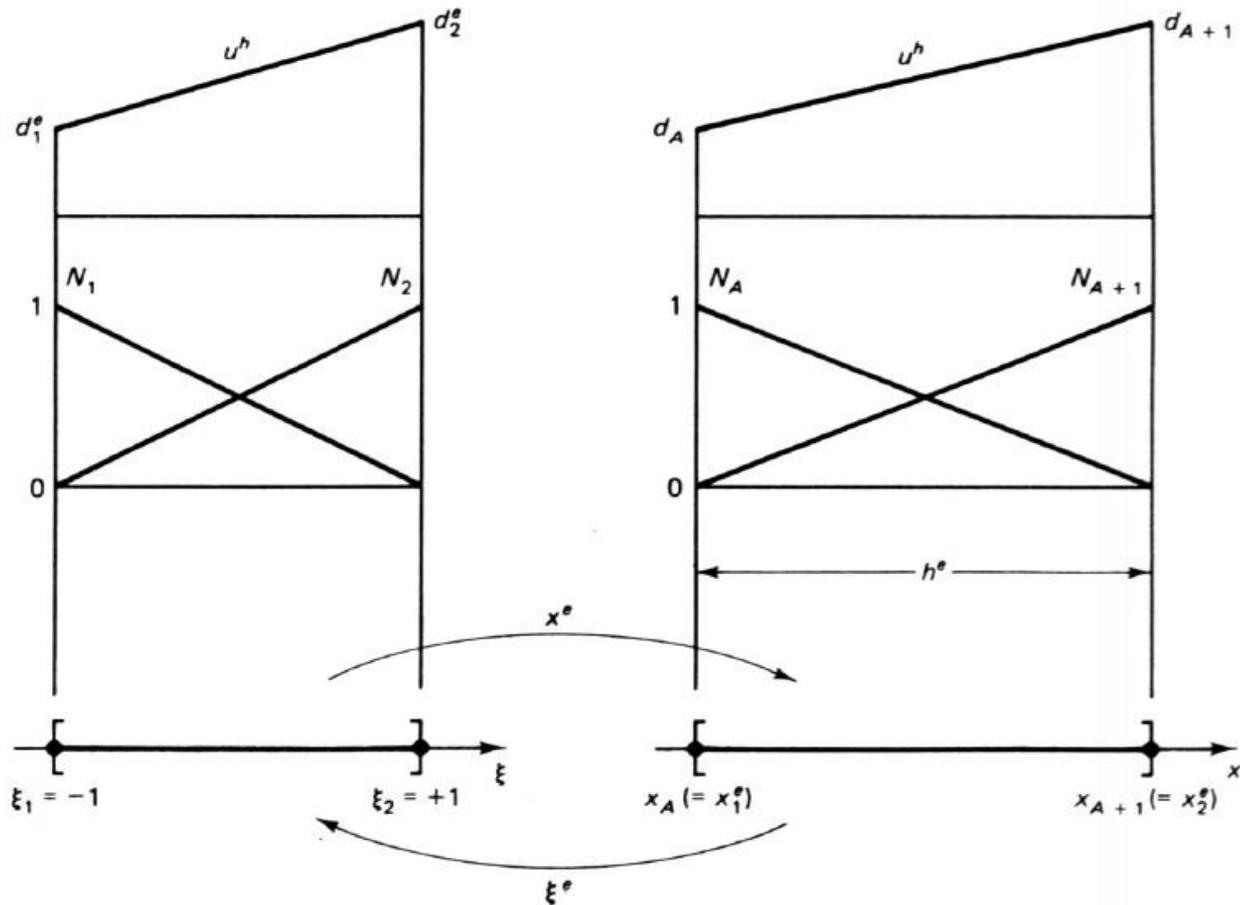
onde $h^e = x_2^e - x_1^e$ e

$$\xi_{,x}^e = (x_{,\xi}^e)^{-1} = \frac{2}{h^e} \quad (6.10)$$

A descrição local e global dos e -simos elementos são esboçados na figura seguinte.



6. Coordenadas Locais e Globais



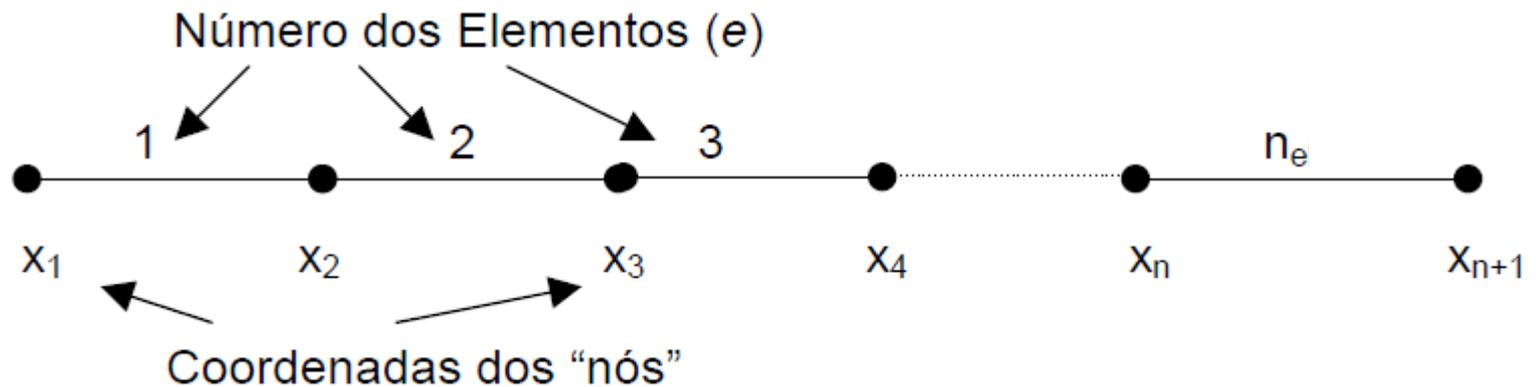


7. Matriz de Rigidez e Vetor Independente de um Elemento

Para desenvolver mais o ponto de vista dos elementos, assume-se que o modelo em questão consiste de n_e elementos, numerados como na figura.

Claro que para este caso $n_e = n$.

Se e é a variável índice para os elementos, então $1 \leq e \leq n_e$.





7. Matriz de Rigidez e Vetor Independente de um Elemento

Agora relembando a definição (global) das matrizes de rigidez e do vetor força

$$\begin{aligned} K &= \underbrace{[K_{AB}]}_{n \times n} \\ F &= \underbrace{[F_A]}_{n \times 1} \end{aligned} \quad (7.1)$$

onde

$$K_{AB} = a(N_A, N_B) = \int_0^1 N_{A,x} N_{B,x} dx \quad (7.2)$$

$$F_A = (N_A, f) + \delta_{A1} h - a(N_A, N_{n+1}) g = \int_0^1 N_A f dx + \delta_{A1} h - \int_0^1 N_{A,x} N_{n+1,x} dx g \quad (7.3)$$

Em (7.2) assumiu-se $N_A(x_1) = \delta_{A1}$, como para o espaço de elementos finitos lineares “Piecewise”.



7. Matriz de Rigidez e Vetor Independente de um Elemento

Os integrais sobre $[0, 1]$ podem ser escritos como a soma de integrais sobre os elementos do domínio

$$K = \sum_{e=1}^{n_e} K^e \quad K^e = [K_{AB}^e] \quad (7.4)$$

$$F = \sum_{e=1}^{n_e} F^e \quad F^e = \{F_A^e\} \quad (7.5)$$

onde

$$K_{AB}^e = a(N_A, N_B)^e = \int_{\Omega^e} N_{A,x} N_{B,x} dx \quad (7.6)$$

$$F_A^e = (N_A, f)^e + \delta_{e1} \delta_{A1} h - a(N_A, N_{n+1})^e g = \int_{\Omega^e} N_A f dx + \delta_{A1} h - \int_{\Omega^e} N_{A,x} N_{n+1,x} dx g \quad (7.7)$$

e $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$, o domínio do ézimo elemento.



7. Matriz de Rigidez e Vetor Independente de um Elemento

Uma observação importante a fazer é que K e F podem ser construídos pela soma das contribuições das matrizes e vetores dos elementos, respetivamente.

Pela definição de N_A , tem-se que

$$K_{AB}^e = 0, \text{ se } A \neq e \text{ ou } A \neq e + 1 \text{ ou } B \neq e \text{ ou } B \neq e + 1 \quad (7.8)$$

$$F_A^e = 0, \text{ se } A \neq e \text{ ou } A \neq e + 1 \quad (7.9)$$

A situação para um elemento típico, e , é mostrada na figura. Na prática, não se deve adicionar os zeros mas meramente adicionar os termos diferentes de zero na posição apropriada.

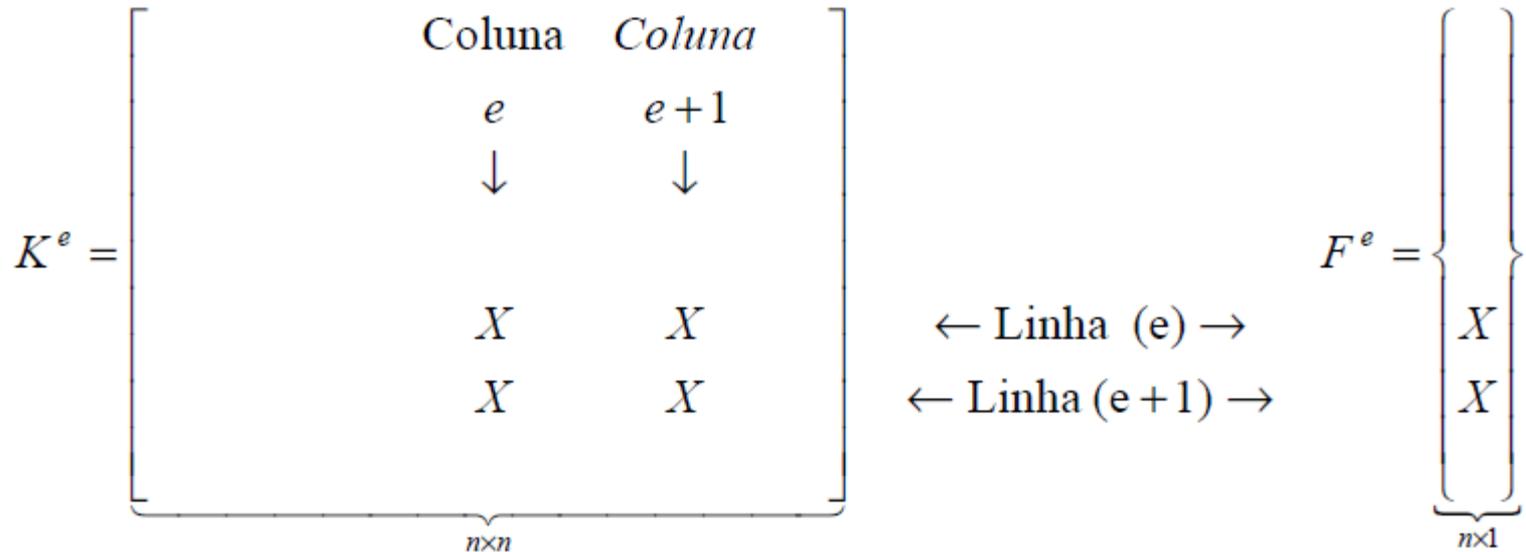
Para esse propósito é muito útil definir a matriz de rigidez para o e zimo elemento k^e e o vetor de força do elemento f^e como se segue



