



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR  
Covilhã | Portugal

# Instabilidade Estrutural

Estruturas Aeroespaciais I (10362)

2021

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais

# Tópicos

- Contextualização do problema em estruturas aeronáuticas
- Instabilidade em colunas e vigas
- Efeito de imperfeições iniciais
- Aspectos de projeto

# 1. Introdução

Grande parte dos componentes usados em estruturas aeronáuticas têm um valor de comprimento axial significativamente superior à sua secção transversal.



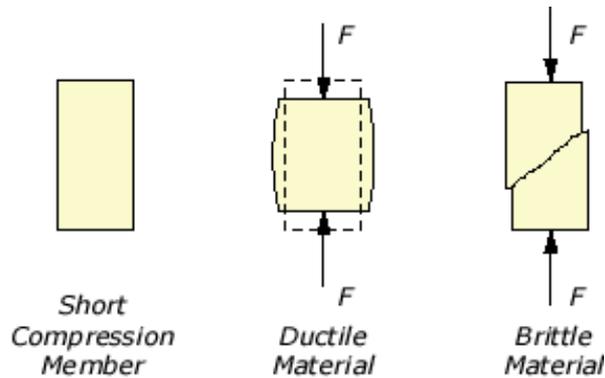
Maior probabilidade de falha por *instabilidade estrutural* (buckling)

Outros termos possíveis: *flambagem, encurvadura, varejamento...*

# 1. Introdução

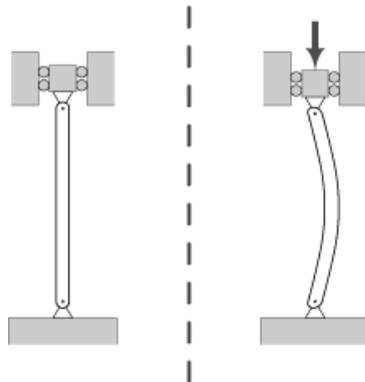
Quando um componente está sujeito a cargas diretas de compressão podem acontecer dois tipos de mecanismos de falha:

1)



*Deformação por esforços de compressão*

2)



*Instabilidade*



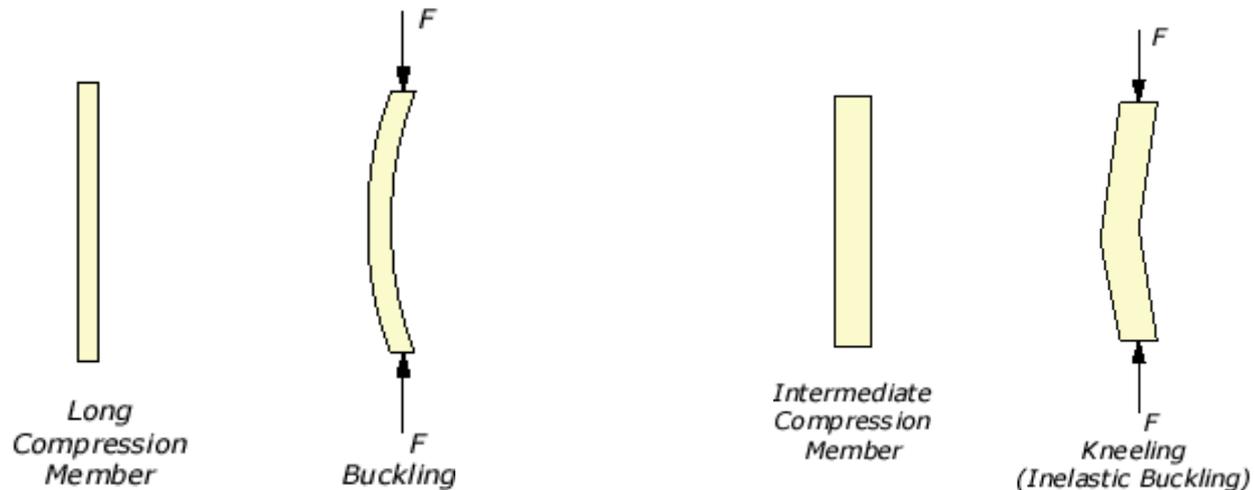


# 1. Introdução

- Quando um componente estrutural com um comprimento elevado e secção transversal reduzida (logo possuindo segundos momentos de área reduzidos) está sujeito a cargas de compressão (ou flexão composta), este poderá encurvar com cargas muito inferiores às que levariam à falha do componente se este tivesse a mesma secção mas um comprimento inferior;
- A tensão de carregamento para ocorrência de instabilidade estrutural é, pois, quase sempre inferior à tensão de cedência do material;
- Para estes casos, o tipo de geometria e a rigidez do componente assumem uma importância significativa;

# 1. Introdução

- A instabilidade estrutural ocorre frequentemente para tensões de carregamento dentro do limite elástico do material. No entanto, no caso de materiais dúcteis, a falha por instabilidade pode ocorrer no domínio plástico;



