

UNIVERSIDADE  
BEIRA INTERIOR

# Análise de Tensões em Componentes de Aeronaves

Estruturas Aeroespaciais I  
(10362/15089)

Mestrado Integrado em Engenharia Aeronáutica

2023

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais  
Faculdade de Engenharia



# 1. Introdução

- No capítulo anterior estabeleceu-se a teoria básica para a análise de vigas de paredes finas de **secção fechada e aberta** sujeitas à **flexão**, ao **corte** e à **torção**.
- Métodos de idealização de secções reforçadas com tensores em secções mais simples de analisar também foram apresentados: **idealização estrutural**.
- Agora convém alargar esta análise para componentes próprios de aeronaves incluindo **vigas com afilamento**, **fuselagens**, **asas**, **cavernas** e **nervuras**; também estão incluídos os efeitos de **aberturas** em asas e fuselagens.



# 1. Introdução

Os componentes estruturais de aeronaves são complexos consistindo, normalmente, de **cascas** de metal finas reforçadas com arranjos de **tensores**.

Estas estruturas são altamente redundantes e requerem certa simplificação ou idealização antes que possam ser analisadas.

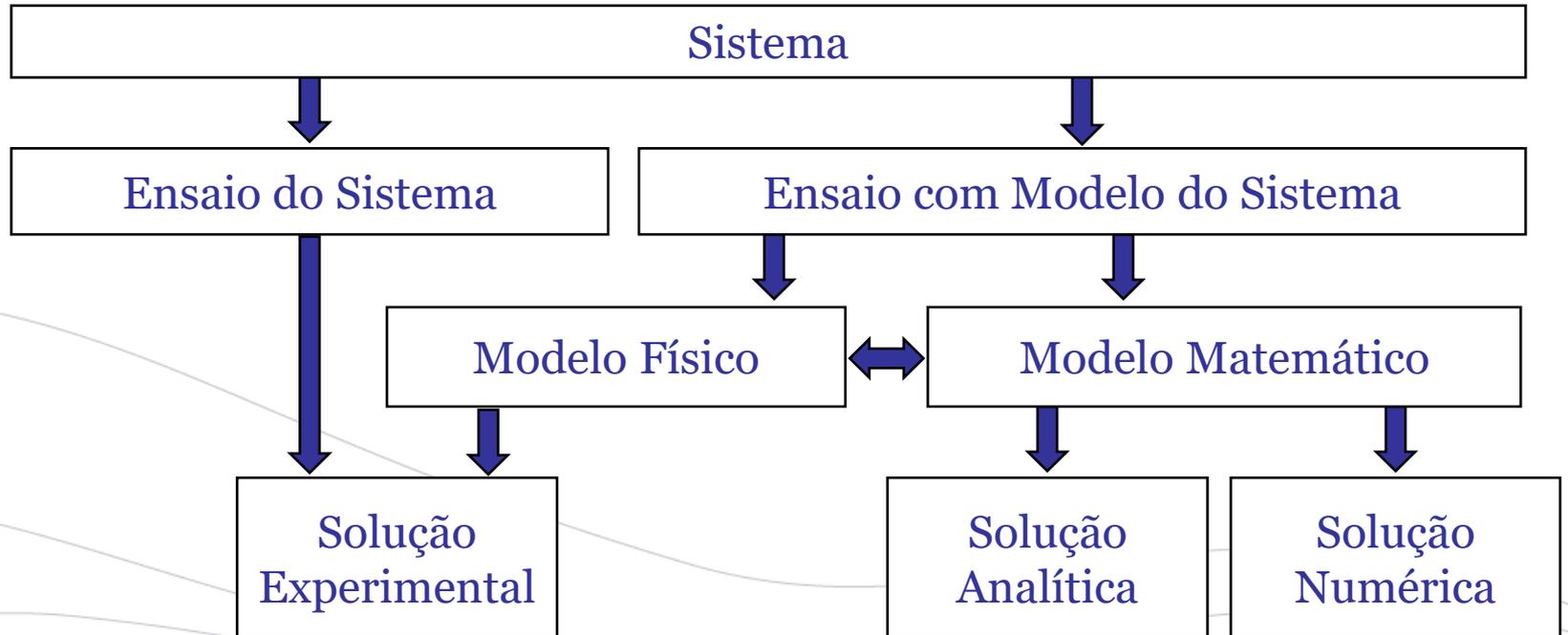
A análise apresentada aqui é, por isso, aproximada e o grau de precisão obtido depende do número de simplificações assumidas.

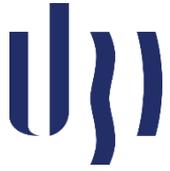
Também está presente uma outra complicação uma vez que fatores como restrições de empeno, descontinuidades na estrutura e na carga e atraso do corte afetam grandemente a análise.



# 1. Introdução

Geralmente só usando **técnicas numéricas**, como o **método dos elementos finitos**, se pode obter um elevado grau de precisão.



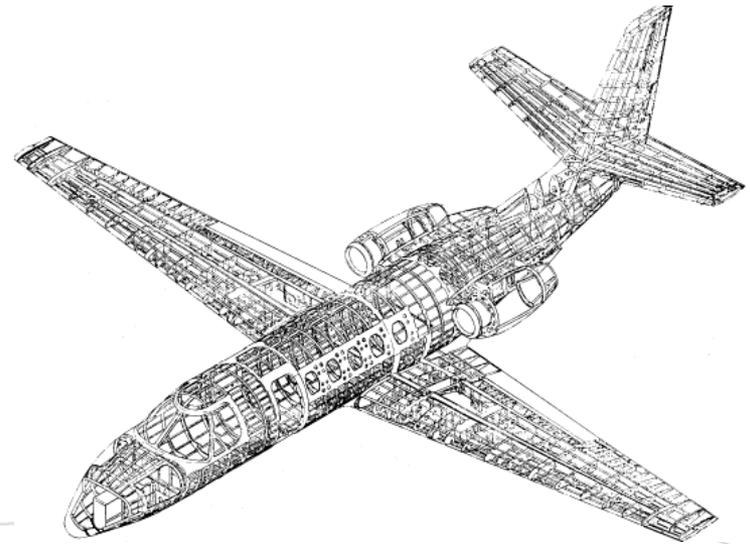
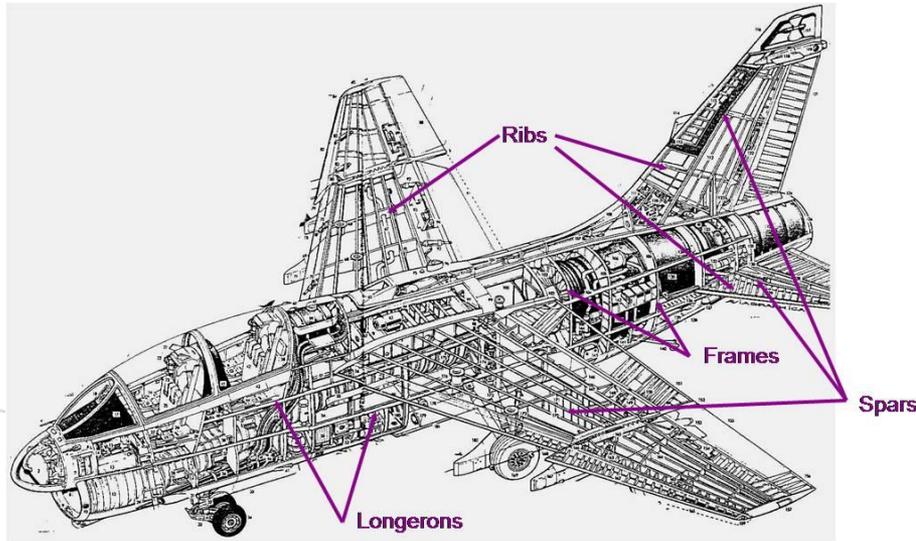


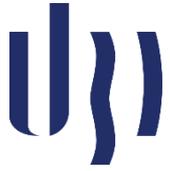
# 1. Introdução

No entanto, os métodos aproximados (mais simples, rápidos e baratos) podem usar-se com grande vantagem nas fases preliminares do projeto estrutural quando são investigadas várias alternativas estruturais; eles também **proporcionam uma compreensão do comportamento físico das estruturas**, ao contrário dos métodos numéricos.

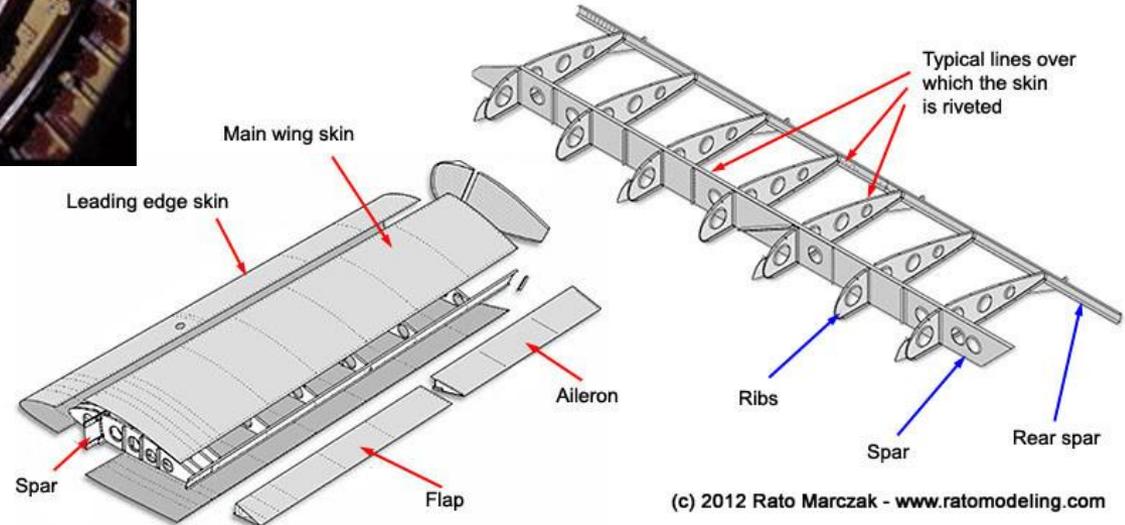


# 1. Introdução





# 1. Introdução



(c) 2012 Rato Marczak - [www.ratomodeling.com](http://www.ratomodeling.com)



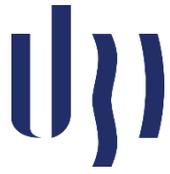
## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

Os componentes estruturais de aeronaves, como as **asas** e as **fuselagens**, são normalmente afilados ao longo do seu comprimento para permitir melhor eficiência estrutural.

Assim, a dimensão das secções de asas são reduzidas tanto na corda como na espessura ao longo da envergadura na direção da ponta e as secções de fuselagens atrás da cabina dos passageiros afinam para melhorar a eficiência aerodinâmica e a forma estrutural.

A análise de vigas de secção fechada ou aberta apresentada anteriormente assumiu que as secções da viga são uniformes.

O **efeito do afilamento** na previsão de **tensões diretas produzidas por momentos fletores** é mínimo se o afilamento for pequeno sendo as propriedades da secção calculadas na secção em questão.



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

A equação

$$\sigma_z = \left( \frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left( \frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y \quad (3.06)$$

pode, por isso, ser usada com precisão razoável.

Por outro lado, as tensões de corte nas almas da viga pode ser bastante afetado pelo afilamento.

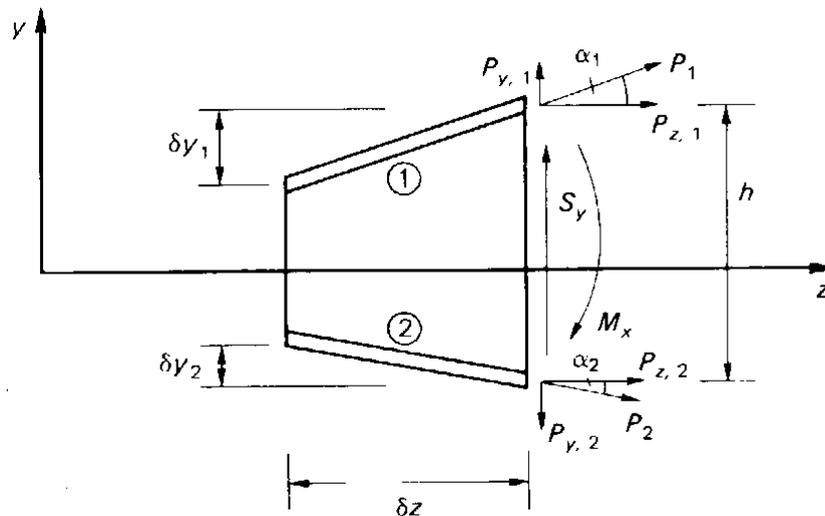


## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.1. Longarina de asa afilada

Considere-se primeiro o caso simples de uma viga colocada no plano  $yz$  sendo constituída por duas mesas e uma alma.

Um elemento  $\delta z$  da viga está representado na *figura 4.01*.



**Figura 4.01** Efeito do afilamento na análise de vigas



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.1. Longarina de asa afilada

Na secção  $z$  a viga é sujeita a um momento fletor positivo  $M_x$  e uma força de corte positiva  $S_y$ .

As resultantes do momento fletor  $P_{z,1}$  e  $P_{z,2}$  são paralelas ao eixo  $z$  da viga.

Numa viga em que se assume que as mesas suportam todas as tensões diretas

$$P_{z,1} = \frac{M_x}{h} \quad ; \quad P_{z,2} = -\frac{M_x}{h}$$

No caso em que se assume que a alma também suporta tensões diretas,  $P_{z,1}$  e  $P_{z,2}$  são determinadas multiplicando as tensões diretas  $\sigma_{z,1}$  e  $\sigma_{z,2}$ , obtidas com a *equação 3.06*, pelas áreas das mesas  $B_1$  e  $B_2$ .



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.1. Longarina de asa afilada

$P_{z,1}$  e  $P_{z,2}$  são as componentes da força axial das mesas na direção de  $Z$ .

Estas têm componentes  $P_{y,1}$  e  $P_{y,2}$  paralelas ao eixo  $y$  e são dadas por

$$P_{y,1} = P_{z,1} \frac{\delta y_1}{\delta z} \quad ; \quad P_{y,2} = P_{z,2} \frac{\delta y_2}{\delta z} \quad (4.01)$$

onde, na direção de afilamento mostrado,  $\delta y_2$  é negativo.