7. Matriz de Rigidez e Vetor Independente de um Elemento

$$k^e = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{ab}^e \end{bmatrix}}_{2 \times 2} \quad (7.10)$$

$$f^e = \underbrace{\begin{bmatrix} f_a^e \end{bmatrix}}_{2 \times 1}$$





7. Matriz de Rigidez e Vetor Independente de um Elemento

$$k_{ab}^e = a(N_a, N_b)^e = \int_{\Omega^e} N_{a,x} N_{b,x} dx \quad (7.11)$$

$$f_a^e = \int_0^1 N_A f dx + \begin{cases} \delta_{A1} h & e = 1 \\ 0 & e = 2, 3, \dots, n_e - 1 \\ -k_{a_2}^e g & e = n_e \end{cases} \quad (7.12)$$

Aqui k^e e f^e são definidos com respeito à ordenação local, onde K^e e F^e são definidos com respeito à ordenação global.

Para determinar onde os componentes k^e e f^e irão ficar em K e F , respetivamente, é necessária informação adicional. Isso é discutido a seguir.



8. Montagem da Matriz de Rigidez e do Vetor de Cargas Globais

Num programa computacional de elementos finitos, existe uma sub-rotina de elementos finitos para produzir k^e e f^e , $e=1,2,\dots,n_e$, dos dados fornecidos e para alimentar a sub-rotina de montagem necessita-se de informação adicional tal que os termos em k^e e f^e possam ser adicionados em posições apropriadas em K e F , respetivamente.

Estas informações para montagem são armazenadas numa matriz chamada LM, a matriz de localizações.

Constrói-se uma matriz LM para o problema acima considerado.

As dimensões de LM são o número de nós dos elementos pelo número de elementos. No caso presente, os números são 2 e n_e , respetivamente.



8. Montagem da Matriz de Rigidez e do Vetor de Cargas Globais

Dando um número particular de graus de liberdade e um número de elementos (diga-se a e e , respetivamente), o valor devolvido pela matriz LM é correspondente ao número global das equações, A , isto é

$$A = LM(a, e) = \begin{cases} e & \text{se } a = 1 \\ e + 1 & \text{se } a = 2 \end{cases} \quad (8.1)$$

A matriz completa LM é mostrada na figura seguinte.

		Número de Elementos $1 \leq e \leq n_{el}$								
Número de nós	{	1	1	2	3	...	e	...	$n_{el}-1$	n_{el}
		2	1	2	3	...	e	...	$n-1$	n
Locais	{	2	2	3	4	...	$e+1$...	n	0
		$(n_{en} = 2)$								
		$n_{en} \times n_{el}$								



8. Montagem da Matriz de Rigidez e do Vetor de Cargas Globais

Este é o modo usado para LM ser armazenada no computador. Note que $LM(2, n_e) = 0$. Isso indica que o grau de liberdade 2 do elemento número n_e é prescrito e não é conhecido na equação da matriz global.

Portanto os termos $k_{12}^{n_e}$, $k_{21}^{n_e}$, $k_{22}^{n_e}$, e $f_2^{n_e}$ não são montados em K e F , respetivamente.

Como no exemplo, assume-se querer adicionar a contribuição do e zimo elemento, onde $1 \leq e \leq n_{e-1}$, para K e F parcialmente montados. Da matriz LM, deduz-se o seguinte procedimento de montagem

$$K_{ee} \leftarrow K_{ee} + k_{11}^e \quad (8.2)$$

$$K_{e,e+1} \leftarrow K_{e,e+1} + k_{12}^e \quad (8.3)$$



8. Montagem da Matriz de Rigidez e do Vetor de Cargas Globais

$$K_{e+1,e} \leftarrow K_{e+1,e} + k_{21}^e \quad (8.4)$$

$$K_{e+1,e+1} \leftarrow K_{e+1,e+1} + k_{22}^e \quad (8.5)$$

$$F_e \leftarrow F_e + f_1^e \quad (8.6)$$

$$F_{e+1} \leftarrow F_{e+1} + f_2^e \quad (8.7)$$

onde a seta (\leftarrow) é lida como “é trocado por”.

Devido à simetria k_{21} não precisa ser montado na prática.

Para o elemento n_e tem-se apenas

$$K_{nn} \leftarrow K_{nn} + k_{11}^{n_e} \quad (8.8)$$

$$F_n \leftarrow F_n + f_1^{n_e} \quad (8.9)$$

Com estas ideias, pode-se construir, esboçando um modelo, um algoritmo para montar K e F .



8. Montagem da Matriz de Rigidez e do Vetor de Cargas Globais

Algoritmo

- | Ler dados de entrada
- | Aprontar a matriz LM
- | Coloca os Zeros Armazenados em **K** e **F**
- | $e = 1$
- | repita
 - | Forma \mathbf{k}^e e \mathbf{f}^e .
 - | Usa a matriz LM para adicionar os componente de \mathbf{k}^e e \mathbf{f}^e na
| localização apropriada de **K** e **F**, respectivamente.
 - | $e \leftarrow e + 1$
- | até $e > n_{el}$

Fim Algoritmo



8. Montagem da Matriz de Rigidez e do Vetor de Cargas Globais

A ação do algoritmo de montagem é denotada pelo símbolo U , operador de montagem, isto é,

$$K = \bigcup_{e=1}^{n_e} (k^e) \quad (8.10)$$

$$F = \bigcup_{e=1}^{n_e} (f^e) \quad (8.11)$$



9. Resolução do Sistema de Equações

Os problemas resolvidos pelo Método de Elementos Finitos, resultam em grandes sistemas lineares, com as seguintes representações:

$$a) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou

$$b) \quad A.X = B, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



9. Resolução do Sistema de Equações

onde A é a matriz de coeficientes, B é o vetor de variáveis independentes e X é o vetor das incógnitas.



9. Resolução do Sistema de Equações

Existem vários métodos numéricos para a resolução de um sistema linear. Podem destacar-se as duas classes abaixo, devido à facilidade de implementação computacional e a sua simplicidade matemática:

- Métodos Diretos (Baseados no Escalonamento de Matrizes):
 - Método de Jordan;
 - Método de Gauss;
 - Método da Pivotação Parcial e
 - Método da Pivotação Completa.
- Métodos Iterativos:
 - Método de Jacobi;
 - Método de Gauss-Seidel e
 - Método SOR (Sucessive Over Relaxation).



9. Resolução do Sistema de Equações

Note-se que os métodos iterativos têm a restrição do seu critério de convergência:

$$|a_{ii}| = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$$

Em certos casos extremos pode até usar-se análise de sistemas mal condicionados e refinamento de sistemas lineares.

Além disso, alguns métodos só podem ser aplicados a sistemas especiais como por exemplo o método de Cholesky no qual a matriz A deve ser simétrica.



10. Modelo de Elemento Finito de Barras e Cabos

A equação de movimento que governa a deformação axial de uma barra é

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t) \quad (10.1)$$

Para problemas estáticos esta equação reduz-se a

$$-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad (10.2)$$

Deve ter-se em mente que (10.2) é derivada assumindo que todos os pontos materiais na linha $x=\text{constante}$ (isto é, todos os pontos em qualquer secção transversal) se movem o mesmo valor $u(x)$. Isto é equivalente a dizer que a tensão em qualquer secção transversal é uniforme.



10. Modelo de Elemento Finito de Barras e Cabos

A equação (10.2) é a mesma que a equação do modelo

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) + cu - f = 0 \quad \text{para } 0 < x < L \quad (10.3)$$

com $a=EA$ e $c=0$.

Desta forma, o modelo de elemento finito da barra é

$$0 = \sum_{j=1}^n k_{ij}^e u_{ij}^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.4)$$

onde

$$k_{ij}^e = B^e(N_i^e, N_j^e) = \int_{x_a}^{x_b} \left(a \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + c N_i^e N_j^e \right) dx \quad (10.5)$$

$$f_i^e = \int_{x_a}^{x_b} f N_i^e dx \quad (10.6)$$



10. Modelo de Elemento Finito de Barras e Cabos

A deflexão transversal média $u(x)$ de um cabo feito de material elástico também é governada por uma equação da forma

$$-\frac{d}{dx}\left(T \frac{du}{dx}\right) = f(x) \quad (10.7)$$

onde T é a tensão uniforme no cabo e f é a força transversal distribuída.

Esta equação também é igual a (10.3) com $a=T$ e $c=0$.

Em problemas de mecânica estrutural, o funcional quadrático

$$I^e = \frac{1}{2} B^e(u, u) - l^e(u) = \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_b} \left[a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + cu^2 \right] dx - \int_{x_a}^{x_b} u f dx - u(x_a) Q_1 - u(x_b) Q_2 \quad (10.8)$$

toma o significado especial da energia potencial, Π^e , que pode ser representado na forma



10. Modelo de Elemento Finito de Barras e Cabos

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_b} \varepsilon^T \sigma A_e dx - \int_{x_a}^{x_b} u f dx - \sum_i u_i^e Q_i^e \quad (10.9)$$

onde u é o deslocamento, ε é a extensão e σ é a tensão.

O elemento finito de aproximação de u pode ser escrito como

$$u_h = \left\{ N_1^e \quad N_2^e \quad \dots \quad N_n^e \right\} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ \vdots \\ u_n^e \end{Bmatrix} = N^e u^e \quad (10.10)$$

e as extensões e tensões tomam a forma

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (N^e u^e) \equiv B^e u^e \quad (10.11)$$

$$\sigma = E \varepsilon = E_e B^e u^e \quad (10.12)$$



10. Modelo de Elemento Finito de Barras e Cabos

E a expressão para a energia potencial total fica

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_b} A_e E_e u^T B^T B u dx - \int_{x_a}^{x_b} u^T B^T f dx - u^T Q \quad (10.13)$$

onde o sobrescrito e em B e u é omitido por simplicidade.