# 1. Introdução

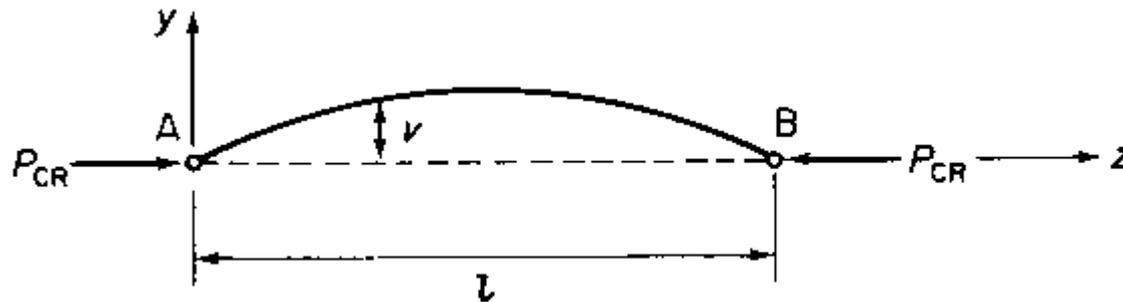
- Existem dois tipos de instabilidade estrutural: primária e secundária.
- A instabilidade primária ocorre quando a deformação do componente (encurvadura) tem uma dimensão na ordem de grandeza do comprimento do componente → **colunas sólidas e com parede de espessura apreciável;**
- A instabilidade secundária leva a alterações da secção transversal do componente, ocorrendo deformações na ordem de grandeza da sua área transversal → **colunas de parede fina ou placas finas com elementos de reforço;**

## 2. Instabilidade elástica

No caso de componentes que sofram de instabilidade elástica, pode recorrer-se à teoria proposta por Euler em 1744.

Considere-se a coluna AB da *figura 5.01* sujeita a uma carga  $P$  coincidente com a carga crítica ( $P_{CR}$ ) correspondente à situação de instabilidade.

Assume-se, pois, que estamos perante uma condição de equilíbrio neutro.



**Figura 5.01** Viga esbelta sujeita a uma carga de compressão.

## 2. Instabilidade elástica

Usando a teoria da flexão pura vista nos capítulos anteriores:

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -M \Leftrightarrow EI \frac{d^2 v}{dz^2} = -P_{CR} v \quad (5.01)$$

Rearranjando esta equação, tem-se

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P_{CR}}{EI} v = 0 \quad (5.02)$$

A solução da equação diferencial anterior é do tipo

$$v = A \cos \mu z + B \sin \mu z \quad (5.03)$$

com

$$\mu^2 = \frac{P_{CR}}{EI} \quad (5.04)$$

## 2. Instabilidade elástica

Recorrendo às condições de fronteira podemos determinar as constantes  $A$  e  $B$ .

Neste caso, constatamos que  $v=0$  para  $z=0$  e  $z=l$ .

Portanto

$$A = 0 \quad ; \quad B \sin \mu l = 0 \quad (5.05)$$

Para o caso de uma solução não trivial (i.e., para  $\mu \neq 0$ ), obtém-se

$$\sin \mu l = 0 \quad \text{ou} \quad \mu l = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.06)$$

Da definição do parâmetro  $\mu$ , facilmente se conclui que

$$\sqrt{\frac{P_{CR}}{EI}} l = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## 2. Instabilidade elástica

Logo

$$P_{CR} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (5.07)$$

Da equação (5.07) vemos que o menor valor de carregamento para o qual ocorre a condição de instabilidade verifica-se para  $n=1$ , pelo que

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (5.08)$$



*Fórmula de Euler*

Outros valores de  $n$  levarão a diferentes modos de instabilidade, como os representados na figura seguinte.

## 2. Instabilidade elástica

Estes modos podem ser produzidos aplicando constrangimentos externos em diferentes posições do componente, de modo a impedir o seu deslocamento lateral.

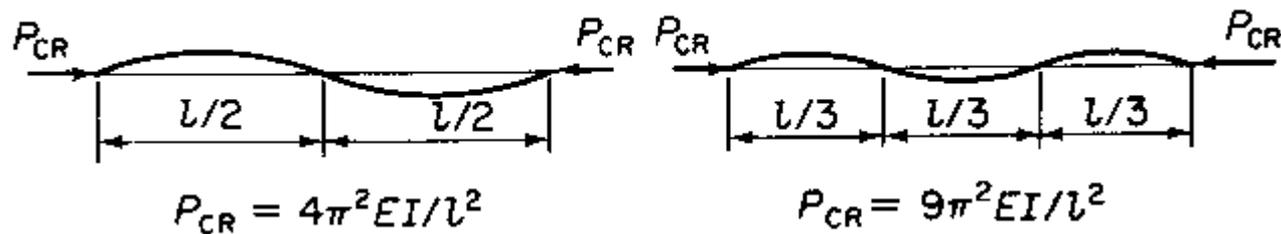


Figura 5.02 Segundo e terceiro modos de instabilidade.