A carga axial na mesa 1 é dada por

$$P_1 = (P_{z,1}^2 + P_{y,1}^2)^{1/2}$$

Substituindo para  $P_{y,1}$  da equação 4.01 tem-se

$$P_1 = P_{z,1} \frac{\sqrt{\delta z^2 + \delta y_1^2}}{\delta z} = \frac{P_{z,1}}{\cos \alpha_1} \quad (4.02)$$



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.1. Longarina de asa afilada

Da mesma forma

$$P_2 = P_{z,2} \frac{\sqrt{\delta z^2 + \delta y_2^2}}{\delta z} = \frac{P_{z,2}}{\cos \alpha_2} \quad (4.03)$$

A força de corte interna  $S_y$  é constituída pela resultante  $S_{y,w}$  dos fluxos de corte na alma da viga e pelas componentes verticais de  $P_1$  e  $P_2$ .

Assim

$$S_y = S_{y,w} + P_{y,1} - P_{y,2}$$

ou

$$S_y = S_{y,w} + P_{z,1} \frac{\delta y_1}{\delta z} + P_{z,2} \frac{\delta y_2}{\delta z} \quad (4.04)$$



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.1. Longarina de asa afilada

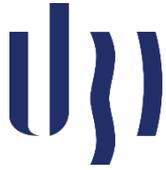
de forma que

$$S_{y,w} = S_y - P_{z,1} \frac{\delta y_1}{\delta z} - P_{z,2} \frac{\delta y_2}{\delta z} \quad (4.05)$$

Neste exemplo,  $\delta y_2$  nas *equações 4.04 e 4.05* é negativo.

A *equação 4.05* pode ser usada para determinar a distribuição do fluxo de corte na alma da viga.

Para uma viga completamente idealizada o fluxo de corte da alma é constante e é dado por  $S_{y,w}/h$ .



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.1. Longarina de asa afilada

Para uma viga onde a alma é capaz de suportar tensões diretas, a distribuição do fluxo de corte é obtida usando a *equação 3.75*

$$q_2 - q_1 = - \left( \frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left( \int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) - \left( \frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left( \int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) \quad (3.75)$$

onde  $S_y$  é substituído por  $S_{y,w}$  e que, para a viga da *figura 4.01*, simplifica-se em

$$q_s = - \frac{S_{y,w}}{I_{xx}} \left( \int_0^s t_D y ds + B_1 y_1 \right) \quad (4.06)$$

ou

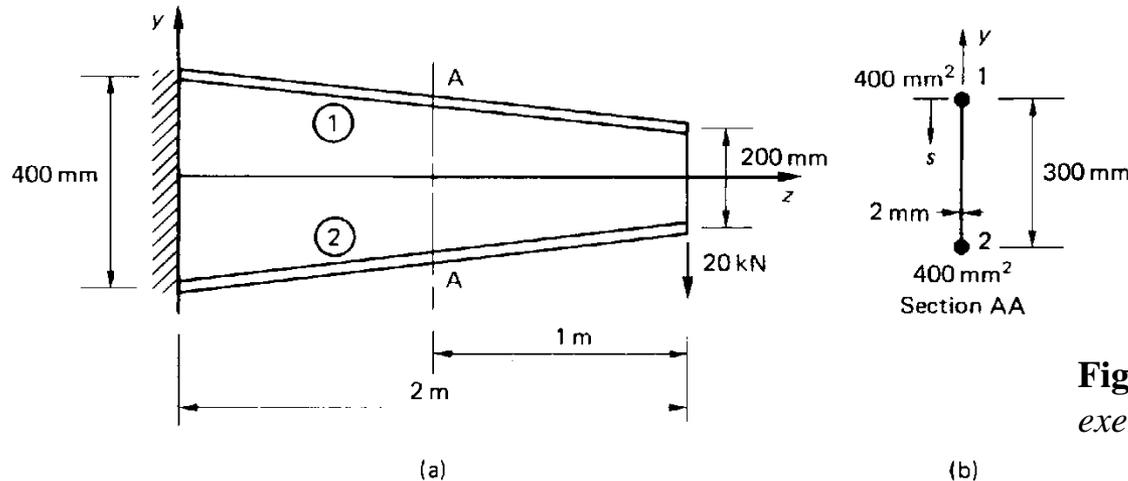
$$q_s = - \frac{S_{y,w}}{I_{xx}} \left( \int_0^s t_D y ds + B_2 y_2 \right) \quad (4.07)$$



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.1. Longarina de asa afilada

**Exemplo 4.01:** Determinar a distribuição do fluxo de corte na alma da viga afilada da *figura 4.02* na secção a meio do seu comprimento. A alma da viga tem uma espessura de 2 mm e suporta tensões diretas. A viga afila simetricamente em torno do eixo horizontal que passa pelo centróide e a área de cada mesa é de  $400 \text{ mm}^2$ .



**Figura 4.02** Viga com afilamento do exemplo 4.01



2. Longarinas de asa e vigas em caixão

## 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

Considere-se agora o caso mais geral de uma viga afilada em duas direções compreendendo um arranjo de booms e de revestimento.

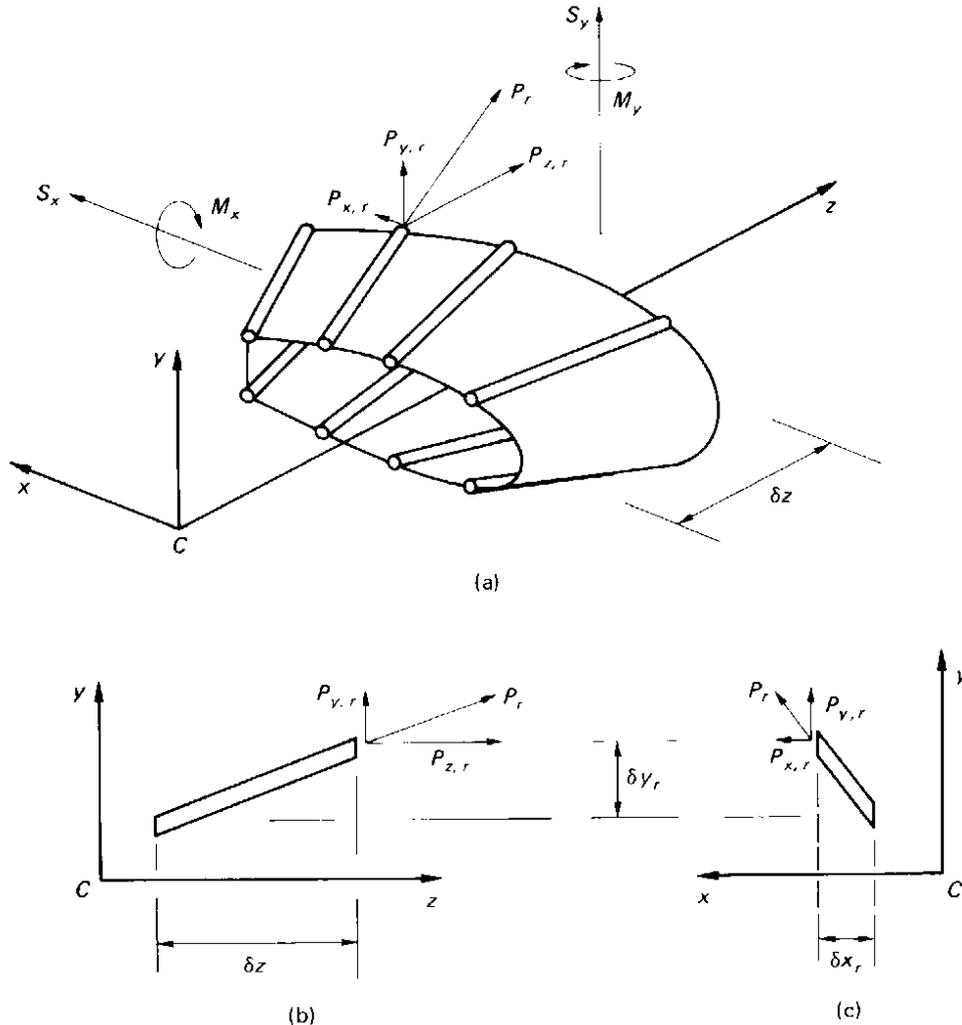
Exemplos práticos deste tipo de vigas são as asas e as fuselagens completas.

A viga pode ser de secção aberta ou fechada; os efeitos do afilamento são determinados de uma maneira idêntica em ambos os casos.



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada



**Figura 4.04** Efeito do afilamento na análise de vigas de secção aberta e fechada



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

A *figura 4.04(a)* mostra um pequeno comprimento  $\delta z$  da viga sujeito a forças de corte  $S_x$  e  $S_y$  na secção  $z$ ;  $S_x$  e  $S_y$  são positivas quando atuam nas direções representadas.

Convém lembrar que, caso a viga fosse aberta, as forças de corte teriam que ser aplicadas no centro de corte para evitar qualquer torção.

Para além das forças de corte, a viga está sujeita a momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  que produzem tensões diretas  $\sigma_z$  nos “booms” e no revestimento.

Suponha-se que no “boom”  $r$  a tensão direta paralela a  $z$  é  $\sigma_{z,r}$ , que pode ser obtida usando a *equação 3.06*.

$$\sigma_z = \left( \frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left( \frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y \quad (3.06)$$



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

A componente  $P_{z,r}$  da carga axial  $P_r$  no “boom”  $r$  é dada por

$$P_{z,r} = \sigma_{z,r} B_r \quad (4.08)$$

onde  $B_r$  é a área da secção transversal do “boom”  $r$ .

Da *figura 4.04(b)*

$$P_{y,r} = P_{z,r} \frac{\delta y_r}{\delta z} \quad (4.09)$$

e da *figura 4.04(c)*

$$P_{x,r} = P_{y,r} \frac{\delta x_r}{\delta y_r}$$

ou, substituindo para  $P_{y,r}$  da *equação 4.09*,

$$P_{x,r} = P_{z,r} \frac{\delta x_r}{\delta z} \quad (4.10)$$



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

A carga axial  $P_r$  é, então, dada por

$$P_r = \left( P_{x,r}^2 + P_{y,r}^2 + P_{z,r}^2 \right)^{1/2} \quad (4.11)$$

Ou, em alternativa, por

$$P_r = P_{z,r} \frac{\left( \delta x_r^2 + \delta y_r^2 + \delta z_r^2 \right)^{1/2}}{\delta z} \quad (4.12)$$

As forças de corte  $S_x$  e  $S_y$  aplicadas são reagidas pelas resultantes dos fluxos de corte no revestimento dos painéis e almas juntamente com as componentes  $P_{x,r}$  e  $P_{y,r}$  das cargas axiais nos “booms”.

Assim, se  $S_{x,w}$  e  $S_{y,w}$  são as resultantes dos esforços de corte no revestimento e na alma e se tem um total de  $m$  “booms” na secção, então



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

$$S_x = S_{x,w} + \sum_{r=1}^m P_{x,r} \quad ; \quad S_y = S_{y,w} + \sum_{r=1}^m P_{y,r} \quad (4.13)$$

Substituindo nas *equações 4.13* para  $P_{x,r}$  e  $P_{y,r}$  das *equações 4.10 e 4.09* tem-se

$$S_x = S_{x,w} + \sum_{r=1}^m P_{z,r} \frac{\delta x_r}{\delta z} \quad ; \quad S_y = S_{y,w} + \sum_{r=1}^m P_{z,r} \frac{\delta y_r}{\delta z} \quad (4.14)$$

Então

$$S_{x,w} = S_x - \sum_{r=1}^m P_{z,r} \frac{\delta x_r}{\delta z} \quad ; \quad S_{y,w} = S_y - \sum_{r=1}^m P_{z,r} \frac{\delta y_r}{\delta z} \quad (4.15)$$



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

A distribuição do fluxo de corte numa viga de secção aberta é obtida usando a *equação 3.75* onde  $S_x$  é substituído por  $S_{x,w}$  e  $S_y$  por  $S_{y,w}$  das *equações 4.15*.

Da mesma forma, numa viga de secção fechada  $S_x$  e  $S_y$  na *equação 3.80* são substituídos por  $S_{x,w}$  e  $S_{y,w}$ .

$$q_s = - \left( \frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left( \int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) - \left( \frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left( \int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) + q_{s,0} \quad (3.80)$$

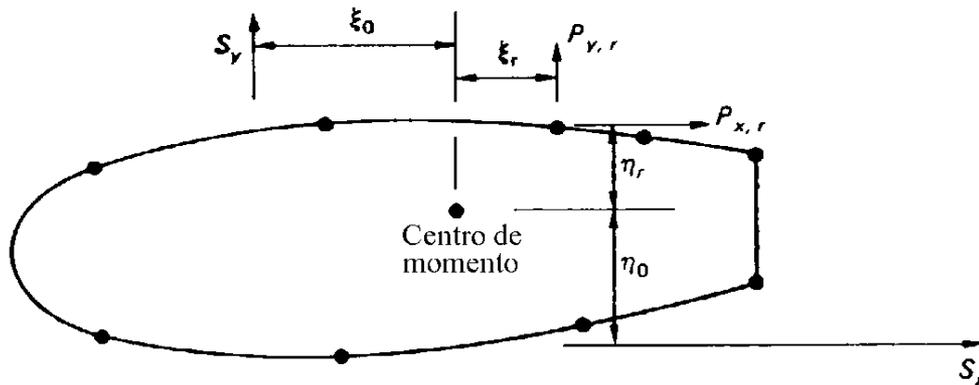
Neste caso a equação dos momentos (*equação 3.37*) requer uma modificação devido à presença das componentes da carga nos “booms”  $P_{x,r}$  e  $P_{y,r}$ .



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint pq_b ds + 2Aq_{s,0} \quad (3.37)$$



**Figura 4.05** Modificação da equação dos momentos no corte de secções fechadas devido às cargas nos “booms”

Assim, da *figura 4.05* vê-se que a *equação 3.37* fica

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint q_b p ds + 2Aq_{s,0} - \sum_{r=1}^m P_{x,r} \eta_r + \sum_{r=1}^m P_{y,r} \xi_r \quad (4.16)$$



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

A *equação 4.16* é diretamente aplicável a uma viga com afilamento sujeita a forças posicionadas em relação ao centro de corte como mostrado na *figura 4.05*.