Assim, o princípio da energia potencial total mínima, $\delta\Pi^e=0$, resulta no modelo de elemento finito

$$\delta\Pi^e = \delta u^T \left[\left(\int_{x_a}^{x_b} A_e E_e B^T B dx \right) u - \int_{x_a}^{x_b} B^T f dx - Q \right] = 0 \quad (10.14)$$

ou

$$k^e u^e = f^e + Q^e \quad (10.15)$$

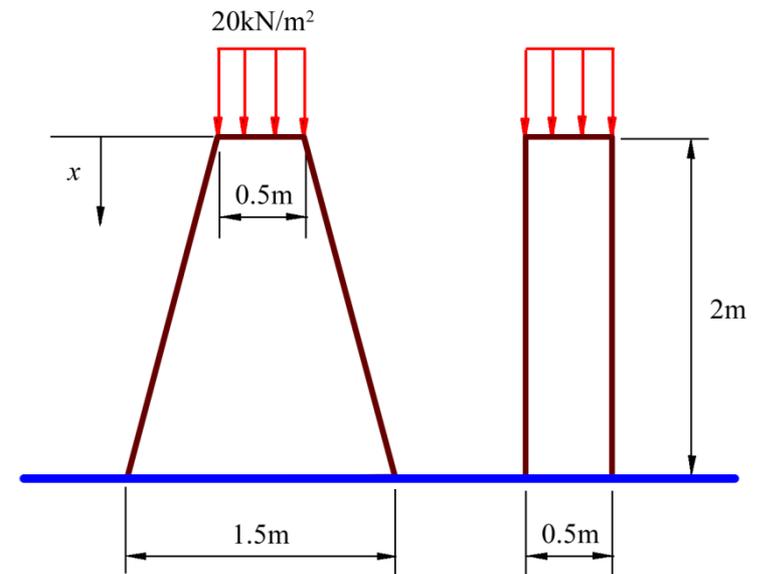
onde

$$k^e = \int_{x_a}^{x_b} A_e E_e B^T B dx, \quad f^e = \int_{x_a}^{x_b} B^T f dx, \quad B = \frac{dN}{dx} \quad (10.16)$$

10. Modelo de Elemento Finito de Barras e Cabos

Exemplo 2.01: Uma ponte é apoiada em vários pilares de betão com a geometria e cargas da figura. O carregamento de 20kN/m^2 representa o peso da ponte e uma distribuição assumida do tráfego da ponte. O peso volúmico do betão é 25kN/m^3 e o seu módulo elástico é $E=28 \times 10^6 \text{N/m}^2$.

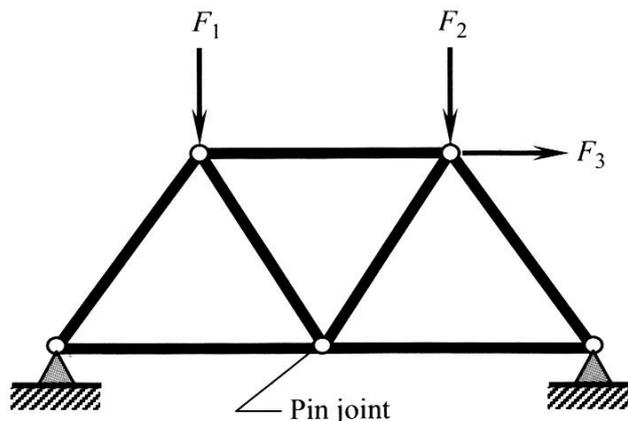
Queremos analisar o pilar para determinar os deslocamentos e as tensões usando o método dos elementos finitos. O pilar é uma estrutura tridimensional mas pode-se aproximar os campos de deformação e de tensão a uma dimensão.



11. Treliça Plana

Considere-se uma estrutura constituída por vários elementos de barra ligados entre si com rótulas, como mostra a figura.

Os membros podem rodar livremente em torno do eixo das rótulas. Desta forma, cada membro suporta apenas forças axiais. A estrutura planar (isto é, todos os membros estão no mesmo plano) com membros ligados por rótulas chama-se treliça plana.



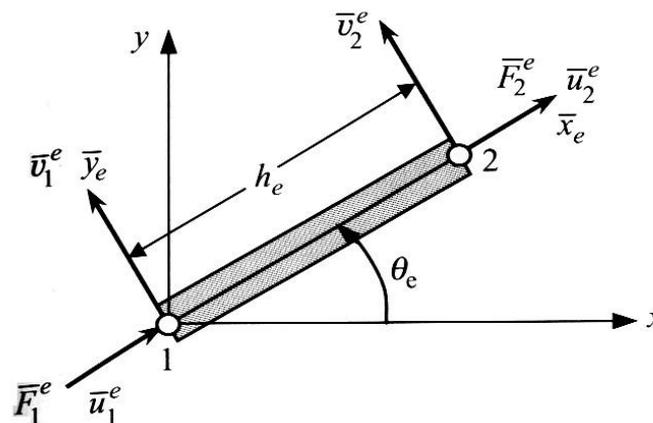
11. Treliça Plana

Uma vez que cada elemento tem uma orientação diferente em relação a um sistema de eixos global (x,y) , é necessário transformar as relações de força/deslocamento derivadas no sistema de coordenadas do elemento (\bar{x},\bar{y}) para o sistema de coordenadas global (x,y) para que a matriz de rigidez da estrutura possa ser montada.

11.1. Elemento Básico da Treliça

Primeiro considera-se um elemento de barra uniforme com a constante EA e orientada com um ângulo θ_e , medido no sentido anti-horário, a partir do eixo x .

Se o sistema coordenado do membro (\bar{x}_e, \bar{y}_e) é como mostrado na figura e $(\bar{u}_i^e, \bar{v}_i^e)$ e $(\bar{F}_i^e, 0)$ representam os deslocamentos e as forças no nó i relativamente ao sistema coordenado (\bar{x}_e, \bar{y}_e) , respetivamente,



11.1. Elemento Básico da Treliça

então, as equações do elemento podem ser escritas (com $\bar{F}_i^e = \bar{Q}_i^e + f_i^e$) na seguinte forma

$$\frac{E_e A_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{v}_1^e \\ \bar{u}_2^e \\ \bar{v}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^e \\ 0 \\ \bar{F}_2^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\bar{k}^e] \{\bar{\Delta}^e\} = \{\bar{F}^e\} \quad (11.1)$$

É desejável escrever as relações força-deslocamento em termos das forças e deslocamentos globais.

Para isso as relações de transformação entre os sistemas coordenados (x, y) e (\bar{x}_e, \bar{y}_e) são

$$\begin{aligned} \bar{x}_e &= x \cos \theta_e + y \sin \theta_e, & \bar{y}_e &= -x \sin \theta_e + y \cos \theta_e \\ x &= \bar{x}_e \cos \theta_e - \bar{y}_e \sin \theta_e, & y &= \bar{x}_e \sin \theta_e + \bar{y}_e \cos \theta_e \end{aligned}$$

11.1. Elemento Básico da Treliça

ou na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_e \\ \bar{y}_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \sin \theta_e \\ -\sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & -\sin \theta_e \\ \sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_e \\ \bar{y}_e \end{Bmatrix} \quad (11.2)$$

onde θ_e é o ângulo formado entre o eixo positivo de x e o eixo positivo de \bar{x}_e , medido no sentido anti-horário.

Note-se que todas as quantidades com barra referem-se ao sistema de coordenadas do membro (ou local) (\bar{x}_e, \bar{y}_e) , enquanto que as quantidades sem barra referem-se ao sistema de coordenadas global (x, y) .

Esta relação também é válida para os deslocamentos e forças dos dois eixos coordenados.

11.1. Elemento Básico da Treliça

Então

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{v}_1^e \\ \bar{u}_2^e \\ \bar{v}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \sin \theta_e & 0 & 0 \\ -\sin \theta_e & \cos \theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_e & \sin \theta_e \\ 0 & 0 & -\sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \end{Bmatrix} \quad (11.3)$$

ou

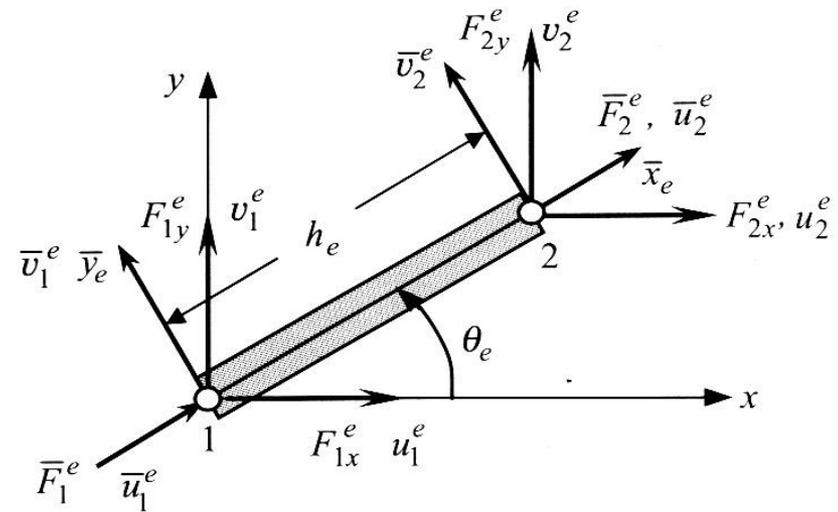
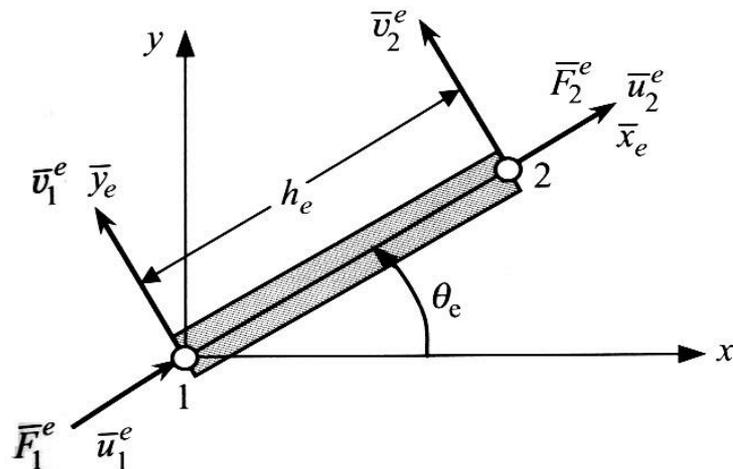
$$\{\bar{\Delta}^e\} = [T^e] \{\Delta^e\} \quad (11.4)$$

onde $\{\bar{\Delta}^e\}$ e $\{\Delta^e\}$ representam o vetor dos deslocamentos nodais no sistema coordenado do membro e da estrutura, respetivamente. De forma similar, tem-se

$$\{\bar{F}^e\} = [T^e] \{F^e\} \quad (11.5)$$

11.1. Elemento Básico da Treliça

Aqui $\{\bar{F}^e\}$ e $\{F^e\}$ representam o vetor das forças nodais no sistema coordenado do membro e da estrutura, respetivamente.