## 2. Instabilidade elástica

O valor da tensão crítica para ocorrência de instabilidade pode ser obtido através da Eq. (5.08) e, lembrando que o raio de giração de uma secção é dado por  $r=(I/A)^{1/2}$ ,

$$\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 EAr^2}{Al^2} \Leftrightarrow \sigma_{CR} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} \quad (5.09)$$

O termo  $l/r$  é conhecido como índice de esbeltez do componente.

No caso da secção transversal do componente não ser duplamente simétrica, então a tensão crítica de instabilidade deverá ser calculada para o menor valor de raio de giração.

Neste caso, a deformação ocorrerá para um plano perpendicular em relação ao eixo correspondente a esse raio de giração.

## 2. Instabilidade elástica

Note-se que as Eqs. (5.08) e (5.09) foram obtidas para uma coluna com as duas extremidades articuladas, o que corresponde a uma combinação de condições de fronteira.

Estas equações podem, no entanto, ser adaptadas a outros tipos de condições de extremidade.

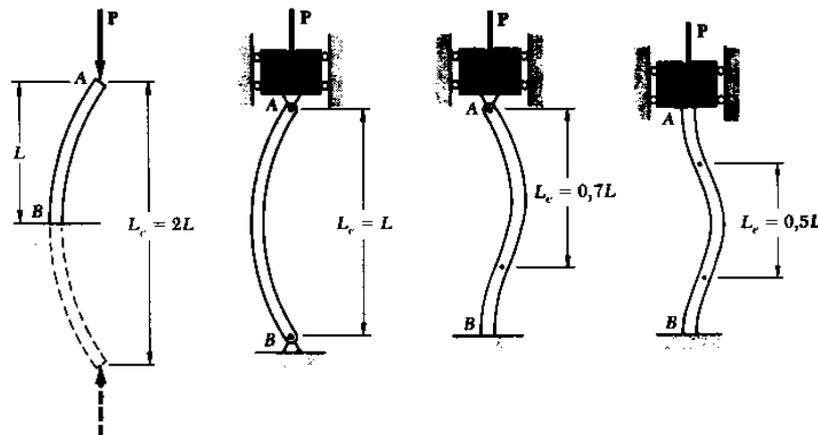
Para tal, considere-se um comprimento efectivo  $l_e$  que corresponde à dimensão de um componente com as suas extremidades articuladas possuindo uma carga crítica idêntica à de um outro componente com diferentes condições de extremidade.

$$\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 E}{(l_e/r)^2} \quad \text{e} \quad P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} \quad (5.10)$$

# 2. Instabilidade elástica

A tabela abaixo fornece a solução em termos de comprimento efetivo do componente para as condições de extremidade mais comuns:

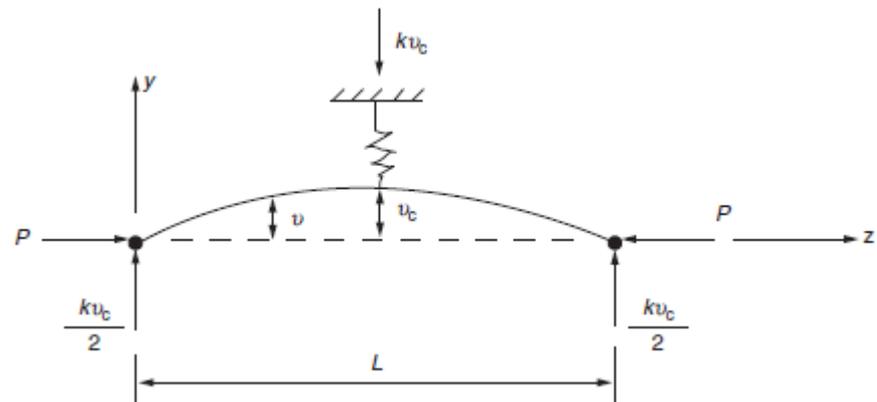
Ends	$l_e/l$	Boundary conditions
Both pinned	1.0	$v = 0$ at $z = 0$ and $l$
Both fixed	0.5	$v = 0$ at $z = 0$ and $z = l$ , $dv/dz = 0$ at $z = l$
One fixed, the other free	2.0	$v = 0$ and $dv/dz = 0$ at $z = 0$
One fixed, the other pinned	0.6998	$dv/dz = 0$ at $z = 0$ , $v = 0$ at $z = l$ and $z = 0$



## 2. Instabilidade elástica

**Exemplo 5.01:** Uma viga uniforme de comprimento  $L$  e rigidez à flexão  $EI$  tem apoios simples nas suas extremidades e tem um apoio elástico no seu centro. Neste apoio desenvolve-se uma força restauradora  $kv_c$  para um deslocamento local  $v_c$ . Derive uma equação para a carga de instabilidade da coluna. Se a carga de instabilidade for  $4\pi^2 EI/L^2$ , determine o valor de  $k$ . Se o apoio elástico for infinitamente rígido, mostre que a carga de instabilidade é dada pela equação  $\tan(\lambda L/2) = \lambda L/2$ , onde  $\lambda = \sqrt{P/(EI)}$ .