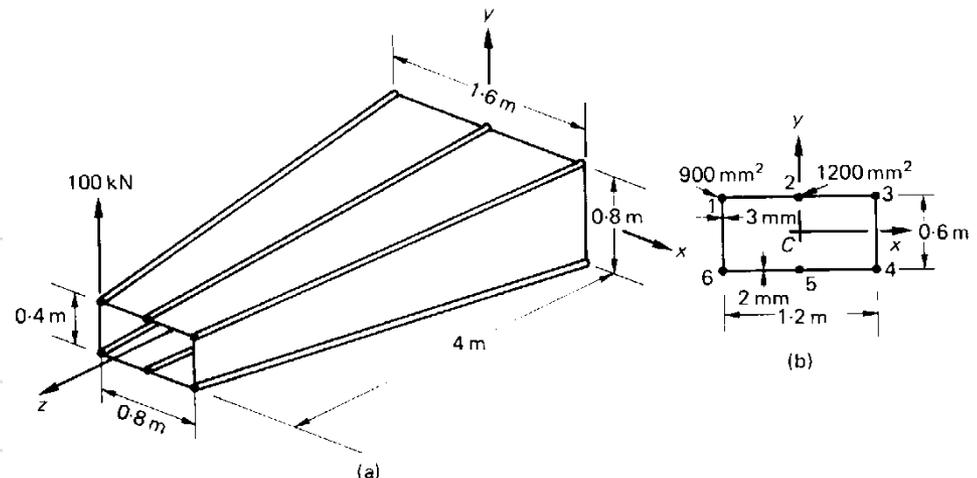
É necessário ter atenção em problemas específicos de forma a que os momentos das forças tenham o sinal correto.



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

**Exemplo 4.02:** A viga embutida da *figura 4.06* é uniformemente afilada ao longo do comprimento, tanto na direção  $x$  como na  $y$ , e suporta uma força de 100 kN na ponta livre. Calcular as forças nos “booms” e a distribuição do fluxo de corte nas paredes da secção que se situa a 2 m da ponta embutida supondo que os “booms” suportam todas as tensões diretas e as paredes apenas o corte. Cada “boom” dos cantos tem uma secção com  $900 \text{ mm}^2$  e os centrais têm  $1200 \text{ mm}^2$ .



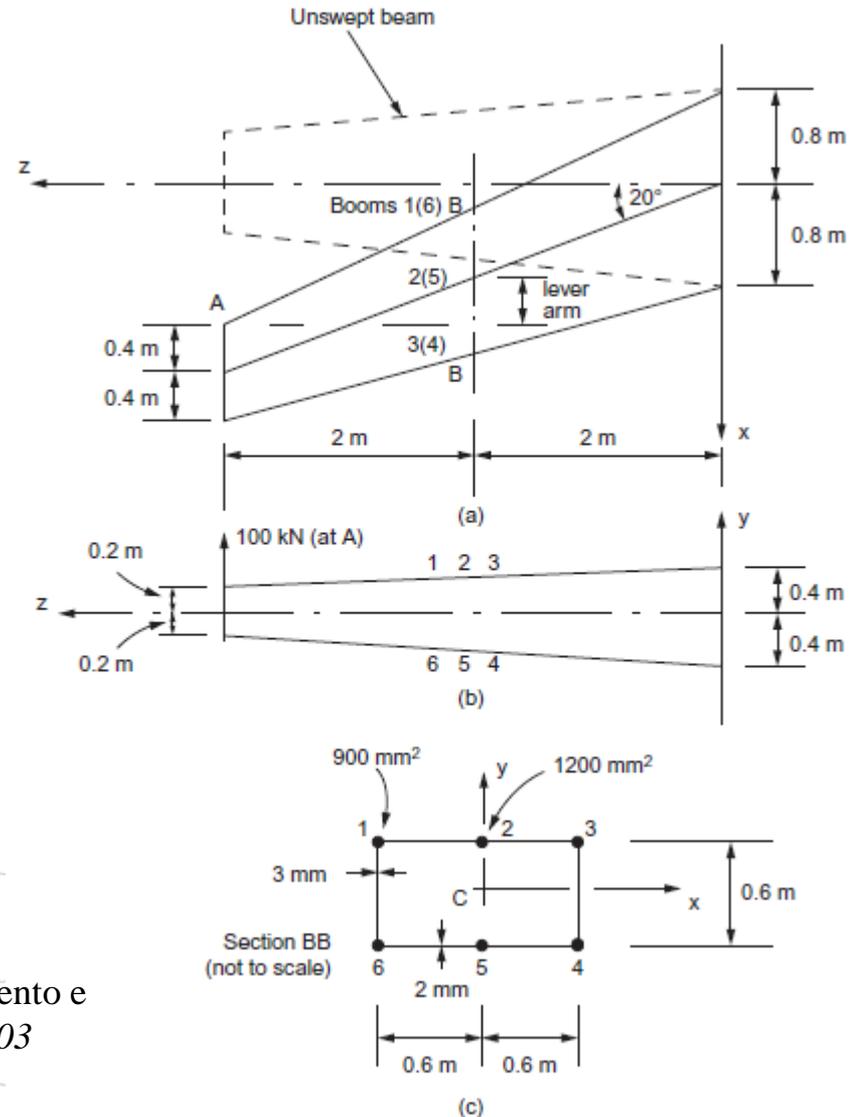
**Figura 4.06** Viga com afilamento do exemplo 4.02



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.2. Vigas de secção aberta e fechada

**Exemplo 4.03:** Se o plano vertical central da viga em caixão do exemplo 3.02, isto é, o plano vertical que passa nos «booms» 2 e 5, tiver um enflechamento de  $20^\circ$  como mostra a figura 4.07, calcule as forças nos «booms» e a distribuição do fluxo de corte nas paredes da secção BB, que dista 2 m da raiz da viga. Note que a envergadura da viga mantém-se.



**Figura 4.07** Viga com afilamento e enflechamento do exemplo 4.03



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.3. Vigas com tensores de área variável

Em muitos aviões, as vigas estruturais, como as asas, possuem tensores cujas áreas da secção transversal variam ao longo da envergadura.

Os efeitos desta variação na determinação da distribuição do fluxo de corte não podem, por isso, ser obtidos pelos métodos descritos anteriormente que assumem áreas constantes para os “booms”.

De facto, se a tensão nos tensores for mantida constante por meio da variação da sua área não há qualquer mudança no fluxo de corte quando o tensor/”boom” é atravessado.



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.3. Vigas com tensores de área variável

O cálculo da distribuição do fluxo de corte em vigas com tensores de área variável é baseado no método alternativo para a determinação da distribuição do fluxo de corte.

As forças dos booms  $P_{z,1}$  e  $P_{z,2}$  são calculadas em duas secções  $z_1$  e  $z_2$  da viga a uma distância conveniente entre si.

Assumindo que a força no tensor varia linearmente no seu comprimento, o incremento da força no tensor por unidade de comprimento é dado por

$$\Delta P = \frac{P_{z,1} - P_{z,2}}{z_1 - z_2}$$

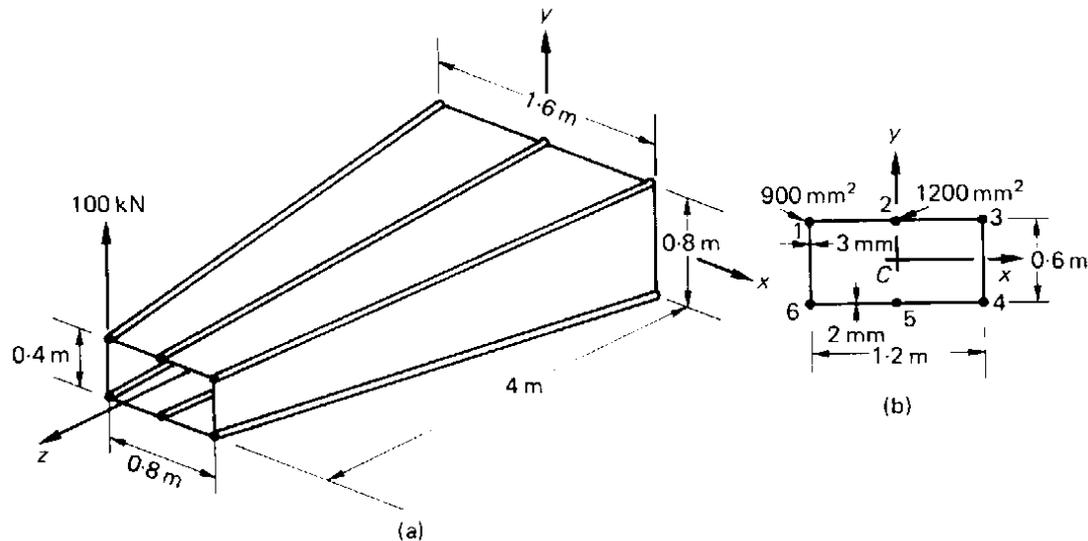
A distribuição do fluxo de corte obtém-se como anteriormente.



## 2. Longarinas de asa e vigas em caixão

### 2.3. Vigas com tensores de área variável

**Exemplo 4.04:** Resolver o *exemplo 4.02* considerando as diferenças nas forças dos “booms” em secções da viga antes e depois da secção dada. Neste exemplo as áreas dos tensores não variam ao longo do comprimento da viga mas o método é idêntico.





## 3. Fuselagens

As fuselagens consistem em chapas finas reforçadas com um elevado número de tensores longitudinais juntamente com cavernas.

Geralmente elas suportam momentos fletores, forças de corte e momentos de torção que induzem tensões axiais nos tensores e na casca juntamente com tensões de corte na casca; a resistência dos tensores às forças de corte é geralmente ignorada.

A distância entre tensores adjacentes é normalmente pequena pelo que a variação do fluxo de corte no painel que os une também será pequena.



## 3. Fuselagens

É por isso razoável assumir que o fluxo de corte é constante entre tensores adjacentes o que simplifica a análise a uma secção idealizada em que os tensores/”booms” suportam todas as tensões diretas enquanto o revestimento suporta apenas as tensões de corte.

A capacidade da casca suportar as tensões diretas é tida em conta pelo aumento da área dos tensores/”booms” como descrito no capítulo anterior.

A análise de fuselagens envolve assim o cálculo das tensões diretas nos tensores e a distribuição das tensões de corte na casca; estas últimas também são necessárias para a análise das cavernas como se verá na *secção 5*.



# 3. Fuselagens

Análise de Tensões em Componentes de Aeronaves





### 3. Fuselagens

## 3.1. Flexão

O arranjo da casca e dos tensores é idealizado numa combinação de “booms” e revestimento como visto anteriormente.

A tensão direta em cada “boom” é depois calculada usando a *equação 3.06* onde os eixos de referência e as propriedades da secção referem-se às áreas da secção transversal que suportam as tensões diretas.

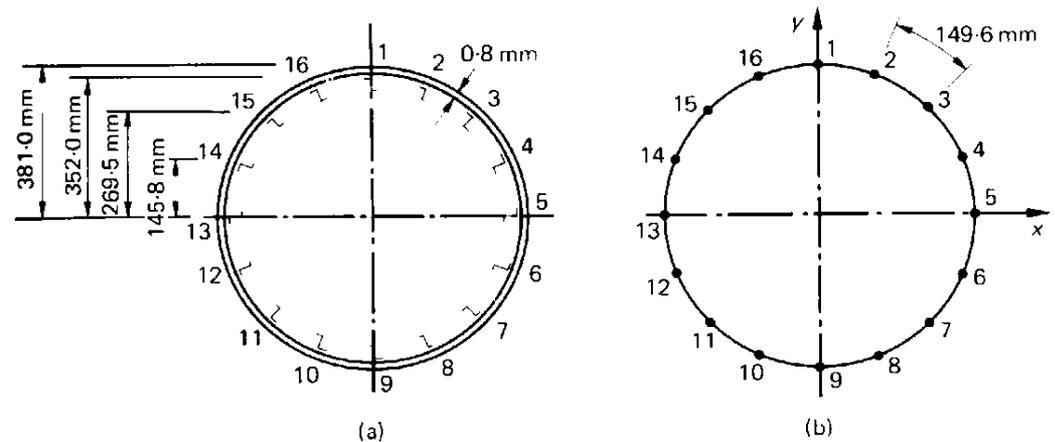
$$\sigma_z = \left( \frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left( \frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y \quad (3.06)$$



### 3. Fuselagens

## 3.1. Flexão

**Exemplo 4.05:** A fuselagem de um avião ligeiro de passageiros tem uma secção transversal igual à da *figura 4.07(a)*. A área da secção transversal de cada tensor é de  $100 \text{ mm}^2$  e as distâncias verticais da *figura 4.07(a)* vão até à linha média da parede da secção na posição do tensor correspondente. Se a fuselagem estiver sujeita a um momento fletor de  $200 \text{ kNm}$  aplicado no plano vertical de simetria desta secção, calcular a distribuição das tensões diretas.



**Figura 4.07** (a) Secção real da fuselagem; (b) secção idealizada da fuselagem



### 3. Fuselagens

## 3.2. Corte

Numa fuselagem com uma secção transversal do tipo representado na *figura 4.07(a)* a determinação da distribuição do fluxo de corte na casca resultante da força de corte é basicamente a análise da idealização de uma viga fechada com uma única célula.

A distribuição do fluxo de corte é assim dada pela *equação 4.17* onde a capacidade da casca suportar as tensões diretas é tida como nula, isto é  $t_D=0$ , de forma que

$$q_s = - \left( \frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \sum_{r=1}^n B_r x_r - \left( \frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \sum_{r=1}^n B_r y_r + q_{s,0} \quad (4.17)$$



### 3. Fuselagens

## 3.2. Corte

A equação 4.17 é aplicável nos casos em que as cargas de corte não estão aplicadas através do centro de corte de forma que os efeitos do corte e da torção são incluídos simultaneamente.

Alternativamente, se a posição do centro de corte for conhecida, o sistema de cargas pode ser substituído por forças de corte aplicadas no centro de corte juntamente com um momento torsor puro.



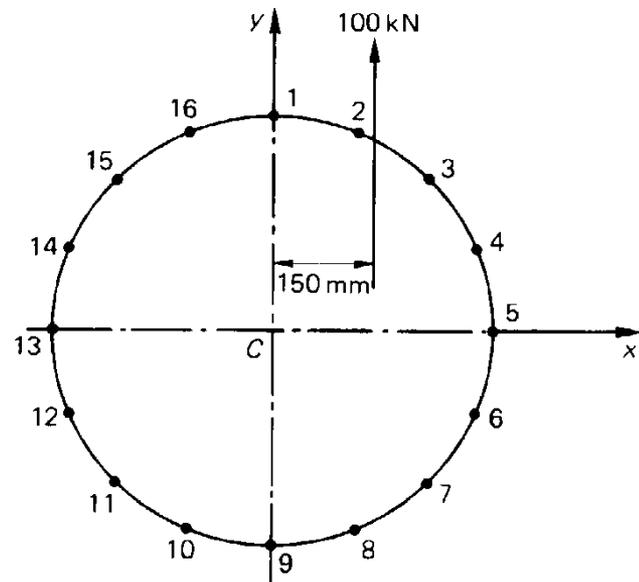
**Neste caso, as distribuições do fluxo de corte são calculadas separadamente e adicionadas posteriormente para se obter a distribuição final.**



### 3. Fuselagens

## 3.2. Corte

**Exemplo 4.06:** A fuselagem do *exercício 4.05* está sujeita a uma força de corte vertical de 100 kN aplicada a uma distância de 150 mm do eixo vertical de simetria como mostra, para a secção idealizada, a *figura 4.08*. Calcular a distribuição do fluxo de corte na secção.