11.2. Elemento Geral da Treliça

Agora derivam-se as relações entre os deslocamentos globais e as forças globais. Usando (11.4) e (11.5) em (11.1) obtém-se

$$[\bar{k}^e][T^e]\{\Delta^e\} = [T^e]\{F^e\} \quad (11.6)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $[T^e]^T$ e atendendo a que $[T^e]^{-1} = [T^e]^T$, tem-se

$$[T^e]^T[\bar{k}^e][T^e]\{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad \text{ou} \quad [k^e]\{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (11.7)$$

onde

$$[k^e] = [T^e]^T[\bar{k}^e][T^e], \quad \{F^e\} = [T^e]^T\{\bar{F}^e\} \quad (11.8)$$



11.2. Elemento Geral da Treliça

Multiplicando estas matrizes, obtém-se

$$[k^e] = \frac{E_e A_e}{h_e} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_e & \frac{1}{2} \sin 2\theta_e & -\cos^2 \theta_e & -\frac{1}{2} \sin 2\theta_e \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta_e & \sin^2 \theta_e & -\frac{1}{2} \sin 2\theta_e & -\sin^2 \theta_e \\ -\cos^2 \theta_e & -\frac{1}{2} \sin 2\theta_e & \cos^2 \theta_e & \frac{1}{2} \sin 2\theta_e \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta_e & -\sin^2 \theta_e & \frac{1}{2} \sin 2\theta_e & \sin^2 \theta_e \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

$$[F^e] = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^e \cos \theta_e \\ \bar{F}_1^e \sin \theta_e \\ \bar{F}_2^e \cos \theta_e \\ \bar{F}_2^e \sin \theta_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_1^e \cos \theta_e \\ \bar{f}_1^e \sin \theta_e \\ \bar{f}_2^e \cos \theta_e \\ \bar{f}_2^e \sin \theta_e \end{Bmatrix} \quad (11.10)$$

11.2. Elemento Geral da Treliça

onde \bar{f}_i^e são calculadas usando

$$\bar{f}_i^e = \int_0^{h_e} f(\bar{x})\psi_i^e(\bar{x})d\bar{x} \quad (11.11)$$

As equações (11.9) e (11.10) dão uma forma para calcular a matriz de rigidez do elemento $[k^e]$ e o vetor de força $\{F^e\}$, respetivamente, ambas referentes ao sistema de coordenadas globais de um elemento de barra com um ângulo θ_e .

A montagem dos elementos com as respetivas matrizes de rigidez e vetores de força nas coordenadas globais segue a mesma ideia já descrita anteriormente mas tendo em atenção que agora cada nó tem dois graus de liberdade de deslocamento.

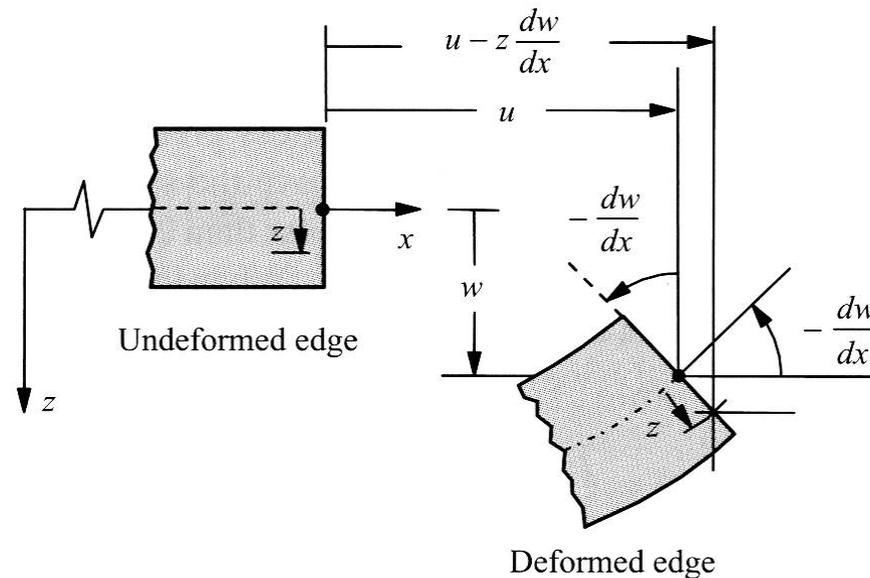
12. Vigas e Pórticos

Vamos considerar a formulação do elemento finito de equações diferenciais de quarta ordem unidimensional que aparece na teoria da viga de Euler Bernoulli. A sobreposição dos elementos de viga e de barra dá origem ao elemento de pórtico que pode ser usado para analisar estruturas em pórtico plano.

A formulação de uma equação de quarta ordem envolve os mesmos passos necessários para a formulação de uma equação de segunda ordem, mas os detalhes matemáticos são diferentes, especialmente na formulação da equação do elemento finito.

12.1. Elemento de Viga de Euler-Bernoulli

A teoria de Euler-Bernoulli de vigas é baseada no pressuposto que secções transversais planas permanecem planas e normais ao eixo longitudinal após a flexão. Este pressuposto resulta numa extensão de corte transversal nula.



12.1.1. Equação de Governo

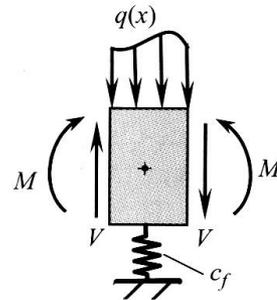
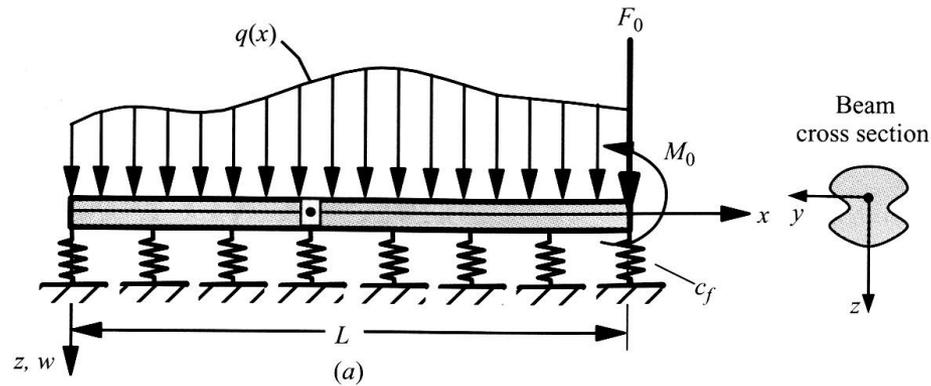
Nesta teoria, a deflexão transversal w da viga é governada pela equação diferencial de quarta ordem

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + c_f w = q(x) \quad \text{para } 0 < x < L \quad (12.1)$$

onde $EI = E(x)I(x)$, $c_f = c_f(x)$, $q = q(x)$ são funções dadas de x e w é a variável dependente. E é o módulo de elasticidade, I é o segundo momento de área em torno do eixo y da viga, q é a carga transversal distribuída, c_f é o módulo de apoios elásticos (se existirem) e w é a deflexão transversal da viga.

A convenção dos sinais usada para derivar a equação (12.1) está mostrada na figura seguinte.

12.1.1. Equação de Governo



Forces and their interrelationships at a point in the beam

$$-\frac{dV}{dx} + c_f w = q, \quad -\frac{dM}{dx} + V = 0, \quad M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

(b)

12.1.1. Equação de Governo

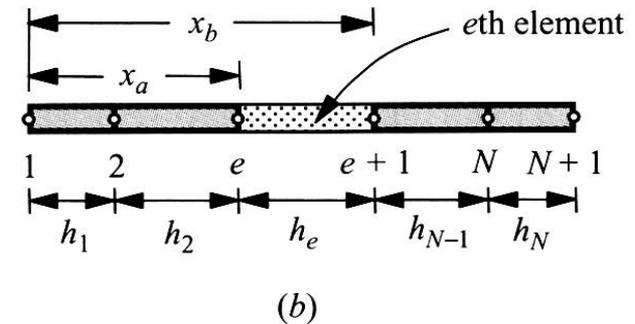
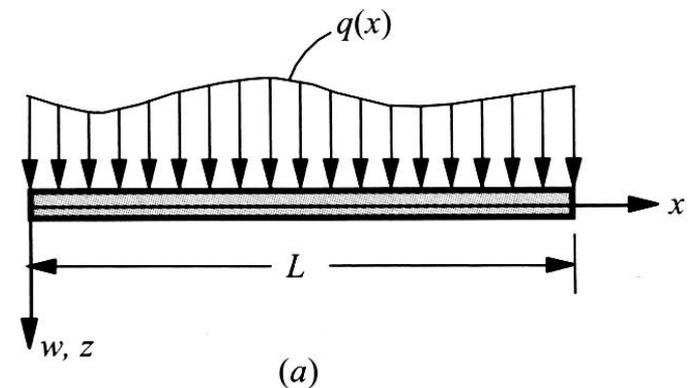
Para além de satisfazer a equação diferencial (12.1), w também tem que satisfazer as condições de fronteira apropriadas. Uma vez que a equação é de quarta ordem, são necessárias quatro condições de fronteira para resolvê-la.

A forma fraca da equação vai fornecer a forma destas quatro condições de fronteira.

Seguidamente apresenta-se o procedimento passo a passo para a análise do elemento finito.