**Figura 5.03** Coluna do exemplo 5.01.



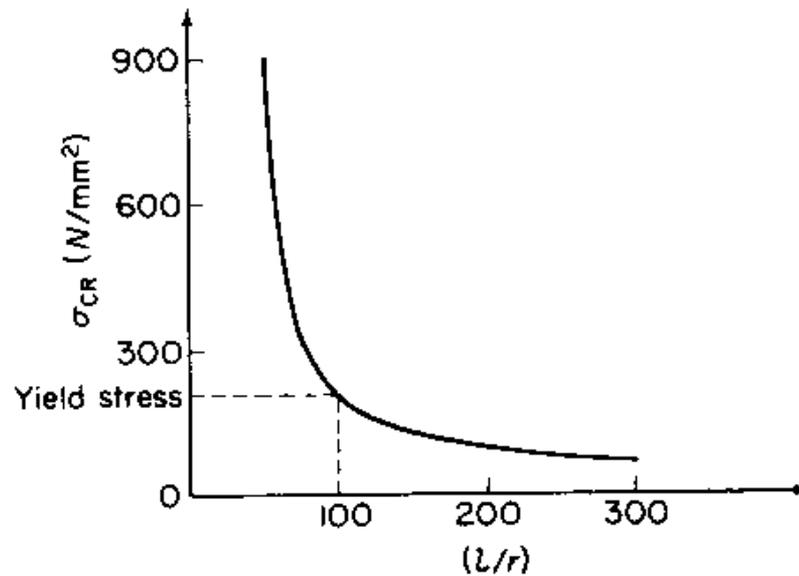
# 3. Instabilidade plástica

Concluimos da Eq. (5.10) que a tensão crítica depende do módulo elástico do material e do índice de esbeltez do componente.

Por isso, para um dado tipo de material, o valor da tensão crítica aumenta à medida que diminuimos o índice de esbeltez (i.e., à medida que o componente fica mais curto e largo). Eventualmente, poder-se-á atingir o limite de cedência do material, passando-se para o regime plástico.

# 3. Instabilidade plástica

A figura seguinte representa esta variação para um aço de média dureza.



**Figura 5.04** Tensão crítica de instabilidade em função do índice de esbeltez para uma coluna em aço.

# 3. Instabilidade plástica

Torna-se, portanto, necessário desenvolver teorias para a determinação das cargas críticas de instabilidade no domínio plástico.

Existem alguns métodos aplicáveis a casos de instabilidade plástica.

Os mais conhecidos são as teorias do Módulo-Tangente e do Módulo-Reduzido.

### 3. Instabilidade plástica

## 3.1. Módulo-Tangente

Neste caso, a tensão crítica  $\sigma_t$  ultrapassa o limite de proporcionalidade do material ( $\sigma_{pl}$ ).

A partir deste ponto, o módulo de elasticidade ( $E_t$ ) passa a ser obtido através da tangente à curva de carregamento.

Substituindo valores na fórmula de Euler

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{l_e^2} \quad \text{e} \quad \sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{(l_e/r)^2} \quad (5.11)$$

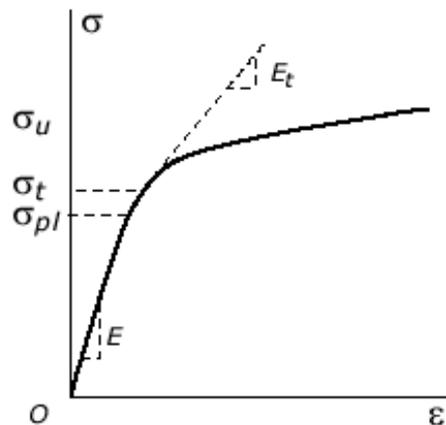


Figura 5.05 Módulo elástico tangente.

### 3. Instabilidade plástica

## 3.2. Módulo-Reduzido

Esta é uma teoria alternativa que fornece valores para a condição crítica de instabilidade recorrendo a um valor corrigido do módulo de elasticidade, a que se chama *módulo reduzido* ( $E_r$ ).

Este valor é dado por

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \quad (5.12)$$

Logo

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{l_e^2} \quad \text{e} \quad \sigma_r = \frac{\pi^2 E_r}{(l_e/r)^2} \quad (5.13)$$

## 4. Efeito de imperfeições iniciais

Na prática é impossível obterem-se colunas perfeitamente retas e homogéneas e garantir que sejam carregadas exatamente de forma axial.