**Figura 4.08** Secção idealizada da fuselagem do *exemplo 4.06*



### 3. Fuselagens

## 3.3. Torção

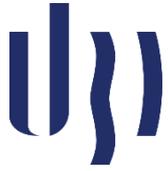
Uma secção de fuselagem é basicamente uma viga fechada de uma única célula.

A distribuição do fluxo de corte resultante de um momento torsor puro é, por isso, dada por

$$q = \frac{T}{2A} \quad (4.18)$$

É indiferente que a secção tenha ou não sido idealizada uma vez que em ambos os casos assume-se que os “booms” não suportam as tensões de corte.

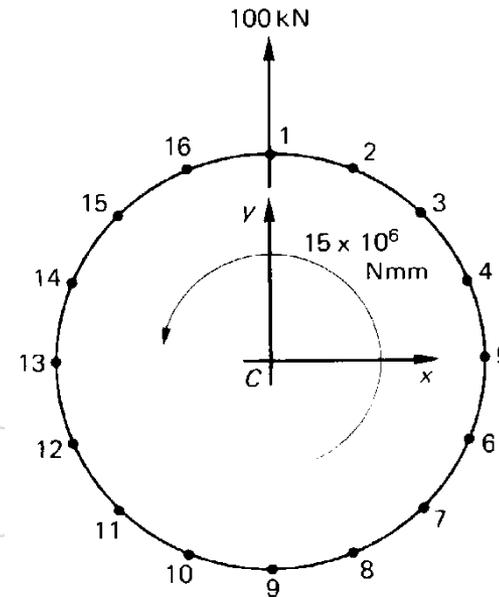
A *equação 4.18* permite uma alternativa ao *exemplo 4.06* para a solução de secções sujeitas a corte em que o centro de corte é conhecido.



### 3. Fuselagens

## 3.3. Torção

Na *figura 4.08* o centro de corte coincide com o centro de simetria de forma que o sistema de forças pode ser substituído por uma força de 100 kN atuando no centro de corte juntamente com um momento torsor puro de  $100 \times 10^3 \times 150 = 15 \times 10^6$  Nmm como mostra a *figura 4.09*.



**Figura 4.09** Solução alternativa do exemplo 4.06.



## 3. Fuselagens

### 3.3. Torção

A distribuição do fluxo de corte resultante da força de corte pode ser determinada usando o método do *exemplo 4.06* mas com a parte esquerda da equação do momento igual a zero para momentos em torno do centro de simetria.

Alternativamente pode usar-se a simetria da secção e o facto de o fluxo de corte ser constante entre os “booms”.

Suponha-se que o fluxo de corte no painel 21 é  $q_{21}$ . Então da simetria e usando os resultados do exercício anterior

$$q_{98} = q_{910} = q_{161} = q_{21}$$

$$q_{32} = q_{87} = q_{1011} = q_{1516} = 30,3 + q_{21}$$

$$q_{43} = q_{76} = q_{1112} = q_{1415} = 53,5 + q_{21}$$

$$q_{54} = q_{65} = q_{1213} = q_{1314} = 66,0 + q_{21}$$



### 3. Fuselagens

## 3.3. Torção

A resultante destes fluxos de corte é estaticamente equivalente à força de corte aplicada de forma que

$$4 \times (h_{21}q_{21} + h_{32}q_{32} + h_{43}q_{43} + h_{54}q_{54}) = S_y$$

$$4 \times (29,0q_{21} + 82,5q_{32} + 123,7q_{43} + 145,8q_{54}) = 100 \times 10^3$$

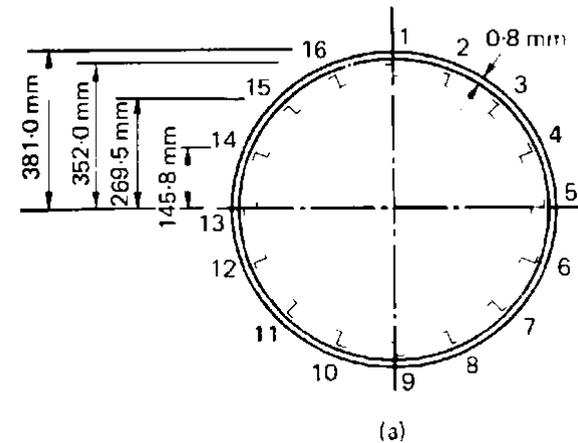
Substituindo para  $q_{32}$ ,  $q_{43}$  e  $q_{54}$  obtém-se

$$4 \times (381,0q_{21} + 18740,5) = 100 \times 10^3$$

de onde se tira

$$q_{21} = 16,4\text{N/mm} \quad ; \quad q_{32} = 46,7\text{N/mm} \quad ; \quad q_{43} = 69,9\text{N/mm} \quad ; \quad q_{54} = 83,4\text{N/mm}$$

etc.





### 3. Fuselagens

## 3.3. Torção

A distribuição do fluxo de corte resultante do momento torsor aplicado é, da *equação 3.18*,

$$q = \frac{15 \times 10^6}{2 \times 4,56 \times 10^5} = 16,4 \text{ N/mm}$$

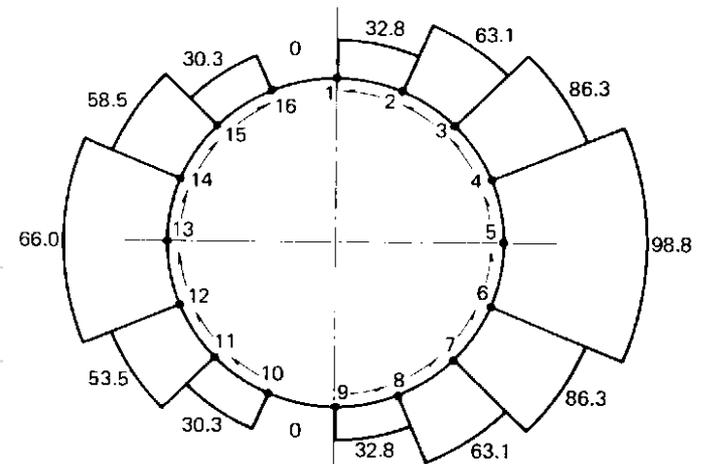
atuando no sentido anti-horário em torno de toda a secção.

Este valor do fluxo de corte é agora adicionado ao fluxo de corte produzido pela força de corte; isto dá a solução da *figura 4.10*, isto é

$$q_{21} = 16,5 + 16,4 = 32,9 \text{ N/mm}$$

$$q_{16l} = 16,5 - 16,4 = 0,1 \text{ N/mm}$$

etc.



**Figura 4.10** Distribuição do fluxo de corte [N/mm] na secção da fuselagem do *exemplo 4.06*.



### 3. Fuselagens

## 3.4. Aberturas em fuselagens

Até agora, consideraram-se fuselagens com secção fechada reforçadas com cavernas transversais e tensores longitudinais.

Na prática, é necessário providenciar aberturas nestas cascas reforçadas e fechadas para, por exemplo, cockpits, portas, janelas ou porões de bombas.

Estas aberturas produzem descontinuidades na estrutura pelo que os esforços são redistribuídos pela vizinhança da abertura, afetando os esforços na casca, nos tensores e nas cavernas.

Frequentemente, estas regiões têm que ser muito reforçadas, resultando num inevitável aumento de peso.

Em algumas situações (aberturas para portas em aviões de passageiros, por exemplo) não é possível ter cavernas rígidas em ambos os lados da abertura porque o espaço da cabina não pode ser obstruído.



### 3. Fuselagens

## 3.4. Aberturas em fuselagens

Nestes casos, uma caverna rígida é inserida em volta da abertura para resistir às cargas de corte e transmitir as cargas de um lado da abertura para o outro.

Os efeitos de aberturas mais pequenas, como aquelas necessárias para filas de janelas em aviões de passageiros, podem ser determinados aproximadamente como descrito em seguida.

A *figura 4.11* mostra um painel de fuselagem com aberturas para janelas.

O traço interrompido representa as cavernas e os tensores da fuselagem necessários para reforçar o painel.

Claro que, na prática, o painel seria curvo mas, para uma fuselagem de um avião de passageiros de grandes dimensões, o painel pode ser considerado plano na extensão que abrange a janela.

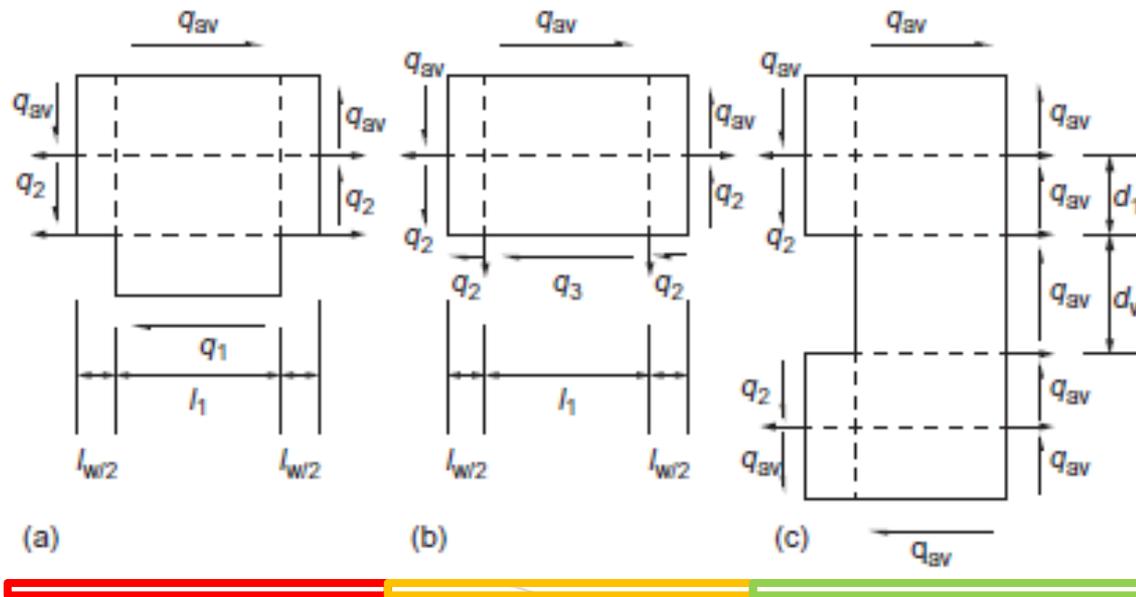




### 3. Fuselagens

## 3.4. Aberturas em fuselagens

Assim, existem três fluxos de corte desconhecidos,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , como mostrado na zona central do painel da *figura 4.12*.



**Figura 4.12** Diagramas do corpo livre das porções do painel da fuselagem da *figura 4.11*.



### 3. Fuselagens

## 3.4. Aberturas em fuselagens

A *figura 4.12(a)* mostra o diagrama do corpo livre de uma área do painel entre e acima de uma abertura.

Considerando o comprimento horizontal do painel através das aberturas pode ver-se que o equilíbrio de forças horizontal é

$$q_1 l_1 = q_{av} (l_1 + l_w)$$

ou

$$q_1 = q_{av} \left( 1 + \frac{l_w}{l_1} \right) \quad (4.19)$$

Note-se que vão aparecer forças axiais nas cavernas e tensores produzidas pelos diferentes valores do fluxo de corte nos painéis adjacentes.

No entanto, devido à simetria, as forças horizontais no tensor vão ser iguais enquanto as forças verticais na caverna não aparecem na equação de equilíbrio.



### 3. Fuselagens

## 3.4. Aberturas em fuselagens

Agora, considerando o diagrama do corpo livre na *figura 4.12(c)*, obtém-se o equilíbrio das forças verticais

$$2q_2d_1 = q_{av}(2d_1 + d_w)$$

ou

$$q_2 = q_{av} \left( 1 + \frac{d_w}{2d_1} \right) \quad (4.20)$$

Finalmente, do diagrama do corpo livre da *figura 4.12(b)* e considerando o equilíbrio horizontal, tem-se

$$q_3l_1 + q_2l_w = q_{av}(l_1 + l_w)$$



### 3. Fuselagens

## 3.4. Aberturas em fuselagens

Substituindo para o  $q_2$  da *equação 4.20* e rearranjando obtém-se

$$q_3 = q_{av} \left( 1 - \frac{d_w l_w}{2d_1 l_1} \right) \quad (4.21)$$

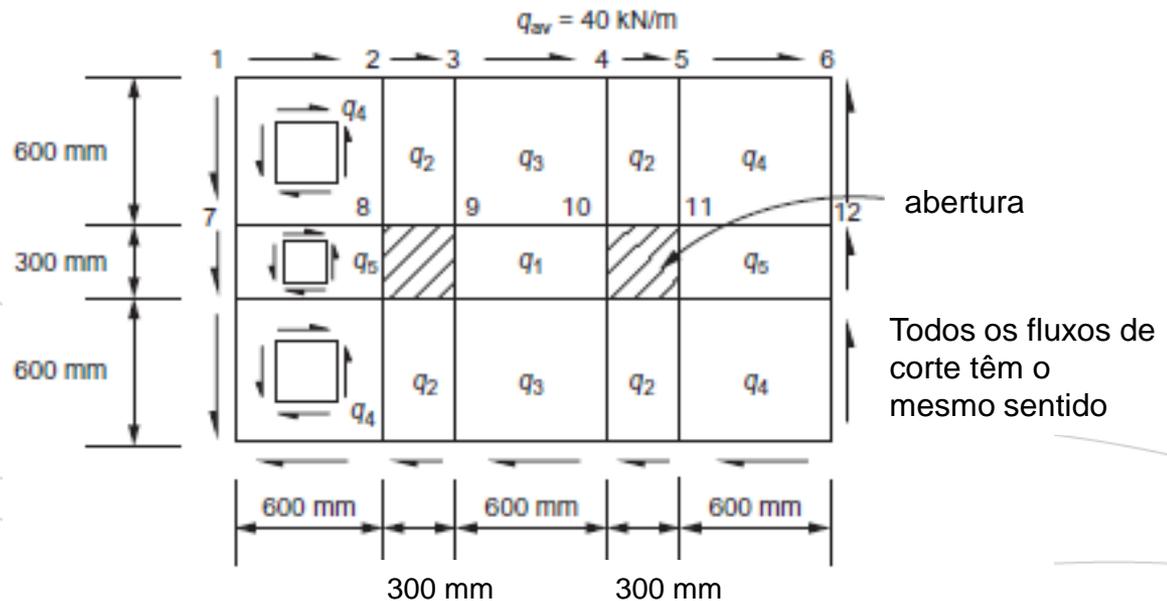
A distribuição da força axial nos tensores pode ser determinada através do equilíbrio estático como ilustrado no exemplo seguinte.