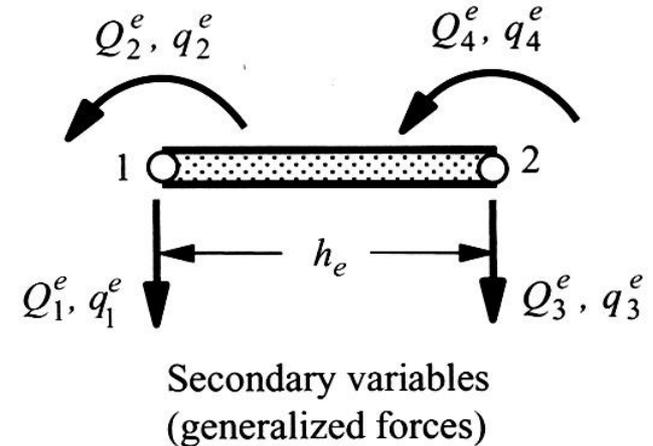
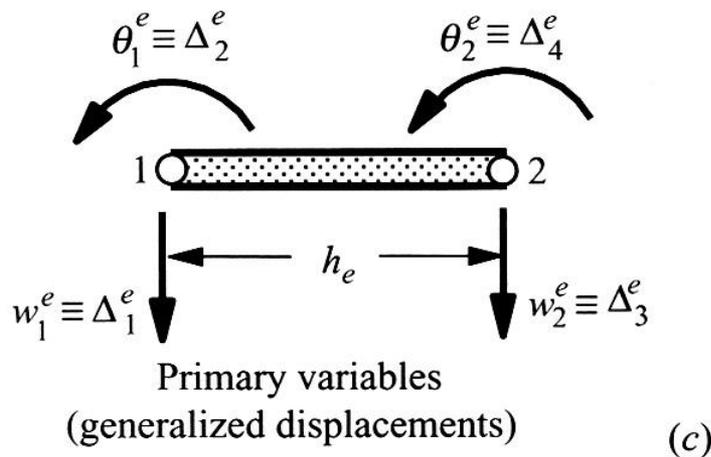
12.1.2. Discretização do Domínio

O domínio da viga reta é dividido num conjunto de N elementos de linha, cada um com pelo menos dois nós nas extremidades. Apesar do elemento ser geometricamente igual ao elemento da barra, o número e a forma das incógnitas primárias e secundárias em cada nó são ditadas pela formulação variacional da equação diferencial (12.1).



12.1.2. Discretização do Domínio

Na maior parte dos problemas práticos, a discretização de uma dada estrutura num elemento mínimo de elementos é frequentemente ditada pela geometria, carregamento e propriedades do material.





12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Isolando um elemento típico $\Omega_e = (x_a, x_b) = (x_e, x_{e+1})$ pode construir-se a forma fraca desse elemento.

A formulação variacional disponibiliza as variáveis primárias e secundárias do problema. Depois, aproximações adequadas para as variáveis primárias podem ser selecionadas, as funções de interpolação são desenvolvidas e as equações do elemento são derivadas.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Forma Fraca

A forma fraca em problemas de Mecânica dos Sólidos pode ser derivada a partir do princípio do trabalho virtual ou a partir da equação diferencial de governo.

Vamos usar a equação diferencial e aplicar o procedimento de três passos para obter a forma fraca.

Uma vez que a equação contém uma derivada de quarta ordem, é necessário integrá-la por partes duas vezes para distribuir igualmente as derivadas pela variável dependente w e a função de ponderação v . Neste caso v tem que ser diferenciável duas vezes e satisfazer a forma homogénea das condições de fronteira essenciais.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Multiplicando (12.1) por v , integrando duas vezes por partes o primeiro termo em x , obtém-se

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} v \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + c_f w - q \right] dx \\
 &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[-\frac{dv}{dx} \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + c_f v w - v q \right] dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_e}^{x_{e+1}} \\
 &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} + c_f v w - v q \right) dx + \left[v \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{dv}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right]_{x_e}^{x_{e+1}}
 \end{aligned} \tag{12.2}$$

Neste caso, o primeiro termo é integrado duas vezes por partes para dar uma segunda derivada da função de ponderação v e manter a segunda derivada da variável dependente w .



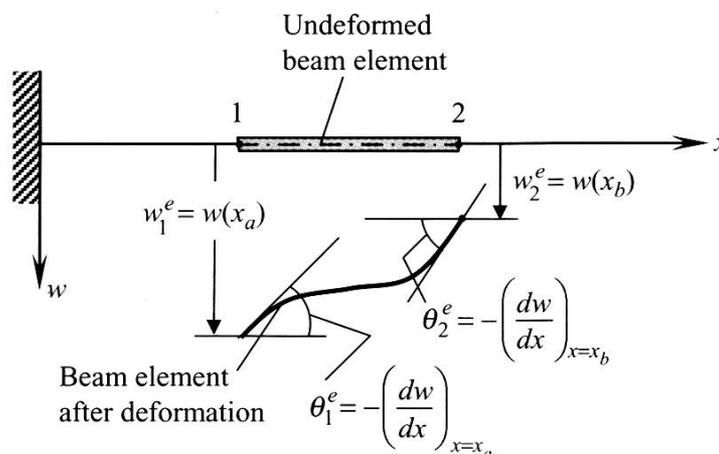
12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Devido às duas integrações por partes, obtém-se duas expressões de contorno, que devem ser avaliadas nos dois pontos de contorno $x=x_a=x_e$ e $x=x_b=x_{e+1}$.

Examinando os termos de contorno pode ver-se que as condições de fronteira essenciais envolvem a especificação da deflexão w e o declive dw/dx , e as condições de fronteira naturais envolvem a especificação do momento fletor $EI d^2w/dx^2$ e a força de corte $(d/dx)(EI d^2w/dx^2)$ nos pontos extremos do elemento.

12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Assim, existem duas condições de fronteira essenciais e duas naturais. Logo, é preciso identificar w e dw/dx como as variáveis primárias em cada nó (para que as condições de fronteira essenciais possam ser incluídas na interpolação).



As condições de fronteira naturais permanecem sempre na forma fraca e ficam no lado direito $\{F^e\}$ da equação matricial.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

A notação seguinte para as variáveis secundárias é introduzida de forma consistente com a convenção de sinais ($\theta = -dw/dx$)

$$\begin{aligned} Q_1^e &\equiv \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_e} = -V(x_e) \\ Q_2^e &\equiv \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x_e} = -M(x_e) \\ Q_3^e &\equiv \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right]_{x_{e+1}} = -V(x_{e+1}) \\ Q_4^e &\equiv \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big|_{x_{e+1}} = -M(x_{e+1}) \end{aligned} \tag{12.3}$$

onde Q_1^e e Q_3^e são forças de corte e Q_2^e e Q_4^e são momentos fletores.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

O conjunto $\{Q_1^e, Q_2^e, Q_3^e, Q_4^e\}$ é frequentemente referido como as forças generalizadas. Os deslocamentos e rotações correspondentes são chamados de deslocamentos generalizados. Com a notação de (12.3), a forma fraca (12.2) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} + c_f v w - v q \right) dx \\
 &\quad - v(x_e) Q_1^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_{e+1}} Q_4^e \\
 &\equiv B(v, w) - l(v)
 \end{aligned} \tag{12.4}$$



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Podem identificar-se as formas bi-lineares e lineares do problema

$$B(v, w) = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} + c_f v w \right) dx$$
$$l(v) = \int_{x_e}^{x_{e+1}} v q dx - v(x_e) Q_1^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_e} Q_2^e - v(x_{e+1}) Q_3^e - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x_{e+1}} Q_4^e \quad (12.5)$$

A equação (12.4) é uma definição do princípio dos deslocamentos virtuais (onde v representa os deslocamentos virtuais δw) para a teoria da viga de Euler-Bernoulli.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

O funcional quadrático, conhecido como a energia potencial total do elemento de viga isolado, é dado por

$$\begin{aligned} \Pi_e(w) = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + \frac{1}{2} c_f w^2 - wq \right] dx - w(x_e)Q_1^e - w(x_{e+1})Q_3^e \\ - \left(-\frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x_e} Q_2^e - \left(-\frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x_{e+1}} Q_4^e \end{aligned} \quad (12.6)$$

O primeiro termo nos parênteses reto representa a energia de extensão elástica devido à flexão, o segundo termo é a energia de extensão da fundação elástica e o terceiro termo é o trabalho realizado pelo carregamento distribuído. Os restantes termos têm em conta o trabalho realizado pelas forças generalizadas Q_i^e ao longo dos respetivos deslocamentos generalizados do elemento.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Ao contrário, pode ir-se do funcional da energia potencial total (12.6) para a forma fraca (12.4) usando o princípio da energia potencial mínima, $\delta\Pi^e=0$.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Funções de Interpolação

A forma variacional (12.4) requer que as funções de interpolação de um elemento sejam contínuas e com derivadas diferentes de zero até à segunda ordem.

A aproximação de $w_h^e(x)$ de $w(x)$ ao longo do elemento finito tem que ser tal que seja diferenciável duas vezes e que satisfaça as propriedades de interpolação, isto é, que satisfaça as seguintes “condições de fronteira” essenciais do elemento

$$w_h^e(x_e) = w_1^e, \quad w_h^e(x_{e+1}) = w_2^e, \quad \theta_h^e(x_e) = \theta_1^e, \quad \theta_h^e(x_{e+1}) = \theta_2^e \quad (12.7)$$

Ao satisfazer as condições de fronteira essenciais (12.7), a aproximação satisfaz automaticamente as condições de continuidade.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

As condições (12.7) têm que ser satisfeitas e formam a base para a derivação das funções de aproximação do elemento de viga de Euler-Bernoulli.