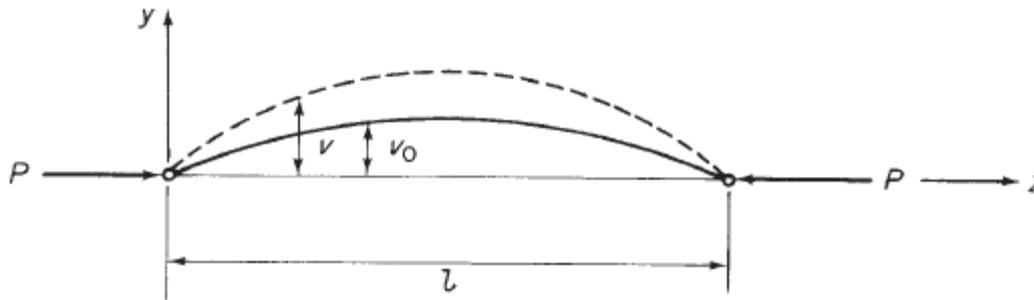
Uma viga mais realista pode ser fletida com uma carga com algum grau de desalinhamento.

Estas imperfeições da coluna influenciam grandemente o seu comportamento que, ao contrário de uma coluna perfeita, começa a fletir logo que a carga axial é aplicada.

Vamos supor que uma coluna, inicialmente fletida, é sujeita a uma carga axial crescente  $P$  como mostra a *figura 5.06*.

Neste caso, o momento fletor em qualquer ponto é proporcional à mudança de curvatura da coluna a partir da sua flexão inicial.

# 4. Efeito de imperfeições iniciais



**Figura 5.06** Coluna com flexão inicial.

Assim,

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} - EI \frac{d^2 v_0}{dz^2} = -Pv \quad (5.14)$$

que depois de reorganizar dá

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 v = \frac{d^2 v_0}{dz^2} \quad (5.15)$$

## 4. Efeito de imperfeições iniciais

onde  $\lambda^2 = P/EI$ .

A deflexão final,  $v$ , da coluna depende da sua forma sem a carga,  $v_0$ .

Assumindo que

$$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi z}{l} \quad (5.16)$$

e substituindo na equação (5.15), tem-se

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 v = -\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n \sin \frac{n\pi z}{l}$$

A solução geral desta equação é

$$v = B \cos \lambda z + D \sin \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{n^2 - \alpha} \sin \frac{n\pi z}{l}$$

## 4. Efeito de imperfeições iniciais

onde  $B$  e  $D$  são constantes de integração e  $\alpha = \lambda^2 l^2 / \pi^2$ .

As condições de fronteira são  $v=0$  para  $z=0$  e  $z=l$ , logo  $B=D=0$ .

Daqui

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{n^2 - \alpha} \sin \frac{n\pi z}{l} \quad (5.17)$$

Note-se que, em contraste com a coluna perfeita, pode obter-se uma solução não trivial para a deflexão.

Isto era de esperar pois a coluna está em equilíbrio estável na sua posição defletida para todos os valores de  $P$ .

Uma forma alternativa para  $\alpha$  é

$$\alpha = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI} = \frac{P}{P_{CR}}$$

## 4. Efeito de imperfeições iniciais

Da expressão anterior vê-se que  $\alpha$  é sempre menor do que 1 e que se aproxima de 1 quando  $P$  se aproxima de  $P_{CR}$  pelo que o primeiro termo da equação (5.17), para  $n=1$ , domina o valor da solução da série.

Assim, uma boa aproximação para a solução da deflexão quando a carga axial está próxima da carga crítica é

$$v = \frac{A_1}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi z}{l} \quad (5.18)$$

ou no centro da coluna onde  $z=l/2$

$$v = \frac{A_1}{1 - P/P_{CR}} \quad (5.19)$$

onde  $A_1$  é a deflexão central inicial.

## 4. Efeito de imperfeições iniciais

Se as deflexões centrais  $\delta(=v-A_1)$  forem medidas a partir da posição defletida inicial, então da equação (5.19) obtém-se

$$\frac{A_1}{1 - P/P_{CR}} - A_1 = \delta$$

que, depois de reorganizar, dá

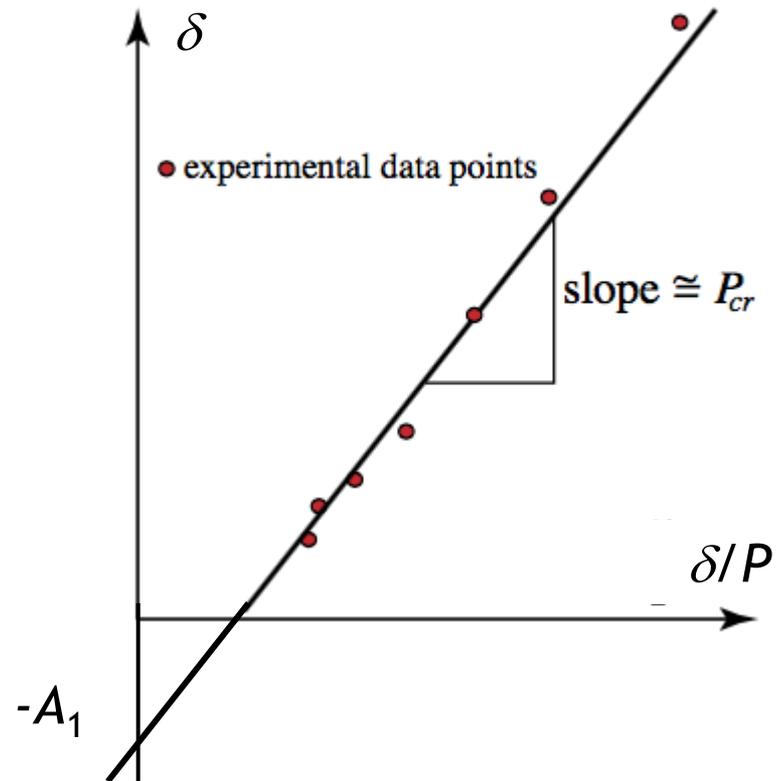
$$\delta = P_{CR} \frac{\delta}{P} - A_1 \quad (5.20)$$