### 3. Fuselagens

## 3.4. Aberturas em fuselagens

**Exemplo 4.07:** O painel de fuselagem mostrado na *figura 4.13* suporta um fluxo de corte médio de  $40 \text{ kN/m}$  em torno do seu contorno exterior. As aberturas para as janelas estão uniformemente distribuídas e existem reforços como mostrado. Determine o fluxo de corte nos painéis e a distribuição das forças axiais ao longo dos reforços em torno da abertura.



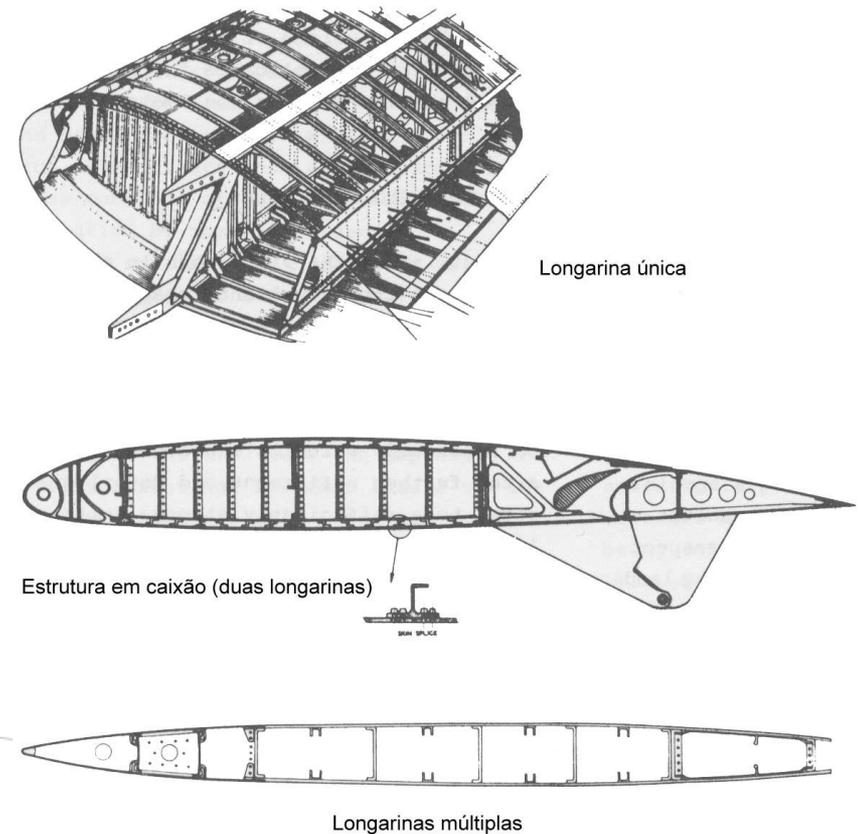
**Figura 4.13** Painel da fuselagem do *exemplo 4.07*



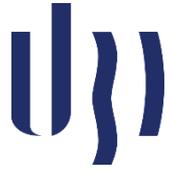
## 4. Asas

As secções das asas são constituídas por cascas finas reforçadas por uma combinação de tensores, almas e mesas de longarinas e nervuras.

A estrutura resultante forma frequentemente uma, duas ou mais células e é altamente redundante.

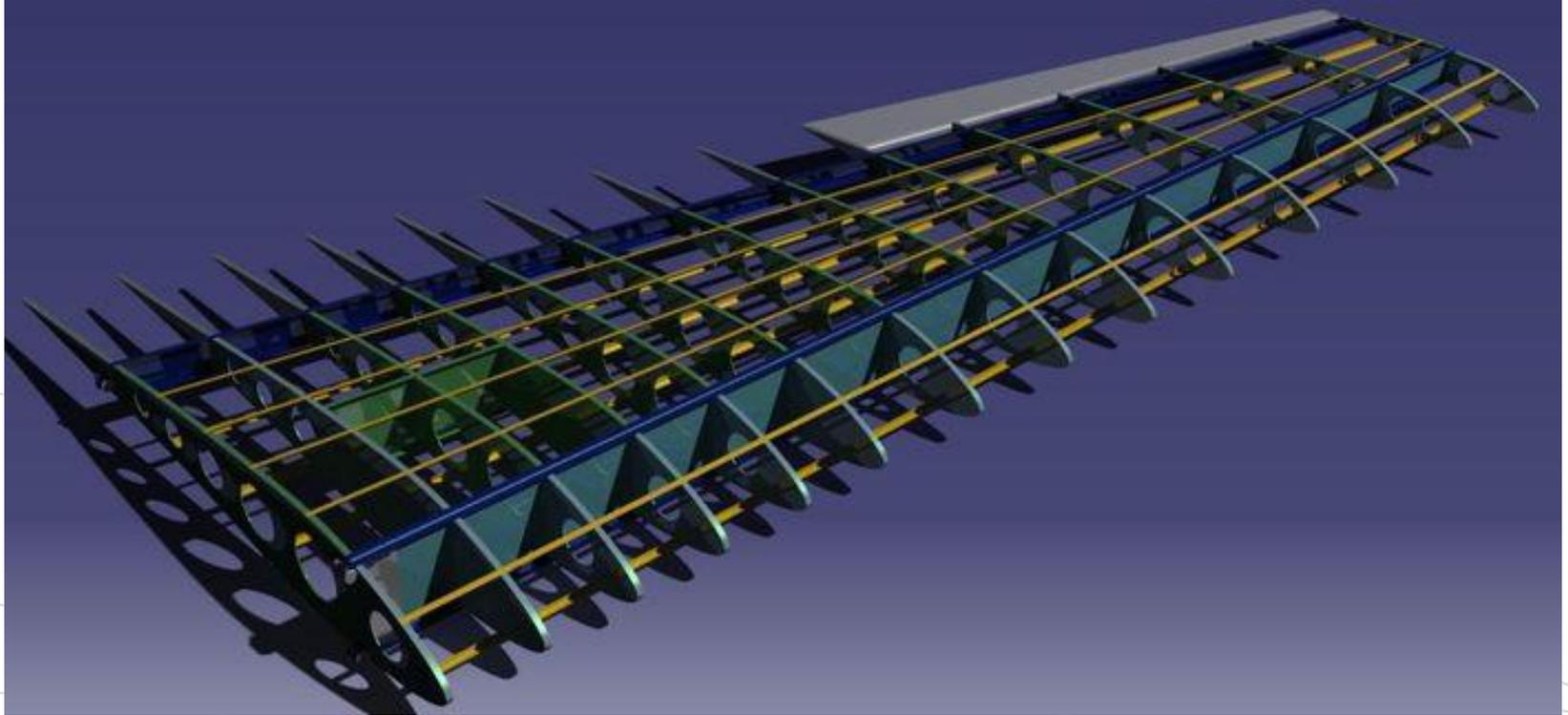


**Figura 4.14** Exemplos de secções de asa.



## 4. Asas

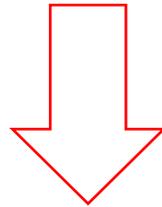
Análise de Tensões em Componentes de Aeronaves





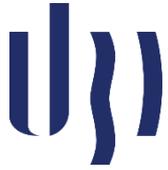
## 4. Asas

No entanto, como no caso das secções de fuselagem, o grande número de tensores colocados próximos uns dos outros permite que se assuma um fluxo de corte constante no revestimento entre tensores consecutivos de forma que a secção da asa pode ser analisada como estando completamente idealizada



desde que a capacidade da casca de suportar as tensões diretas seja compensada pelo aumento das áreas dos “booms”.

Vamos analisar secções de asa de células múltiplas sujeitas à flexão, à torção e ao corte.

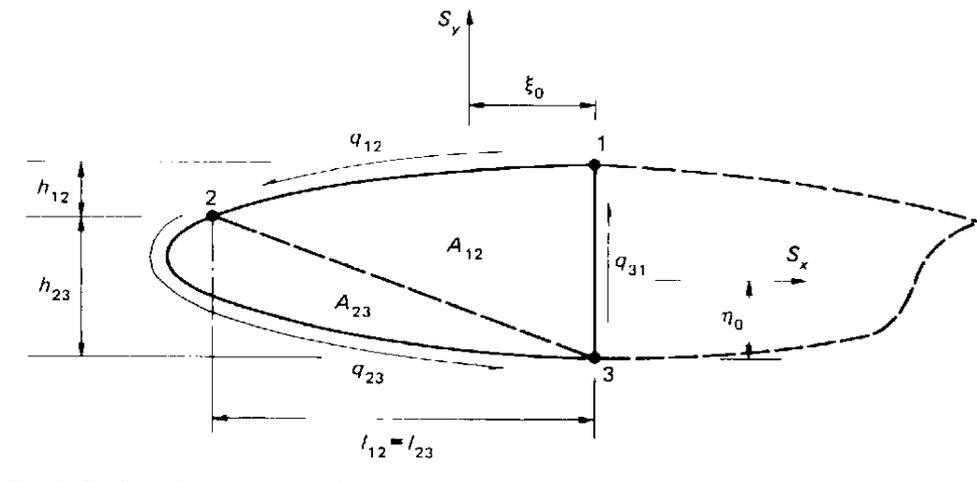


## 4. Asas

### 4.1. Casca com três “booms”

Inicialmente, vai analisar-se o caso especial de uma secção de três tensores longitudinais.

A secção de asa mostrada na *figura 4.15* foi idealizada numa combinação de “booms” para suportar as tensões diretas e painéis para suportar apenas as tensões de corte.



**Figura 4.15** Secção de asa com três “booms”.



## 4. Asas

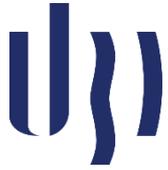
### 4.1. Casca com três “booms”

A parte da secção da asa atrás da longarina vertical 31 desempenha apenas um papel aerodinâmico e por isso não está tensionada.

As forças de sustentação e de arrasto,  $S_y$  e  $S_x$ , induzem fluxos de corte na casca que são constantes entre “booms” adjacentes uma vez que a secção foi completamente idealizada.

Assim, resolvendo as forças horizontalmente e tendo em conta que a resultante dos fluxos de corte internos é equivalente à carga aplicada, tem-se

$$S_x = -q_{12}l_{12} + q_{23}l_{23} \quad (4.22)$$



## 4. Asas

### 4.1. Casca com três “booms”

Resolvendo as forças verticalmente

$$S_y = q_{31}(h_{12} + h_{23}) - q_{12}h_{12} - q_{23}h_{23} \quad (4.23)$$

Finalmente, tirando momentos em torno do “boom” 3

$$S_x \eta_0 + S_y \xi_0 = -2A_{12}q_{12} - 2A_{23}q_{23} \quad (4.24)$$

Nas equações acima têm-se três incógnitas do fluxo de corte,  $q_{12}$ ,  $q_{23}$ ,  $q_{34}$  e três equações de equilíbrio estático.

Conclui-se, assim, que uma secção idealizada com três “booms” é estaticamente determinada.



## 4. Asas

### 4.1. Casca com três “booms”

Mais tarde vai voltar-se ao caso simples de uma secção com três “booms” quando se examinar as distribuições da carga axial e dos fluxos de corte em nervuras de asa.

Entretanto vai considerar-se a flexão, a torção e o corte de secções de células múltiplas.

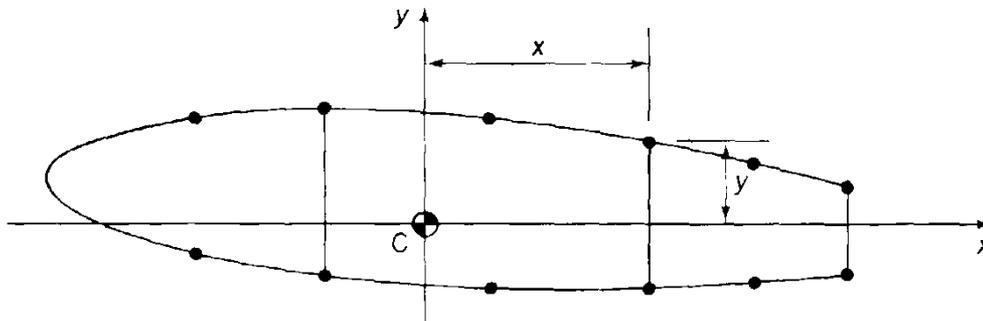


## 4. Asas

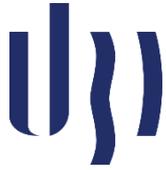
### 4.2. Flexão

Os momentos fletores em qualquer secção de uma asa são geralmente produzidos por cargas de corte aplicadas noutras secções da asa.

O sistema das tensões diretas para tal secção de asa (*figura 4.16*) é dado pela *equação 3.06* onde as coordenadas  $(x,y)$  de qualquer ponto na secção transversal e as propriedades da secção referem-se aos eixos  $Cxy$  em que a origem  $C$  coincide com o centróide das áreas que suportam as tensões diretas.



**Figura 4.16** Secção idealizada de uma asa com múltiplas células.

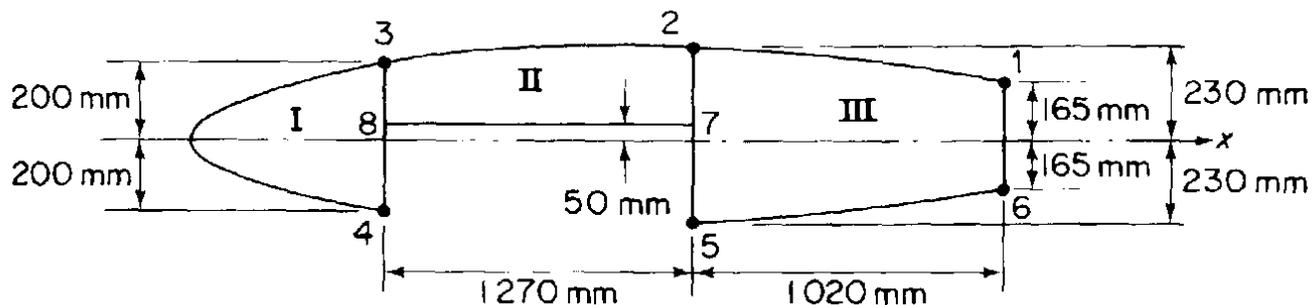


## 4. Asas

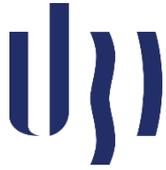
### 4.2. Flexão

**Exemplo 4.08:** A secção de asa da *figura 4.17* foi idealizada de forma a que as tensões diretas sejam todas suportadas pelos “booms”. Se a secção da asa estiver sujeita a um momento fletor de 300 kNm aplicado num plano vertical, determinar as tensões diretas nos “booms”.