Uma vez que existe um total de quatro condições num elemento (duas por nó), é necessário usar um polinómio de quatro parâmetros para w_h^e :

$$w(x) \approx w_h^e(x_e) = c_1^e + c_2^e x + c_3^e x^2 + c_4^e x^3 \quad (12.8)$$

Note-se que as condições de continuidade, isto é, a existência de segundas derivadas de w_h^e diferentes de zero no elemento, são cumpridas automaticamente.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

O passo seguinte envolve representar c_j^e em termos das variáveis primárias (deslocamentos generalizados)

$$\Delta_1^e \equiv w_h^e(x_e), \quad \Delta_2^e \equiv -\left. \frac{dw_h^e}{dx} \right|_{x=x_e}, \quad \Delta_3^e \equiv w_h^e(x_{e+1}), \quad \Delta_4^e \equiv -\left. \frac{dw_h^e}{dx} \right|_{x=x_{e+1}}$$

de forma que as condições (12.7) são satisfeitas

$$\begin{aligned} \Delta_1^e &\equiv w_h^e(x_e) &&= c_1^e + c_2^e x_e + c_3^e x_e^2 + c_4^e x_e^3 \\ \Delta_2^e &\equiv -\left. \frac{dw_h^e}{dx} \right|_{x=x_e} &&= -c_2^e - 2c_3^e x_e - 3c_4^e x_e^2 \\ \Delta_3^e &\equiv w_h^e(x_{e+1}) &&= c_1^e + c_2^e x_{e+1} + c_3^e x_{e+1}^2 + c_4^e x_{e+1}^3 \\ \Delta_4^e &\equiv -\left. \frac{dw_h^e}{dx} \right|_{x=x_{e+1}} &&= -c_2^e - 2c_3^e x_{e+1} - 3c_4^e x_{e+1}^2 \end{aligned}$$



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

ou

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1^e \\ \Delta_2^e \\ \Delta_3^e \\ \Delta_4^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_e & x_e^2 & x_e^3 \\ 0 & -1 & -2x_e & -3x_e^2 \\ 1 & x_{e+1} & x_{e+1}^2 & x_{e+1}^3 \\ 0 & -1 & -2x_{e+1} & -3x_{e+1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1^e \\ c_2^e \\ c_3^e \\ c_4^e \end{Bmatrix} \quad (12.9)$$

Invertendo esta equação matricial para representar c_i^e em termos de Δ_1^e , Δ_2^e , Δ_3^e e Δ_4^e , e substituindo o resultado em 12.8, obtém-se

$$w_h^e(x_e) = \Delta_1^e \phi_1^e + \Delta_2^e \phi_2^e + \Delta_3^e \phi_3^e + \Delta_4^e \phi_4^e = \sum_{i=1}^4 \Delta_i^e \phi_i^e \quad (12.10)$$



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

onde (com $x_{e+1}=x_e+h_e$)

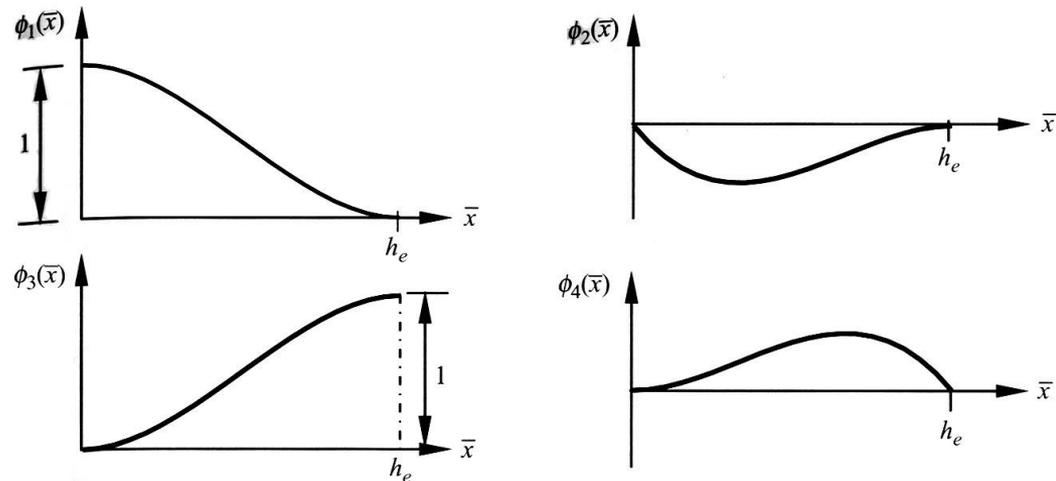
$$\begin{aligned}\phi_1^e &= 1 - 3\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^3 \\ \phi_2^e &= -(x-x_e)\left(1 - \frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 \\ \phi_3^e &= 3\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^3 \\ \phi_4^e &= -(x-x_e)\left[\left(\frac{x-x_e}{h_e}\right)^2 - \frac{x-x_e}{h_e}\right]\end{aligned}\tag{12.11}$$

Note-se que as funções de interpolação cúbica em (12.11) são derivadas através da interpolação de w e de dw/dx nos nós.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Estes polinómios são conhecidos como família Hermite de funções de interpolação e ϕ_i^e em (12.11) são chamados de funções de interpolação cúbica de Hermite (ou splines cúbicas). Representações das funções de interpolação cúbica de Hermite são mostradas na figura.





12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Convém relembrar que as funções de interpolação cúbica de Lagrange são obtidas para interpolar uma função nos nós mas não as suas derivadas. Assim, um elemento cúbico de Lagrange terá quatro nós, com a variável dependente, não a sua derivada, como o grau de liberdade nodal.

Uma vez que o declive da variável dependente também tem que ser contínua nos nós para a teoria de viga de Euler-Bernoulli, a interpolação cúbica de Lagrange de w , apesar de cumprir os requisitos de continuidade para w , não é admissível na aproximação do elemento finito da teoria da viga de Euler-Bernoulli.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

As funções de interpolação ϕ_i^e podem ser expressas em termos da coordenada local $\bar{x}=x-x_e$

$$\begin{aligned}\phi_1^e &= 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 \\ \phi_2^e &= -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 \\ \phi_3^e &= 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 \\ \phi_4^e &= -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right]\end{aligned}\tag{12.12}$$



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

As primeiras derivadas de ϕ_i^e em termos de \bar{x} são

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1^e}{d\bar{x}} &= -\frac{6}{h_e} \frac{\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right) \\ \frac{d\phi_2^e}{d\bar{x}} &= -\left[1 + 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - 4\frac{\bar{x}}{h_e}\right] \\ \frac{d\phi_3^e}{d\bar{x}} &= -\frac{d\phi_1^e}{d\bar{x}} = \frac{6}{h_e} \frac{\bar{x}}{h_e} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right) \\ \frac{d\phi_4^e}{d\bar{x}} &= -\frac{\bar{x}}{h_e} \left(3\frac{\bar{x}}{h_e} - 2\right)\end{aligned}\tag{12.13a}$$



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

As segundas derivadas de ϕ_i^e em termos de \bar{x} são

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi_1^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{6}{h_e^2} \left(1 - 2\frac{\bar{x}}{h_e}\right) \\ \frac{d^2\phi_2^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{2}{h_e} \left(3\frac{\bar{x}}{h_e} - 2\right) \\ \frac{d^2\phi_3^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{d^2\phi_1^e}{d\bar{x}^2} = \frac{6}{h_e^2} \left(1 - 2\frac{\bar{x}}{h_e}\right) \\ \frac{d^2\phi_4^e}{d\bar{x}^2} &= -\frac{2}{h_e} \left(3\frac{\bar{x}}{h_e} - 1\right)\end{aligned}\tag{12.13b}$$



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

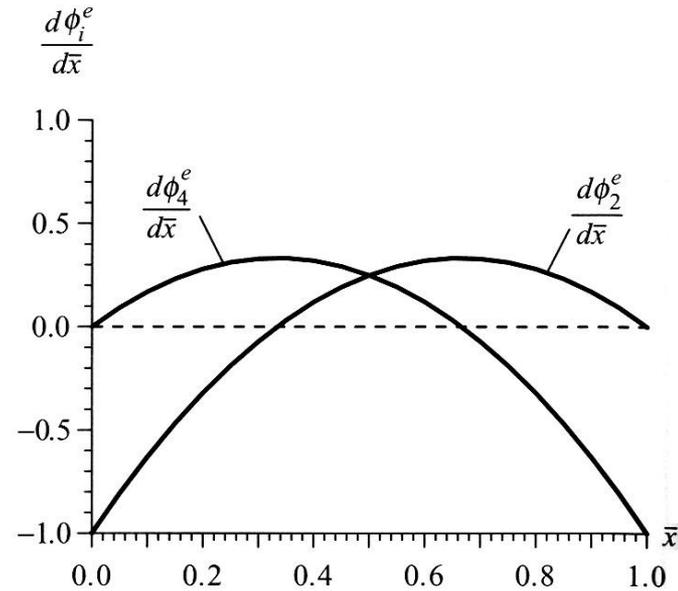
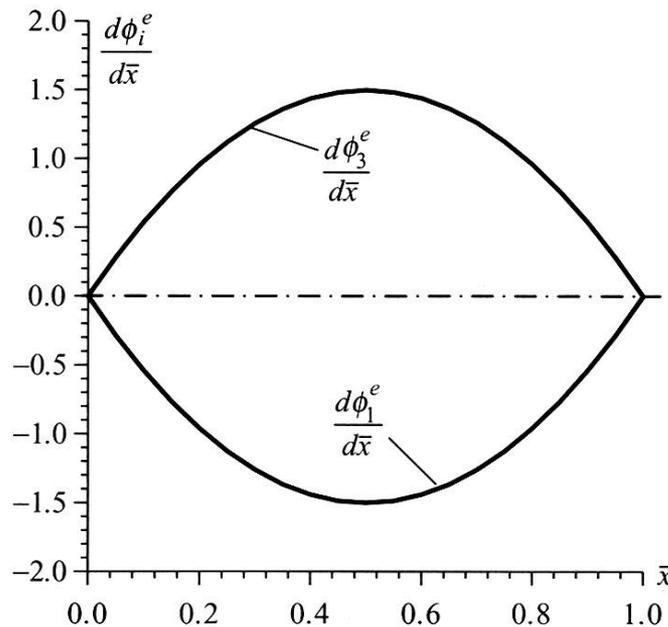
As terceiras derivadas de ϕ_i^e em termos de \bar{x} são

$$\begin{aligned}\frac{d^3 \phi_1^e}{d\bar{x}^3} &= \frac{12}{h_e^3} \\ \frac{d^3 \phi_2^e}{d\bar{x}^3} &= -\frac{6}{h_e^2} \\ \frac{d^3 \phi_3^e}{d\bar{x}^3} &= -\frac{12}{h_e^3} \\ \frac{d^3 \phi_4^e}{d\bar{x}^3} &= -\frac{6}{h_e^2}\end{aligned}\tag{12.13c}$$



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Gráficos de $d\phi_i^e/dx$ são mostrados na figura





12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

As funções de interpolação cúbica de Hermite (12.11) e (12.12) satisfazem as seguintes propriedades de interpolação

$$\begin{aligned} \phi_1^e(x_e) &= 1, & \phi_i^e(x_e) &= 0 \quad (i \neq 1) \\ \phi_3^e(x_{e+1}) &= 1, & \phi_i^e(x_{e+1}) &= 0 \quad (i \neq 3) \\ \left. \left(-\frac{d\phi_2^e}{dx} \right) \right|_{x_e} &= 1, & \left. \left(-\frac{d\phi_i^e}{dx} \right) \right|_{x_e} &= 0 \quad (i \neq 2) \\ \left. \left(-\frac{d\phi_4^e}{dx} \right) \right|_{x_{e+1}} &= 1, & \left. \left(-\frac{d\phi_i^e}{dx} \right) \right|_{x_{e+1}} &= 0 \quad (i \neq 4) \end{aligned} \quad (12.14a)$$

Estas condições podem ser escritas na forma compacta ($i, j=1, 2$)

$$\begin{aligned} \phi_{2i-1}^e(\bar{x}_j) &= \delta_{ij}, & \phi_{2i}^e(\bar{x}_j) &= 0, & \sum_{i=1}^2 \phi_{2i-1}^e &= 1 \\ \left. \left(\frac{d\phi_{2i-1}^e}{dx} \right) \right|_{\bar{x}_j} &= 0, & \left. \left(-\frac{d\phi_{2i}^e}{dx} \right) \right|_{\bar{x}_j} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (12.14b)$$



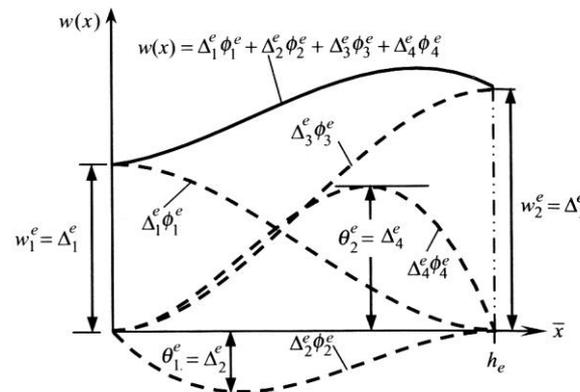
12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

onde $x_1=0$ e $x_2=h_e$ são as coordenadas locais dos nós 1 e 2 do elemento $\Omega_e=(x_e, x_{e+1})$.