Pode ver-se que um gráfico de  $\delta$  em função de  $\delta/P$ , tem um declive, na região da carga crítica, igual a  $P_{CR}$  e que a interseção com o eixo vertical é igual à deflexão inicial central.

Esta curva representa a curva de *Southwell* para a determinação experimental da instabilidade elástica de colunas imperfeitas.

# 4. Efeito de imperfeições iniciais

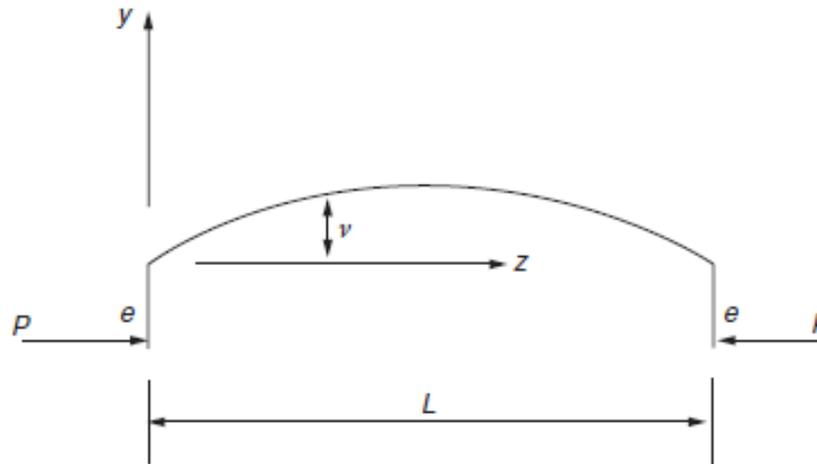
Na figura 5.07 pode ver-se uma curva de Southwell típica.



**Figura 5.07** Curva de Southwell  
(*Southwell plot*).

## 4. Efeito de imperfeições iniciais

**Exemplo 5.02:** A coluna da *figura 5.08* com apoios de rótula nas suas extremidades suporta uma carga de compressão  $P$  aplicada a uma distância  $e$  do eixo da coluna. Determine o momento fletor máximo na coluna.



**Figura 5.08** Coluna com carga excêntrica do *exemplo 5.02*.



# 5. Estabilidade de vigas com cargas transversais e axiais

As tensões e as deflexões numa viga elástica sujeita a cargas transversais são proporcionais ao carregamento aplicado, quando estimadas com a teoria de vigas simples.

Essas relações são válidas para deflexões pequenas, quando as alterações geométricas sofridas pela viga têm um efeito insignificante no carregamento aplicado.

Esta **situação altera-se** quando **existem em simultâneo forças axiais aplicadas**.

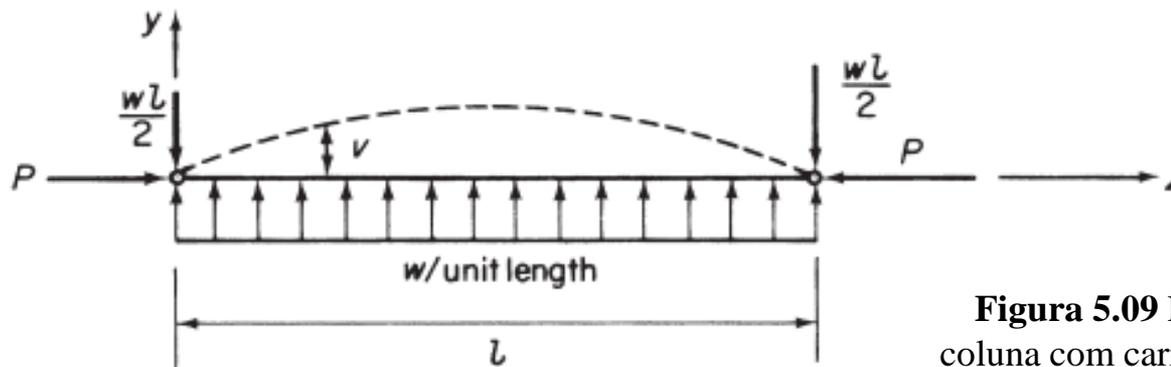
Os momentos, as forças de corte, as tensões e as deflexões internas tornam-se dependentes da magnitude das deflexões para além da magnitude do carregamento externo.