Áreas dos “booms”:  $B_1=B_6=2580 \text{ mm}^2$ ,  $B_2=B_5=3880 \text{ mm}^2$ ,  
 $B_3=B_4=3230 \text{ mm}^2$ .



**Figura 4.17** Secção da asa do *exemplo 4.08*.



## 4. Asas

### 4.3. Torção

A distribuição de pressão ao longo da corda numa superfície aerodinâmica pode ser representada por cargas de corte (forças de sustentação e arrasto) atuando através do centro aerodinâmico juntamente com um momento de arfagem  $M_o$ .

Este sistema de forças de corte pode ser transferido para o centro de corte da secção na forma das forças de corte  $S_x$  e  $S_y$  juntamente com um momento torsor  $T$ .

Vai considerar-se aqui o caso da torção pura.

Na análise assume-se que nenhuma restrição axial está presente e que a forma da secção da asa não se modifica devido à carga aplicada.



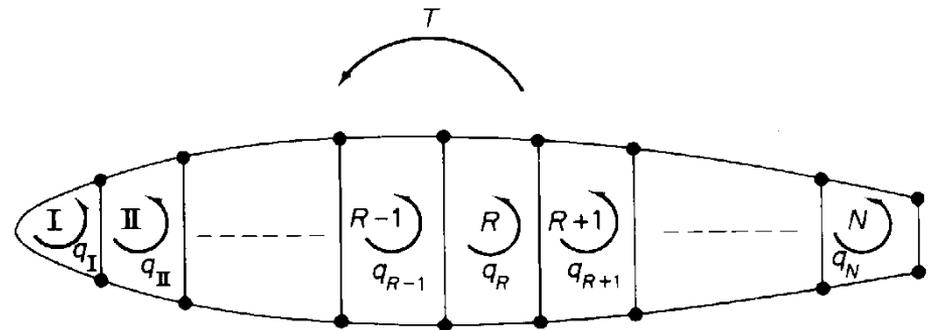
## 4. Asas

### 4.3. Torção

Na ausência da restrição axial não se desenvolvem quaisquer tensões diretas na secção da asa de modo que apenas tensões de corte estão presentes.

Daqui segue-se que a presença dos “booms” não afeta a análise no caso de torção pura.

A secção de asa mostrada na *figura 4.18* possui  $N$  células e está sujeita a um momento torsor  $T$  que gera momentos individuais, mas desconhecidos, em cada uma das  $N$  células.



**Figura 4.18** Secção de asa de células múltiplas sujeita à torção.



## 4. Asas

### 4.3. Torção

Por isso, cada célula está sujeita a fluxos de corte constantes  $q_I, q_{II}, \dots, q_R, \dots, q_N$  dado pela *equação 4.18*.

O momento torsor total é então

$$T = \sum_{R=1}^N 2A_R q_R \quad (4.25)$$

Apesar da *equação 4.25* ser suficiente para a solução do caso especial de uma secção com uma única célula que é, por isso, estaticamente determinada, são necessárias mais equações para uma secção de  $N$  células.

Estas equações são obtidas considerando a razão de torção em cada célula e a condição de compatibilidade de deslocamento em que todas as células possuem a mesma razão de torção.



## 4. Asas

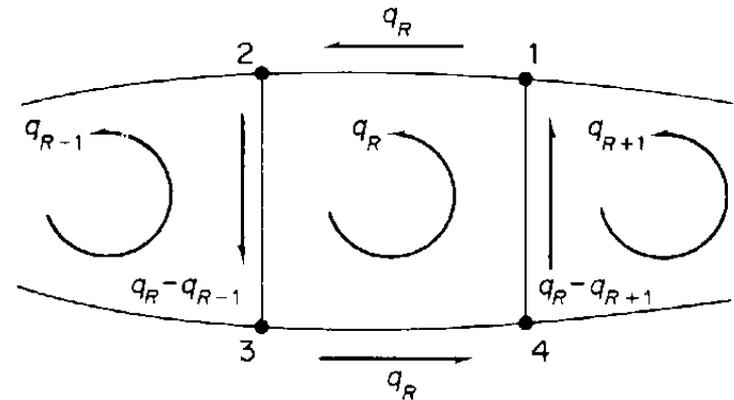
### 4.3. Torção

Isto advém diretamente da condição de que a secção transversal não é distorcida.

Considerando a célula  $R$  da secção da asa na *figura 4.19*, a razão de torção na célula é

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_R G} \oint_R q \frac{ds}{t} \quad (4.26)$$

O fluxo de corte na *equação 4.26* é constante em cada parede da célula e tem os valores representados na *figura 4.19*.



**Figura 4.19** Distribuição do fluxo de corte na célula  $R$  de uma secção de asa de  $N$  células.



## 4. Asas

### 4.3. Torção

Substituindo  $\int ds/t$  em cada parede por  $\delta$ , a equação 4.26 fica

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_R G} [q_R \delta_{12} + (q_R - q_{R-1}) \delta_{23} + q_R \delta_{34} + (q_R - q_{R+1}) \delta_{41}] \quad (4.27)$$

ou, arranjando os termos dentro de parênteses,

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_R G} [-q_{R-1} \delta_{23} + q_R (\delta_{12} + \delta_{23} + \delta_{34} + \delta_{41}) - q_{R+1} \delta_{41}]$$

Em termos gerais esta equação pode exprimir-se na forma

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_R G} (-q_{R-1} \delta_{R-1,R} + q_R \delta_R - q_{R+1} \delta_{R+1,R}) \quad (4.28)$$

onde  $\delta_{R-1,R}$  é  $\int ds/t$  para a parede comum às células  $R$  e  $R-1$ ,  $\delta_R$  é  $\int ds/t$  para todas as paredes envolvendo a célula  $R$  e  $\delta_{R+1,R}$  é  $\int ds/t$  para a parede comum às células  $R$  e  $R+1$ .



## 4. Asas

### 4.3. Torção

A forma geral da *equação 4.28* é aplicável a secções de células múltiplas onde as células estão conectadas consecutivamente, isto é, a célula I é conectada à célula II, a célula II às células I e III, etc.. Nalguns casos, a célula I pode ser conectada às células II e III, etc. de forma que a *equação 4.28* não pode ser usada na sua forma geral.

Para este tipo de secção o termo  $\oint q(ds/t)$  pode ser calculado considerando  $\int q(ds/t)$  para cada parede de uma célula de cada vez.

Existem  $N$  equações do tipo *4.28* que, com a *equação 4.25*, formam as  $N+1$  equações necessárias para obter as  $N$  incógnitas do fluxo de corte e a incógnita de  $d\theta/dz$ .



## 4. Asas

### 4.3. Torção

Na prática, é frequente fabricar os painéis do revestimento e as almas das longarinas com materiais que possuem propriedades diferentes de modo que o módulo de corte  $G$  não é constante.

A análise de tais secções é simplificada se a espessura real,  $t$ , da parede for convertida numa espessura ponderada pelo módulo de corte,  $t^*$ .

Para a célula  $R$  de uma secção de asa de  $N$  células onde  $G$  varia de parede para parede a equação 4.26 toma a forma

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_R} \oint_R q \frac{ds}{Gt}$$

Esta equação pode escrever-se

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_R G_{REF}} \oint_R q \frac{ds}{(G/G_{REF})t} \quad (4.29)$$



## 4. Asas

### 4.3. Torção

onde  $G_{REF}$  é um valor do módulo de corte conveniente.

A equação 4.29 fica assim

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_R G_{REF}} \oint_R q \frac{ds}{t^*} \quad (4.30)$$

onde a espessura ponderada pelo módulo,  $t^*$ , é dada por

$$t^* = \left( \frac{G}{G_{REF}} \right) t \quad (4.31)$$

Então, na equação 4.28,  $\delta$  torna-se

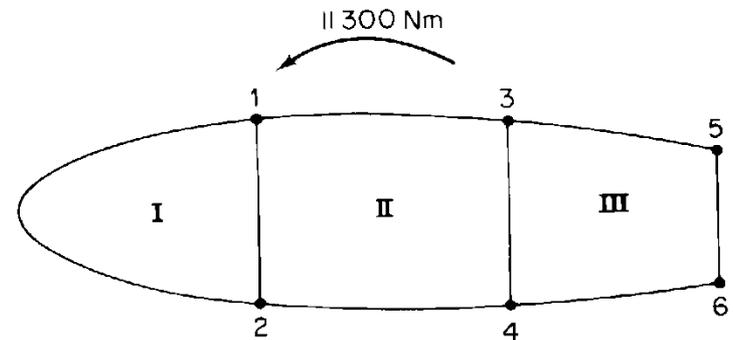
$$\delta = \int \frac{ds}{t^*}$$



## 4. Asas

### 4.3. Torção

**Exemplo 4.09:** Calcular a distribuição da tensão de corte nas paredes da secção de asa de três células da *figura 4.20* quando sujeita a um momento torsor de 11,3 kNm no sentido anti-horário.



**Figura 4.20** Secção da asa do *exemplo 4.09*.

Parede	Comprimento [mm]	Espessura [mm]	G [N/mm <sup>2</sup> ]	Área da célula [mm <sup>2</sup> ]
12 <sup>ext</sup>	1650	1,22	24200	$A_I = 258000$
12 <sup>int</sup>	508	2,03	27600	$A_{II} = 355000$
13, 24	775	1,22	24200	$A_{III} = 161000$
34	380	1,63	27600	
35, 46	508	0,92	20700	
56	254	0,92	20700	

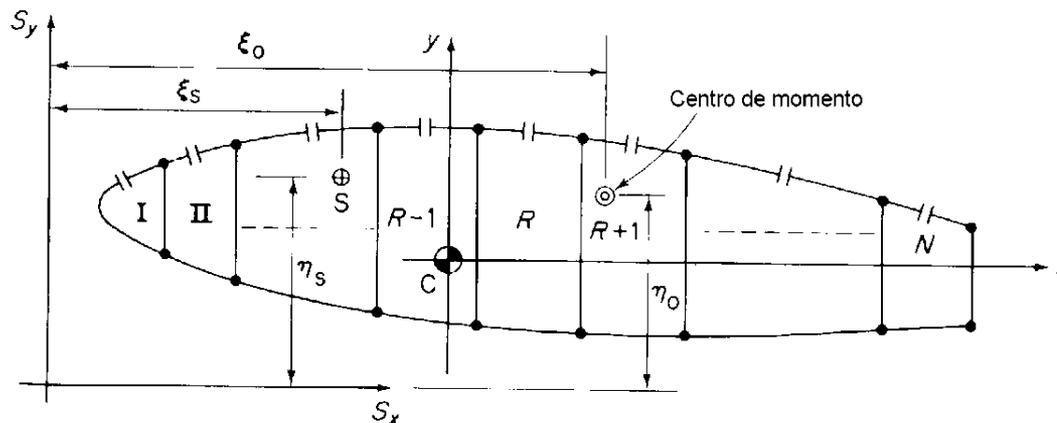


## 4. Asas

### 4.4. Corte

Inicialmente vai considerar-se o caso geral de uma secção de asa com  $N$  células constituída por “booms” e painéis de revestimento, sendo estes capazes de suportar tanto tensões diretas quanto tensões de corte.

A secção da asa é sujeita a cargas de corte  $S_x$  e  $S_y$  cujas linhas de ação não passam necessariamente pelo centro de corte  $S$  (ver *figura 4.21*); a distribuição do fluxo de corte resultante é assim uma combinação dos efeitos do corte e da torção.

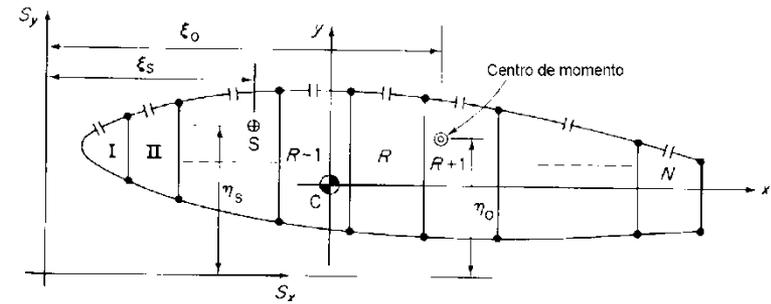


**Figura 4.21** Secção de asa com  $N$  células sujeita a cargas de corte.



## 4. Asas

### 4.4. Corte



O método para determinar a distribuição do fluxo de corte e a razão de torção é baseado na análise de uma viga de uma célula sujeita a cargas de corte.

Tal viga é estaticamente determinada, sendo a única redundância selecionada como o valor do fluxo de corte num “corte” posicionado arbitrariamente.

Assim, a secção de  $N$  células da *figura 4.21* pode tornar-se estaticamente determinada se for “cortada” num painel de cada célula, como mostra a figura.

A posição destes “cortes” é teoricamente irrelevante mas existem vantagens, do ponto de vista numérico, em “cortar” cada célula ao centro do seu painel superior ou inferior.



## 4. Asas

### 4.4. Corte

Geralmente nestes pontos os fluxos de corte redundantes  $q_{s,o}$  são pequenos de forma que os fluxos de corte finais diferem apenas ligeiramente daqueles da estrutura determinada.

O sistema de equações simultâneas que permite determinar os fluxos de corte finais será, assim, “bem comportado” e produzirá resultados fiáveis.

A solução de um sistema de equações “mal comportado” envolveria, provavelmente, a subtracção de valores elevados com magnitudes semelhantes que teriam que ser expressos com muitos algarismos significativos para se obter uma precisão razoável.



## 4. Asas

### 4.4. Corte

Apesar deste argumento não se aplicar a uma secção de asa completamente idealizada, uma vez que o fluxo de corte é constante entre os “booms”, é vantajoso na mesma “cortar” o painel superior ou inferior para que, no caso especial de se ter uma secção com um eixo de simetria horizontal, um “corte” no painel superior, por exemplo, resulte em fluxos de corte da “secção aberta”  $q_b$  nulos nos painéis inferiores.