A solução de elementos finitos

$$w_h^e(x) = \Delta_1^e \phi_1^e(x) + \Delta_2^e \phi_2^e(x) + \Delta_3^e \phi_3^e(x) + \Delta_4^e \phi_4^e(x)$$

é uma combinação linear de quatro termos, mostrados na figura seguinte juntamente com a própria função





12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Deve notar-se que a ordem das funções de interpolação derivadas acima é a mínima necessária para a formulação variacional de (12.4). Se uma aproximação de ordem superior (superior à cúbica) for desejada para w , é necessário identificar outras incógnitas primárias em cada um dos dois nós ou adicionar outros nós com os dois graus de liberdade ($w, -dw/dx$).

Por exemplo, se adicionarmos d^2w/dx^2 como a incógnita primária em cada nó ou adicionarmos um terceiro nó com ($w, -dw/dx$), vão existir um total de seis condições e será necessário um polinómio de quinta ordem para interpolar as condições dos extremos.

No entanto, a continuidade de d^2w/dx^2 (curvatura) entre elementos não é necessária pela forma fraca.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Modelo do Elemento Finito

O modelo do elemento finito da viga de Euler-Bernoulli é obtido através da substituição da interpolação do elemento finito (12.10) para w e de ϕ_j^e para a função de ponderação v na forma fraca (12.4).

Uma vez que existem quatro variáveis nodais Δ_i^e , são usadas quatro opções diferentes para v ($v = \phi_1^e, \phi_2^e, \phi_3^e, \phi_4^e$) permitindo a obtenção de quatro equações algébricas.

A equação algébrica i para o modelo de elemento finito é (para $v = \phi_i^e$)

$$0 = \sum_{j=1}^4 \left[\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(EI \frac{d^2 \phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j^e}{dx^2} + c_f \phi_i^e \phi_j^e \right) dx \right] u_j^e - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e q dx - Q_i^e \quad (12.15a)$$



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

ou

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e \Delta_j^e - F_i^e = 0 \quad \text{ou} \quad [K^e] \{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (12.15b)$$

onde

$$K_{ij}^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(EI \frac{d^2 \phi_i^e}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j^e}{dx^2} + c_f \phi_i^e \phi_j^e \right) dx \quad (12.16a)$$

$$F_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e q dx + Q_i^e \quad (12.16b)$$

Note-se que os coeficientes K_{ij}^e são simétricos: $K_{ij}^e = K_{ji}^e$.



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Na forma de matriz (12.5b) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{23}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1^e \\ \Delta_2^e \\ \Delta_3^e \\ \Delta_4^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \\ q_3^e \\ q_4^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{Bmatrix} \quad (12.17)$$

Isto representa o modelo de elemento finito de (12.1). Para o caso em que EI e q são constantes ao longo do elemento, a matriz de rigidez $[K^e]$ e o vetor de força $\{F^e\}$ ficam com a forma seguinte

$$[K^e] = \frac{2E_e I_e}{h_e^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & 2h_e^2 & 3h_e & h_e^2 \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix} + \frac{c_f^e h_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22h_e & 54 & 13h_e \\ -22h_e & 4h_e^2 & -13h_e & -3h_e^2 \\ 54 & -13h_e & 156 & 22h_e \\ 13h_e & -3h_e^2 & 22h_e & 4h_e^2 \end{bmatrix}$$

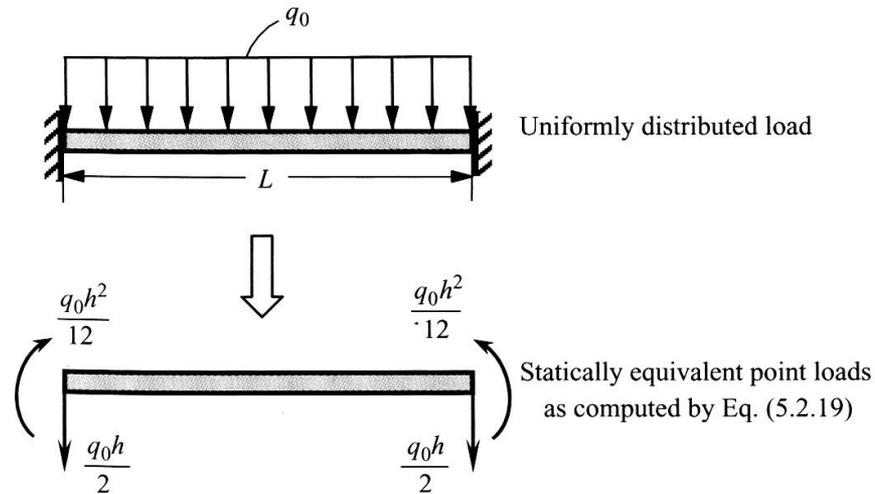


12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

$$\{F^e\} = \frac{q_e h_e}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h_e \\ 6 \\ h_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \quad (12.18)$$

Pode ser verificado que o vetor de forças generalizadas em (12.18) representa as forças e os momentos nos nós 1 e 2 “estaticamente equivalentes” devido à carga distribuída uniforme de intensidade q_e ao longo do elemento como mostra a figura seguinte.

12.1.3. Derivação das Equações do Elemento



Para qualquer função $d(x)$ dada, (12.16b) permite uma forma simples de calcular as componentes do vetor de forças generalizadas $\{q^e\}$

$$q_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e q dx \quad (12.19)$$



12.1.3. Derivação das Equações do Elemento

Quando uma força transversal pontual F_0^e é aplicada num ponto x_0 dentro do elemento, ela é distribuída pelos nós do elemento pela seguinte relação

$$q_i^e = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e F_0^e \delta(x - x_0) dx = F_0^e \phi_i^e(x_0), \quad x_e \leq x_0 \leq x_{e+1} \quad (12.20)$$

Que contém tanto forças transversais (q_1^e e q_3^e) como momentos fletores (q_2^e e q_4^e).



12.1.4. Montagem das Equações dos Elementos

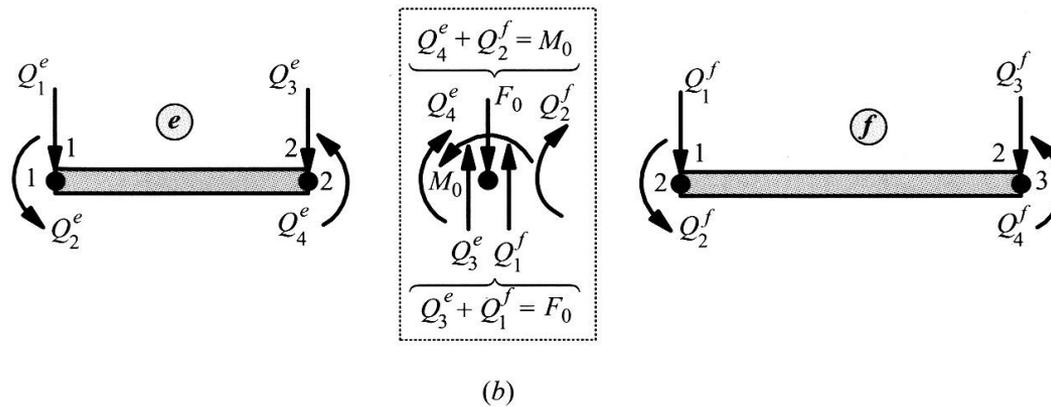
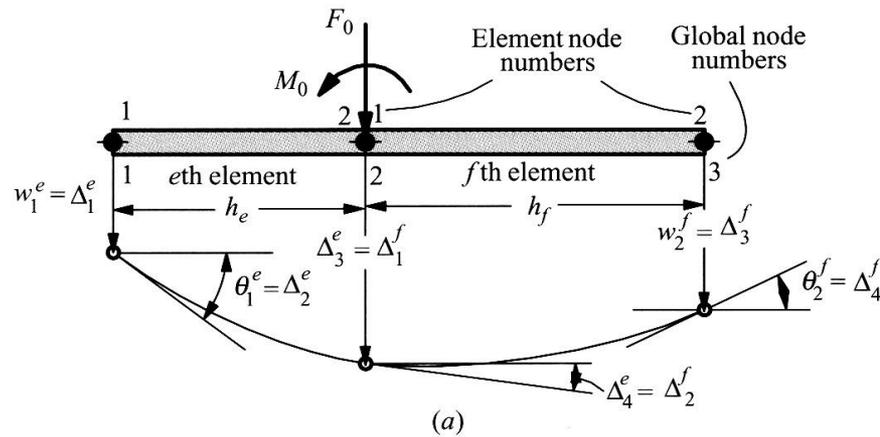
O processo de montagem para os elementos de viga é o mesmo que o usado para os elementos de barra com a particularidade de agora se terem dois graus de liberdade em cada um dos nós. Convém relembrar que a montagem dos elementos é baseado em:

- a) Continuidade nas variáveis primárias (deflexão e rotação) entre elementos;
- b) Equilíbrio das variáveis secundárias (força de corte e momento fletor) entre elementos.

Para demonstrar o procedimento de montagem, vamos usar um modelo de dois elementos como mostra a figura seguinte.