Aqueles também dependem de imperfeições da viga.

# 5. Estabilidade de vigas com cargas transversais e axiais

Considere-se o caso de uma viga com apoios de rótula nas extremidades sujeita a um carregamento transversal uniformemente distribuído  $w$  e a uma força axial  $P$ .  
O momento fletor numa secção qualquer da viga é

$$M = Pv + \frac{wlz}{2} - \frac{wz^2}{2} = -EI \frac{d^2v}{dz^2}$$



**Figura 5.09** Flexão de uma vigacoluna com carregamento distribuído.



# 5. Estabilidade de vigas com cargas transversais e axiais

o que dá

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{wl}{2EI}(z^2 - lz) \quad (5.21)$$

A solução desta equação diferencial é

$$v = A \cos \lambda z + B \sin \lambda z + \frac{w}{2P} \left( z^2 - lz - \frac{2}{\lambda^2} \right)$$

onde  $A$  e  $B$  são as constantes de integração e

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

Usando as condições de fronteira  $v=0$  para  $z=0$  e  $z=l$  tem-se

$$A = \frac{w}{\lambda^2 P} \quad ; \quad B = \frac{w}{\lambda^2 P \sin \lambda l} (1 - \cos \lambda l)$$



# 5. Estabilidade de vigas com cargas transversais e axiais

A deflexão para qualquer valor de  $w$  e  $P$  é, então,

$$v = \frac{w}{\lambda^2 P} \left[ \cos \lambda z + \left( \frac{1 - \cos \lambda l}{\sin \lambda l} \right) \sin \lambda z \right] + \frac{w}{2P} \left( z^2 - lz - \frac{2}{\lambda^2} \right) \quad (5.22)$$

Nesta caso, a deflexão máxima da viga ocorre no seu centro

$$v_{\max} = \frac{w}{\lambda^2 P} \left( \sec \frac{\lambda l}{2} - 1 \right) - \frac{wl^2}{8P} \quad (5.23)$$

O momento fletor máximo correspondente é

$$M_{\max} = -Pv_{\max} - \frac{wl^2}{8}$$

ou, da equação (5.23),

$$M_{\max} = \frac{w}{\lambda^2} \left( 1 - \sec \frac{\lambda l}{2} \right) \quad (5.24)$$



# 5. Estabilidade de vigas com cargas transversais e axiais

Pode escrever-se a equação (5.24) em termos da força crítica de Euler,  $P_{CR} = \pi^2 EI / l^2$ , para uma coluna com rótulas nas extremidades.

Assim,

$$M_{\max} = \frac{wl^2}{\pi^2} \frac{P_{CR}}{P} \left[ 1 - \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{CR}}} \right) \right] \quad (5.25)$$

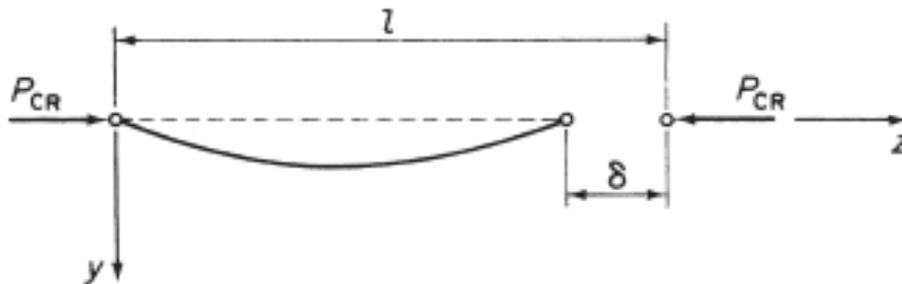
À medida que  $P$  se aproxima de  $P_{CR}$ , o momento fletor e a deflexão tendem para infinito ( $-\infty$ ).

No entanto, esta teoria baseia-se no pressuposto de deflexões pequenas (em caso contrário  $d^2v/dz^2$  não é uma boa aproximação para a curvatura), pelo que tal dedução é inválida.

Verifica-se, sim, a existência de grandes deflexões na presença de forças compressivas para quaisquer forças transversais.

# 6. Método de Energia - Cargas de Intabilidade em Colunas

O facto da energia potencial total de um corpo elástico possuir um valor estacionário no estado de equilíbrio pode ser usado para investigar o equilíbrio neutro de uma coluna flambada. Em particular, o método da energia é muito útil quando a forma da deflexão da coluna não é conhecida. Considere-se a coluna com rótulas nas extremidades na posição flambada mostrada na *figura 5.10*.