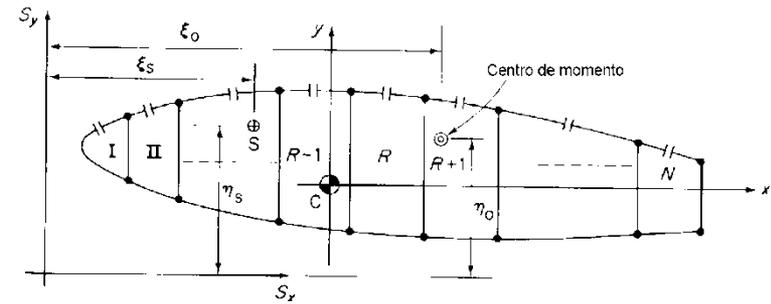
Isto reduz grandemente o esforço de cálculo e simplifica a derivação da equação do momento, como se verá no *exemplo 4.09*.





## 4. Asas

### 4.4. Corte



O fluxo de corte da “secção aberta”  $q_b$  na secção da asa da *figura 4.21* é dado pela *equação 3.75*, isto é

$$q_b = - \left( \frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left( \int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) - \left( \frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left( \int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) \quad (3.75)$$

Fica-se, então, com uma incógnita do fluxo de corte em cada um dos “cortes”,  $q_{s,0,I}$ ,  $q_{s,0,II}$ ,  $\dots$ ,  $q_{s,0,N}$  mais a incógnita da razão de torção  $d\theta/dz$  que, da condição de que a secção não é distorcida, é igual para todas as células.

Tem-se assim, à semelhança do caso da torção,  $N+1$  incógnitas que necessitam de  $N+1$  equações para se obter uma solução.



## 4. Asas

### 4.4. Corte

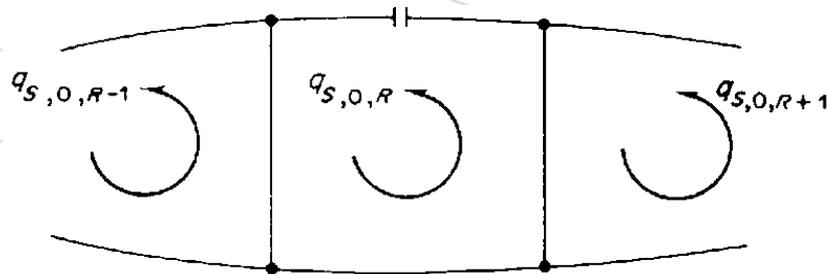
Considere-se a célula  $R$  mostrada na *figura 4.22*.

A distribuição completa do fluxo de corte em volta da célula é dada pela soma dos fluxos de corte da “secção aberta”,  $q_b$ , e o valor do fluxo de corte no “corte”,  $q_{s,0,R}$ .

Pode, então, considerar-se  $q_{s,0,R}$  como um fluxo de corte constante que atua em torno da célula.

A razão de torção é dada novamente pela equação

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_R G} \oint_R q \frac{ds}{t} = \frac{1}{2A_R G} \oint_R (q_b + q_{s,0,R}) \frac{ds}{t}$$



**Figura 4.22** Fluxo de corte redundante na célula  $R$  de uma asa de  $N$  células sujeita ao corte.



## 4. Asas

### 4.4. Corte

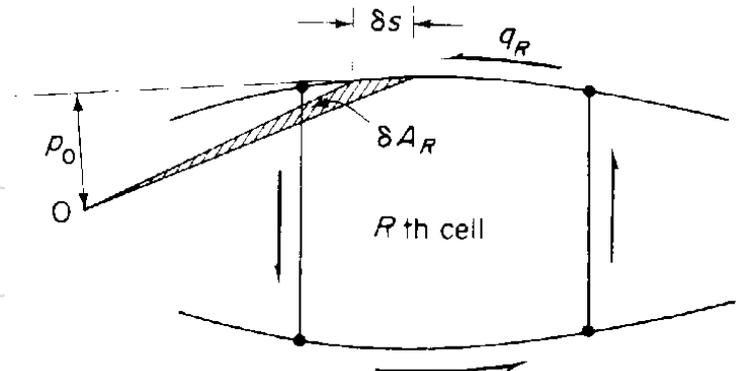
Comparando com o caso do momento torsor puro deduz-se que

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_R G_{REF}} \left( -q_{s,0,R-1} \delta_{R-1,R} + q_{s,0,R} \delta_R - q_{s,0,R+1} \delta_{R+1,R} + \int_R q_b \frac{ds}{t^*} \right) \quad (4.32)$$

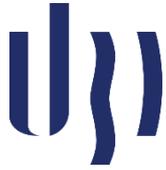
onde  $q_b$  é determinado previamente.

Existem  $N$  equações do tipo da *equação 4.32* por isso é necessária mais uma equação para se obterem os valores das  $N+1$  incógnitas.

Esta obtém-se considerando o equilíbrio de momentos na célula  $R$  na *figura 4.23*.



**Figura 4.23** Equilíbrio de momentos na célula  $R$ .



## 4. Asas

### 4.4. Corte

O momento  $T_{q,R}$  produzido pelo fluxo de corte total em torno de um centro de momento conveniente O é dado por

$$T_{q,R} = \oint q_R p_0 ds \quad (4.33)$$

Substituindo para  $q_R$  em termos do fluxo de corte da “secção aberta”  $q_b$  e o fluxo de corte redundante  $q_{s,0,R}$  tem-se

$$T_{q,R} = \oint q_b p_0 ds + q_{s,0,R} \oint_R p_0 ds$$

ou

$$T_{q,R} = \oint q_b p_0 ds + 2A_R q_{s,0,R}$$

Recordando:

$$\delta A_R = \frac{1}{2} \delta s \cdot p_0 \Leftrightarrow \oint dA_R = \frac{1}{2} \oint p_0 \cdot ds \Leftrightarrow \oint p_0 \cdot ds = 2A_R$$



## 4. Asas

### 4.4. Corte

A soma dos momentos de cada célula é equivalente ao momento das cargas aplicadas externamente em torno do mesmo ponto.

Assim para a secção de asa da *figura 4.21*

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \sum_{R=1}^N T_{q,R} = \sum_{R=1}^N \oint_R q_R p_0 ds + \sum_{R=1}^N 2A_R q_{s,0,R} \quad (4.34)$$

Se o centro de momento for escolhido de forma a ser coincidente com o ponto de interseção das linhas de ação de  $S_x$  e  $S_y$  a *equação 4.34* fica

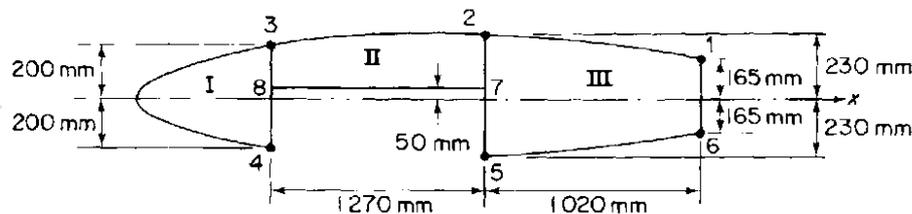
$$0 = \sum_{R=1}^N T_{q,R} = \sum_{R=1}^N \oint_R q_R p_0 ds + \sum_{R=1}^N 2A_R q_{s,0,R} \quad (4.35)$$



## 4. Asas

### 4.4. Corte

**Exemplo 4.10:** A secção de asa do exemplo 4.08 (figura 4.17) suporta uma força vertical positiva de 86,8 kN no plano da alma 572. A secção está idealizada de forma que os “booms” suportam todas as tensões diretas e as paredes suportam apenas as tensões de corte. Se o módulo de corte de todas as paredes for  $27600\text{N/mm}^2$  exceto o da parede 78 que é três vezes maior, calcular a distribuição do fluxo de corte na secção e a razão de torção.



Parede	Comprimento [mm]	Espessura [mm]	Área da célula [mm <sup>2</sup> ]
12, 56	1023	1,22	$A_I = 265000$
23	1274	1,63	$A_{II} = 213000$
34	2200	2,03	$A_{III} = 413000$
483	400	2,64	
572	460	2,64	
61	330	1,63	
78	1270	1,22	



## 4. Asas

### 4.4. Corte

**Exemplo 4.10 (continuação):** Áreas dos “booms”:  
 $B_1=B_6=2580\text{mm}^2$ ,  $B_2=B_5=3880\text{mm}^2$ ,  $B_3=B_4=3230\text{mm}^2$ .



## 4. Asas

### 4.5. Centro de corte

A posição do centro de corte de uma secção de asa é calculada de um modo idêntico ao descrito no capítulo anterior.

São aplicadas forças de corte arbitrárias  $S_x$  e  $S_y$ , uma de cada vez, através do centro de corte  $S$ , calcula-se a distribuição do fluxo de corte resultante e tiram-se momentos em torno de um ponto conveniente.

As distribuições do fluxo de corte são obtidas como descrito acima para secções de células múltiplas, mas neste caso as  $N$  equações do tipo da *equação 4.32* são suficientes para se obter uma solução, uma vez que a razão de torção é nula para cargas aplicadas no centro de corte.



## 4. Asas

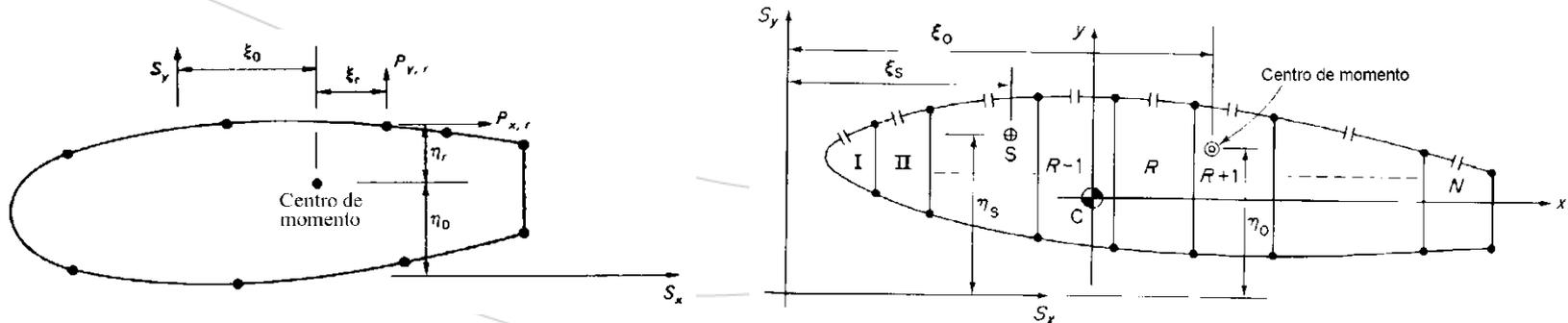
# 4.6. Asas com afilamento

As asas são geralmente afiladas.

Os efeitos do afilamento na análise de uma secção de asa com uma célula foram vistos na *secção 4.2*.

Numa secção de asa com células múltiplas a análise é semelhante excetuando a equação dos momentos 4.16 que, para uma secção de  $N$  células, fica (ver *figuras 4.05 e 4.21*)

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \sum_{R=1}^N \oint_R q_R p_0 ds + \sum_{R=1}^N 2A_R q_{s,0,R} - \sum_{r=1}^m P_x \eta_r - \sum_{r=1}^m P_y \xi_r \quad (4.36)$$





## 4. Asas

### 4.6. Asas com afilamento

**Exemplo 4.11:** Uma viga de duas células tem secções simétricas, afila simetricamente na direção do  $y$  em relação a um eixo longitudinal e mede 1,2 m de comprimento (*figura 4.24*). A viga suporta cargas que produzem uma força de corte e um momento fletor na secção maior. A carga de corte está aplicada no plano da alma da longarina interna. Se os “booms” 1 e 6 estiverem num plano paralelo ao plano  $zy$ , calcular as forças nos “booms” e a distribuição do fluxo de corte nas paredes da secção maior. Os “booms” suportam todas as tensões diretas enquanto que as paredes só são efetivas no corte. O módulo de corte é constante em todas as paredes, as almas verticais têm 1 mm de espessura e o resto das paredes têm 0,8 mm.

Áreas dos “booms”:  $B_1=B_3=B_4=B_6=600\text{mm}^2$  e  $B_2=B_5=900\text{mm}^2$ .



## 4. Asas

# 4.6. Asas com afilamento

### Exemplo 4.11 (continuação):

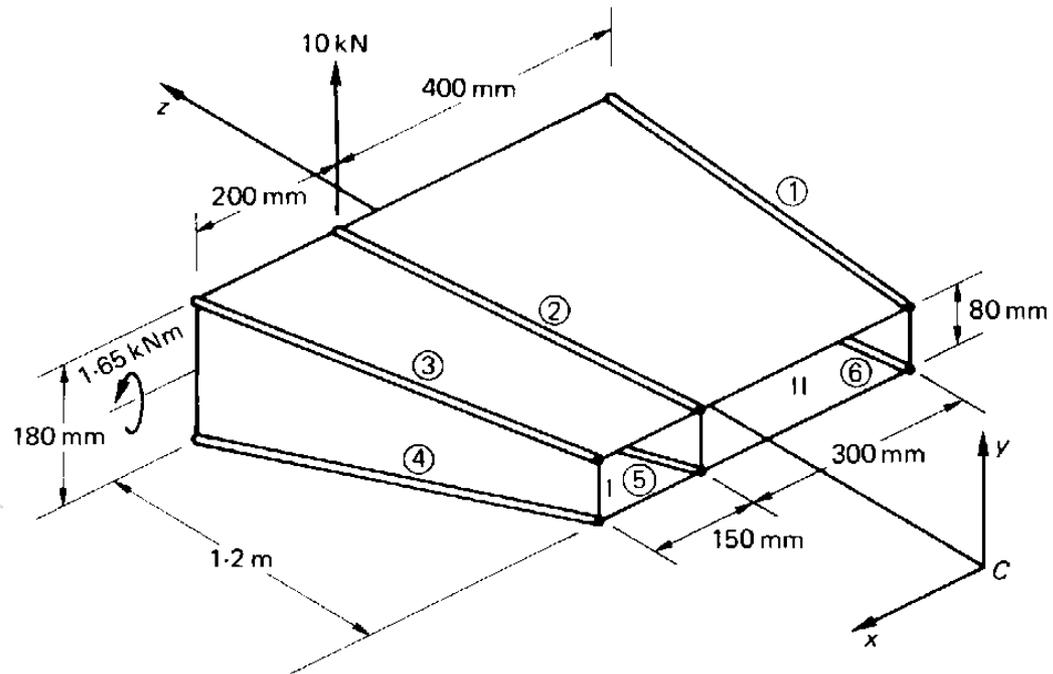


Figura 4.24 Viga afilada do exemplo 4.11.



## 4. Asas

# 4.7. Deflexões

As deflexões de asas de células múltiplas podem ser calculadas pelo método da carga unitária, de uma forma idêntica àquela descrita no capítulo anterior para secções abertas e de uma única célula.