12.1.4. Montagem das Equações dos Elementos





12.1.4. Montagem das Equações dos Elementos

Existem três nós globais e um total de seis deslocamentos generalizados globais e seis forças generalizadas no problema. A continuidade das variáveis primárias implica a seguinte relação entre os graus de liberdade Δ_j^e do elemento e os graus de liberdade U_j globais.

$$\begin{aligned}\Delta_1^1 &= U_1, & \Delta_2^1 &= U_2, & \Delta_3^1 &= \Delta_1^2 = U_3 \\ \Delta_4^1 &= \Delta_2^2 = U_4, & \Delta_3^2 &= U_5, & \Delta_4^2 &= U_6\end{aligned}\tag{12.21}$$

Em geral, o equilíbrio das forças generalizadas num nó entre dois elementos ligados Ω_e e Ω_f requer que

$$\begin{aligned}Q_3^e + Q_1^f &= \text{força externa pontual aplicada} \\ Q_4^e + Q_2^f &= \text{momento fletor externo aplicada}\end{aligned}\tag{12.22}$$



12.1.4. Montagem das Equações dos Elementos

Se não existirem forças externas aplicadas a soma deve ser zero. Quando se fazem as somas das forças generalizadas (forças e momentos) a convenção de sinais para os graus de liberdade do elemento deve ser seguida. As forças são positivas quando atuam na direção positiva de z e os momentos são positivos quando seguem a regra da mão direita (quando o polegar está alinhado com o sentido positivo de y , os quatro dedos mostram o sentido positivo).

De acordo com o sistema coordenado das segunda e terceira figuras, as forças viradas para baixo são positivas e os momentos no sentido anti-horário são positivos.



12.1.4. Montagem das Equações dos Elementos

Para impor o equilíbrio das forças (12.22), é necessário adicionar a terceira e quarta equações (correspondentes ao segundo nó) do elemento Ω_e à primeira e segunda equações (correspondentes ao primeiro nó) do elemento Ω_f .

Consequentemente, os parâmetros de rigidez global K_{33} , K_{34} , K_{43} e K_{44} associados ao segundo nó são a sobreposição dos valores de rigidez do elemento

$$\begin{aligned} K_{33} &= K_{33}^1 + K_{11}^2 \\ K_{34} &= K_{34}^1 + K_{12}^2 \\ K_{43} &= K_{43}^1 + K_{21}^2 \\ K_{44} &= K_{44}^1 + K_{22}^2 \end{aligned} \tag{12.23}$$



12.1.4. Montagem das Equações dos Elementos

Em geral, a matriz de rigidez montada de elementos de viga ligados em série tem a seguinte forma

$$\begin{array}{c}
 \text{nó global 1} \qquad \qquad \text{nó global 2} \qquad \qquad \text{nó global 3} \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & & \\
 K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & & \\
 K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\
 K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\
 & & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\
 & & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 \left. \vphantom{\begin{matrix} K_{11}^1 \\ K_{21}^1 \\ K_{31}^1 \\ K_{41}^1 \end{matrix}} \right\} 1 \\
 \left. \vphantom{\begin{matrix} K_{33}^1 + K_{11}^2 \\ K_{43}^1 + K_{21}^2 \\ K_{31}^2 \\ K_{41}^2 \end{matrix}} \right\} 2 \\
 \left. \vphantom{\begin{matrix} K_{33}^2 \\ K_{43}^2 \\ K_{33}^2 \\ K_{43}^2 \end{matrix}} \right\} 3
 \end{array} \quad (12.24a)
 \end{array}$$



12.1.4. Montagem das Equações dos Elementos

Em geral, o vetor de forças generalizadas montado de elementos de viga ligados em série tem a seguinte forma

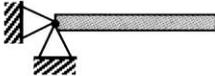
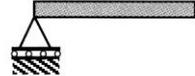
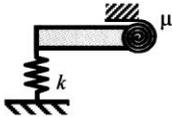
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 + q_1^2 \\ q_4^1 + q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix} \quad (12.24b)$$



12.1.5. Imposição das Condições de Fronteira

Nesta fase da análise, é necessário impor as condições de fronteira particulares do problema em estudo. O tipo das condições de fronteira essenciais (também conhecidas por geométricas) para um problema de viga em particular depende da natureza do apoio geométrico.

A tabela seguinte mostra uma lista de suportes geométricos de vigas comumente utilizados.

Type of support	Displacement boundary conditions	Force boundary conditions
Free 	None	All, as specified
Pinned 	$u = 0$ $w = 0$	Moment is specified
Roller (vertical) 	$u = 0$	Transverse force and moment are specified
Roller (horizontal) 	$w = 0$	Horizontal force and bending moment are specified
Fixed (or clamped) 	$u = 0$ $w = 0$ $dw/dx = 0$	None specified
Elastically restrained 	$EI(d^2w/dx^2) + \mu\theta = M_0, M_0$ specified	$EI(d^3w/dx^3) + kw = Q_0, Q_0$ specified



12.1.5. Imposição das Condições de Fronteira

As condições de fronteira naturais (também conhecidas por forças) envolvem a especificação das forças generalizadas quando as variáveis primárias correspondentes não estão constrangidas.

É necessário ter em conta que apenas um elemento de cada um dos seguintes pares tem que ser especificado em todos os nós da malha do elemento

$$\left(w, \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] \right), \left(\frac{dw}{dx}, EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (12.25)$$

Num nó interior, impõe-se a continuidade dos deslocamentos e o equilíbrio das forças generalizadas de (12.21) e (12.22).



12.1.5. Imposição das Condições de Fronteira

Existem duas formas alternativas para a inclusão do efeito de uma mola elástica linear (de extensão ou de torção)

- 1) Incluir a mola através da condição de fronteira para o grau de liberdade apropriado;
- 2) Incluir a mola como outro elemento finito, cujas equações de elemento são dadas por

$$k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^e \\ \delta_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix}$$

No primeiro caso, depois da montagem das equações do elemento, a variável secundária na direção da ação da mola é substituída pelo negativo da constante da mola multiplicada pela variável primária correspondente.



12.1.5. Imposição das Condições de Fronteira

Se Q^v e Q^θ representam as variáveis secundárias associadas com os graus de liberdade transversal e rotacional no nó, então, tem-se, respetivamente

$$Q^v + kw = 0 \quad \text{ou} \quad Q^v = -kw \quad \text{para mola vertical com constante } k$$

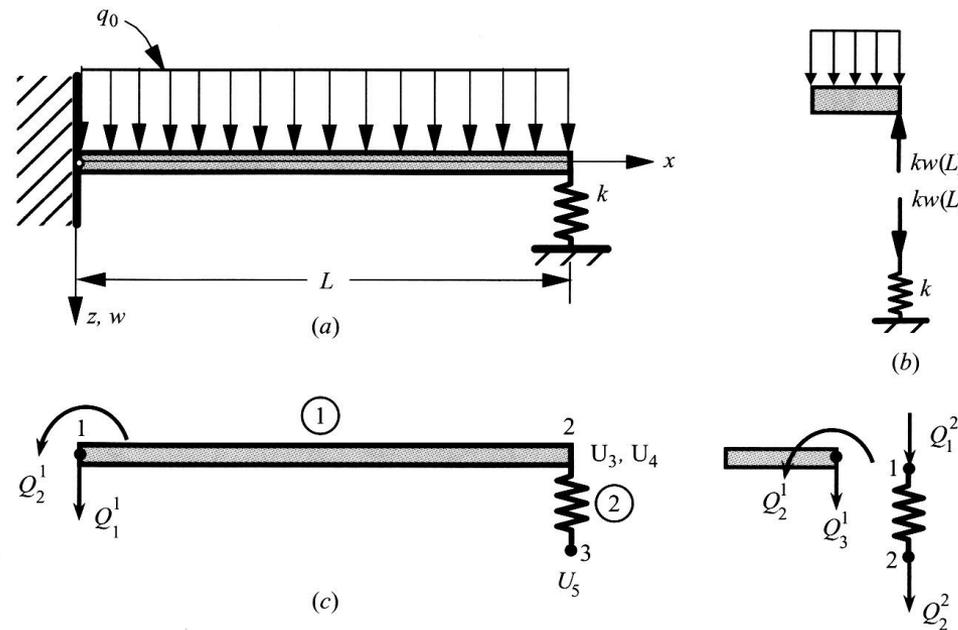
$$Q^\theta + \mu\theta = 0 \quad \text{ou} \quad Q^\theta = -\mu\theta \quad \text{para mola torsional com constante } \mu$$

Notar que Q^v é uma força de corte e que Q^θ é um momento fletor.

No segundo caso, o elemento de mola pode ser montado juntamente com os elementos de viga tendo em atenção que o deslocamento axial da mola é o mesmo que o deslocamento transversal da viga.

12.1.5. Imposição das Condições de Fronteira

Por exemplo, considere-se o caso de uma viga encastrada no lado esquerdo e suportada por uma mola na ponta direita, como mostra a figura.





12.1.5. Imposição das Condições de Fronteira

Usando um modelo de um elemento da viga, obtém-se , com $c_f=0$ em (12.18),

$$\frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{q_0L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -L \\ 6 \\ L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}$$

As condições de fronteira óbvias são $U_1=U_2=Q_4=0$. O efeito da mola é exercer uma força kU_3 para cima na viga. Assim, $Q_3=-kU_3$.

Desta forma tem-se

$$\frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{q_0L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -L \\ 6 \\ L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ -kU_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



12.1.5. Imposição das Condições de Fronteira

A forma condensada das equações para os deslocamentos desconhecidos U_3 (deflexão) e U_4 (rotação)

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} + k & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \frac{q_0 L}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ L \end{Bmatrix}$$

cuja solução é

$$U_3 = w(L) = \frac{q_0 L^4}{8EI} \frac{1}{\left(1 + \frac{kL^3}{3EI}\right)}, \quad U_4 = \theta(L) = -\frac{q_0 L^3}{6EI} \frac{\left(EI + \frac{kL^3}{24}\right)}{\left(EI + \frac{kL^3}{3}\right)}$$



12.1.5. Imposição das Condições de Fronteira

Note-se que quando $k=0$, obtém-se a deflexão e rotação

$$U_3 = w(L) = \frac{q_0 L^4}{8EI}, \quad U_4 = \theta(L) = -\frac{q_0 L^3}{6EI}$$

na ponta livre da viga encastrada com uma carga uniformemente distribuída de intensidade q_0 .

Quando k tende para infinito, obtém-se

$$U_3 = 0, \quad U_4 = \theta(L) = -\frac{q_0 L^3}{48EI}$$

em $x=L$ (onde tem apoio simples).