**Figura 5.10** Redução do comprimento de uma viga devido à instabilidade.



# 6. Método de Energia - Cargas de Intabilidade em Colunas

A energia de extensão interna  $U$  da coluna é assumida como sendo resultado apenas da ação de flexão e é dada pela expressão

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz \quad (5.26)$$

ou, uma vez que  $EI d^2v/dz^2 = -M$ ,

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2v}{dz^2} \right)^2 dz \quad (5.27)$$

A energia potencial da força  $P_{CR}$ , correspondente ao trabalho por ela realizado, é

$$V = -P_{CR} \delta \quad (5.28)$$

onde  $\delta$  é o deslocamento axial de  $P_{CR}$  causado pela flexão da coluna.



# 6. Método de Energia - Cargas de Intabilidade em Colunas

Sabendo que

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz \quad (5.29)$$

então,

$$V = -\frac{P_{CR}}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz \quad (5.30)$$

A energia potencial total da coluna no equilíbrio neutro no seu estado flambado é

$$U + V = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz - \frac{P_{CR}}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz \quad (5.31)$$

ou

$$U + V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2v}{dz^2} \right)^2 dz - \frac{P_{CR}}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz \quad (5.32)$$



# 6. Método de Energia - Cargas de Intabilidade em Colunas

Vamos assumir a forma de deflexão da coluna com a seguinte série

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi z}{l} \quad (5.33)$$

que satisfaz as condições de fronteira

$$(v)_{z=0} = (v)_{z=l} = 0 \quad , \quad \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=0} = \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=l} = 0$$

e que é capaz, dentro dos seus limites de validade, de representar uma curva contínua.

Substituindo a Eq. (5.33) na Eq. (5.32), tem-se

$$U + V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n \sin \frac{n\pi z}{l} \right)^2 dz - \frac{P_{CR}}{2} \int_0^l \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos \frac{n\pi z}{l} \right)^2 dz \quad (5.34)$$



# 6. Método de Energia - Cargas de Intabilidade em Colunas

Os produtos em ambos os integrais da Eq. (5.34) desaparecem quando se integram, deixando apenas os valores dos termos ao quadrado.

Assim,

$$U + V = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 A_n^2 - \frac{\pi^2 P_{CR}}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 \quad (5.35)$$

Atribuindo um valor estacionário à energia potencial total com respeito a cada coeficiente  $A_n$  de cada vez, escreve-se

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial A_n} = \frac{\pi^4 EIn^4 A_n}{4l^3} - \frac{\pi^2 P_{CR} n^2 A_n}{2l} = 0 \quad (5.36)$$

o que dá

$$P_{CR} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (5.37)$$



# 6. Método de Energia - Cargas de Intabilidade em Colunas

como antes (ver Eq. (5.07)).

# 6. Considerações de projeto

Como vimos, o índice de esbeltez de um componente tem um papel determinante na sua resistência a cargas de compressão. Assim, em função do valor de  $l_e/r$  podemos dividir o comprimento dos componentes em 3 categorias: *longos*, *intermédios* e *curtos*. Em cada um dos casos, ocorrerá um modo de falha diferente, tal como visível na seguinte figura.

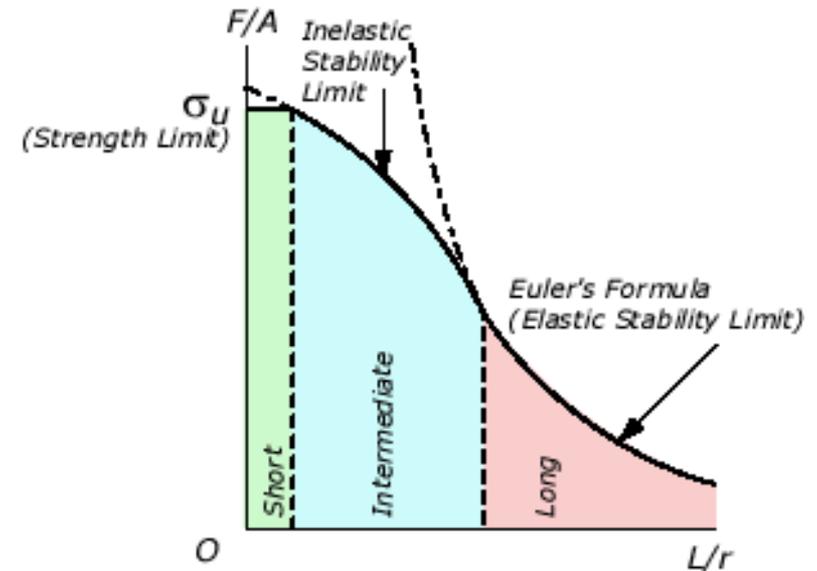


Figura 5.11 Categorias de elementos.



# 6. Considerações de projeto

Material	Curto ( $\sigma_u$ )	Intermédio (Inst. Plástica)	Longo (Inst. Elástica)
	SR $\equiv$ Índice de esbeltez ( $l_e/r$ )		
Aço	$SR < 40$	$40 < SR < 150$	$SR > 150$
Alumínio (6061 – T6)	$SR < 9.5$	$9.5 < SR < 66$	$SR > 66$
Alumínio (2014 –T6)	$SR < 12$	$12 < SR < 55$	$SR > 55$