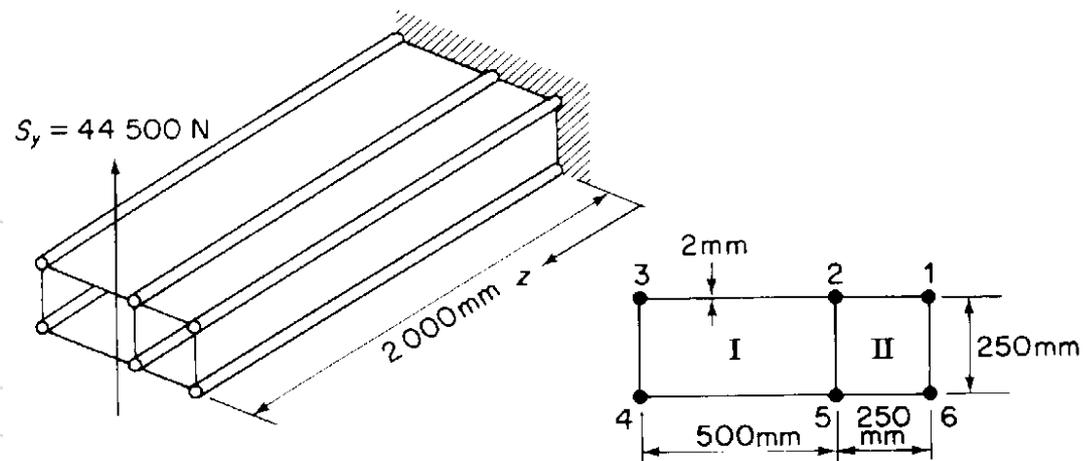
## 4. Asas

### 4.7. Deflexões

**Exemplo 4.12:** Calcular a deflexão na ponta livre da viga com duas células da *figura 4.25* tendo em conta os efeitos da flexão e do corte. Os “booms” suportam todas as tensões diretas e a casca, de espessura constante, suporta apenas as tensões de corte.

$$E=69000\text{N/mm}^2, G=25900\text{N/mm}^2.$$

$$\text{Áreas dos “booms”}: B_1=B_3=B_4=B_6=650\text{mm}^2, B_2=B_5=1300\text{mm}^2.$$



**Figura 4.25** Deflexão de uma secção de asa de duas células.



## 4. Asas

### 4.8. Aberturas nas asas

As asas, tal como as fuselagens, têm aberturas nas suas superfícies para trens de aterragem retráteis, tanques de combustível, nacelas de motores ou instalações de armamento, entre outras.

Outras aberturas permitem acesso para inspeção e manutenção. Assim, as forças em porções adjacentes das aberturas da asa são modificadas.

Inicialmente ir-se-á considerar o caso de uma asa sujeita a um momento torsor puro em que a casca inferior de um dos compartimentos da asa foi removida.

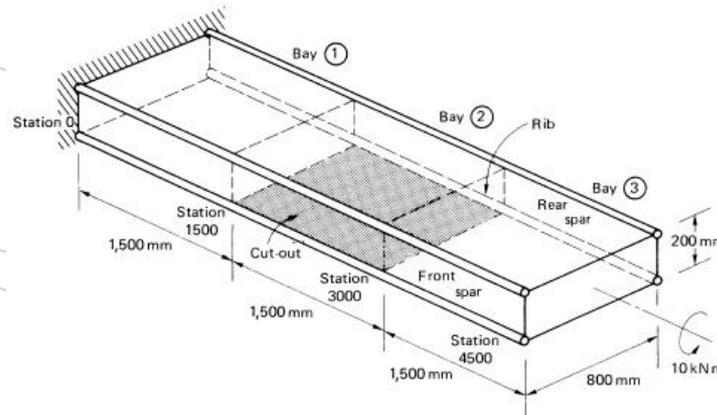
O método é mais facilmente entendido com um exemplo numérico.



## 4. Asas

### 4.8. Aberturas nas asas

**Exemplo 4.13:** A porção estrutural de uma asa consiste numa caixa retangular com três compartimentos e está firmemente fixa à fuselagem do avião em todos os pontos da periferia interna. O revestimento do intradorso do compartimento central foi removido e a asa está sujeita a um momento torsor de 10 kNm na ponta livre. Calcular os fluxos de corte nos painéis do revestimento e nas almas das longarinas, as cargas nas mesas e as forças nas nervuras de cada lado da abertura, assumindo que as mesas das longarinas suportam todas as cargas diretas e que a casca suporta apenas o corte.





## 4. Asas

### 4.8. Aberturas nas asas

#### Exemplo 4.13 (continuação):

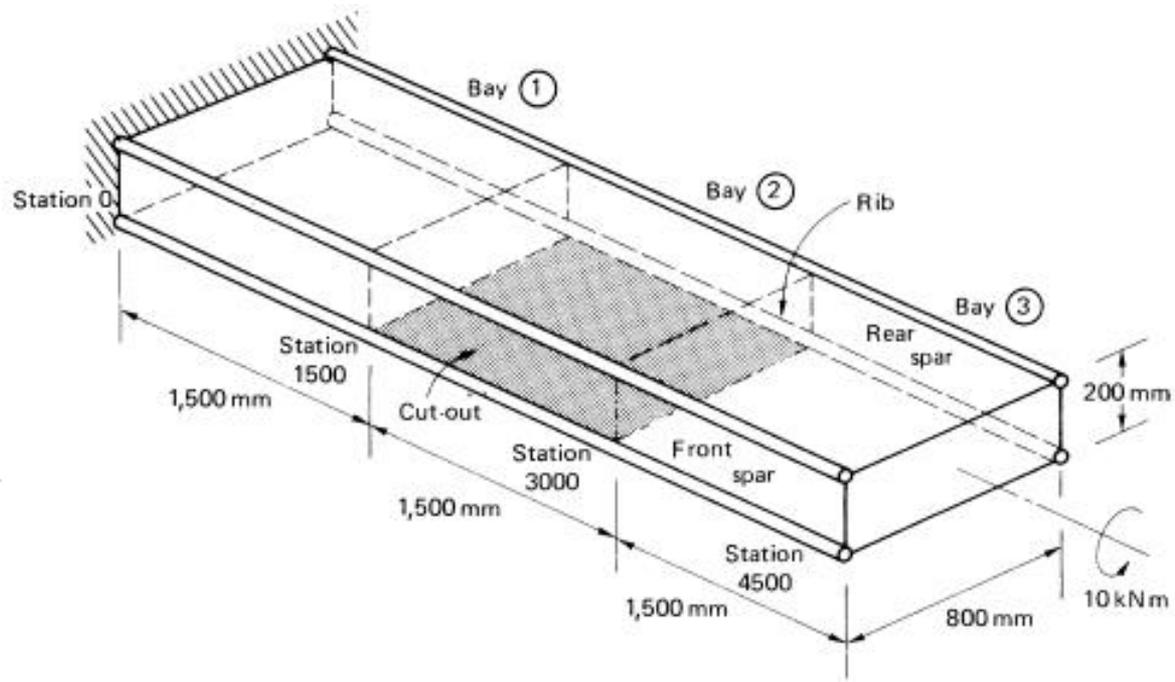


Figura 4.26 Estrutura da asa com três compartimentos e uma abertura do exemplo 4.13.



## 4. Asas

### 4.8. Aberturas nas asas

No *exemplo 4.13* assumiu-se simplesmente que os efeitos locais da abertura são completamente dissipados dentro do comprimento dos compartimentos contíguos que tinham o mesmo comprimento que o compartimento da abertura.

A validade deste argumento baseia-se no princípio de St. Venant.

De um modo geral pode assumir-se que os efeitos de uma abertura estão restringidos a uma distância ao longo da envergadura igual ao comprimento da abertura em ambos os lados do compartimento da abertura.

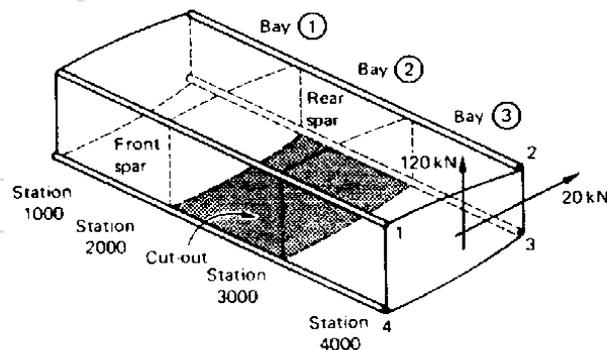
Agora pode considerar-se o caso mais complexo de uma asa com uma abertura que está sujeita a cargas de corte que produzem flexão e torção. O método é novamente ilustrado com um exemplo numérico.



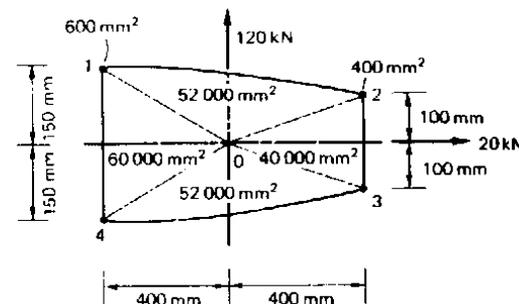
## 4. Aberturas

### 4.8. Aberturas nas asas

**Exemplo 4.14:** Uma caixa de torção de uma asa tem uma abertura no intradorso entre as estações 2000 e 3000 e suporta forças de sustentação e de arrasto que são constantes entre as estações 1000 e 4000 como mostra a *figura 4.27(a)*. Determinar os fluxos de corte nos painéis do revestimento e nas almas das longarinas e também as cargas nas nervuras das estações 2000 e 3000. Assumir que todos os momentos fletores são resistidos pelas mesas das longarinas e que o revestimento e as almas das longarinas suportam apenas o corte.



(a)



(b)



## 4. Asas

### 4.8. Aberturas nas asas

#### Exemplo 4.14 (continuação):

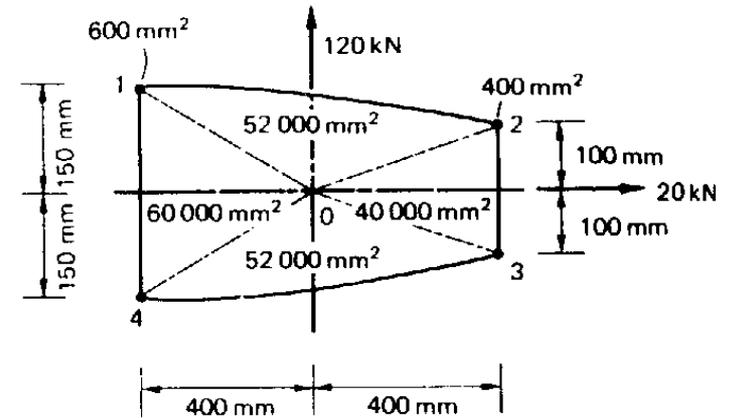
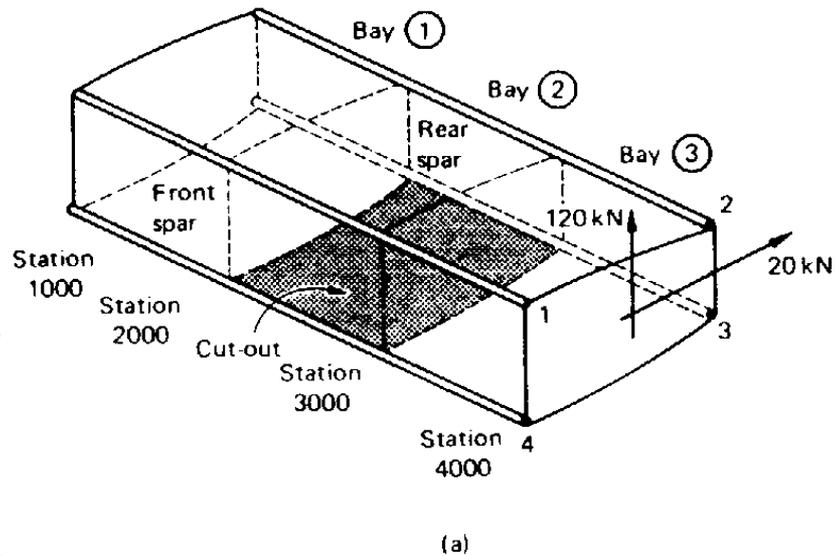


Figura 4.27 Caixa de torção da asa do exemplo 4.14.



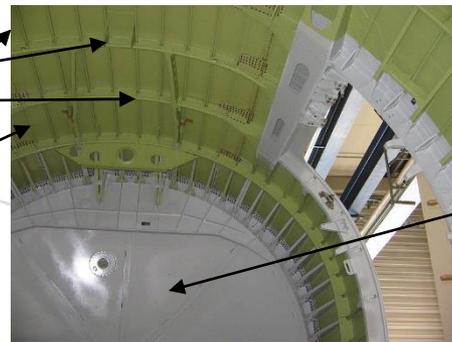
## 5. Cavernas e Nervuras

Os aviões são construídos geralmente com cascas de metal que são capazes de resistir cargas de tração e de corte no seu próprio plano, mas que flambam quando sujeitas a cargas compressivas relativamente pequenas no seu próprio plano.

Os revestimentos são, por isso, reforçados por tensores longitudinais que resistem às cargas compressivas coplanares e, ao mesmo tempo, resistem pequenas cargas distribuídas normais ao plano do revestimento.

Cavernas/*Frames*

Longarinas/*Longerons*  
ou  
Tensores/*Stringers*



Antepara/*Bulkhead*



## 5. Cavernas e Nervuras

O comprimento efetivo dos tensores em compressão é reduzido, no caso das fuselagens, pela presença de cavernas transversais ou, no caso das asas, por nervuras.

Além disto, as cavernas e as nervuras resistem cargas transversais concentradas e transmitem-nas aos tensores e ao plano do revestimento.

Assim, as asas podem ser fixas a cavernas da fuselagem nas mesas das longarinas e as cargas do trem de aterragem são transmitidas para a asa através das longarinas e pontos de fixação nas nervuras.



## 5. Cavernas e Nervuras

# 5.1. Princípios de fabricação de reforços/almas

Geralmente as próprias cavernas e as nervuras são fabricadas com folhas de metal (ou de compósito) finas e por isso necessitam de membros de reforço para distribuir as cargas concentradas para as almas.

Se a carga for aplicada no plano da alma os membros de reforço devem estar alinhados com a direção da carga.

Alternativamente, caso isto não seja possível, a carga deve ser aplicada na interseção de dois reforços por forma a que cada reforço resista à componente da carga na sua direção.

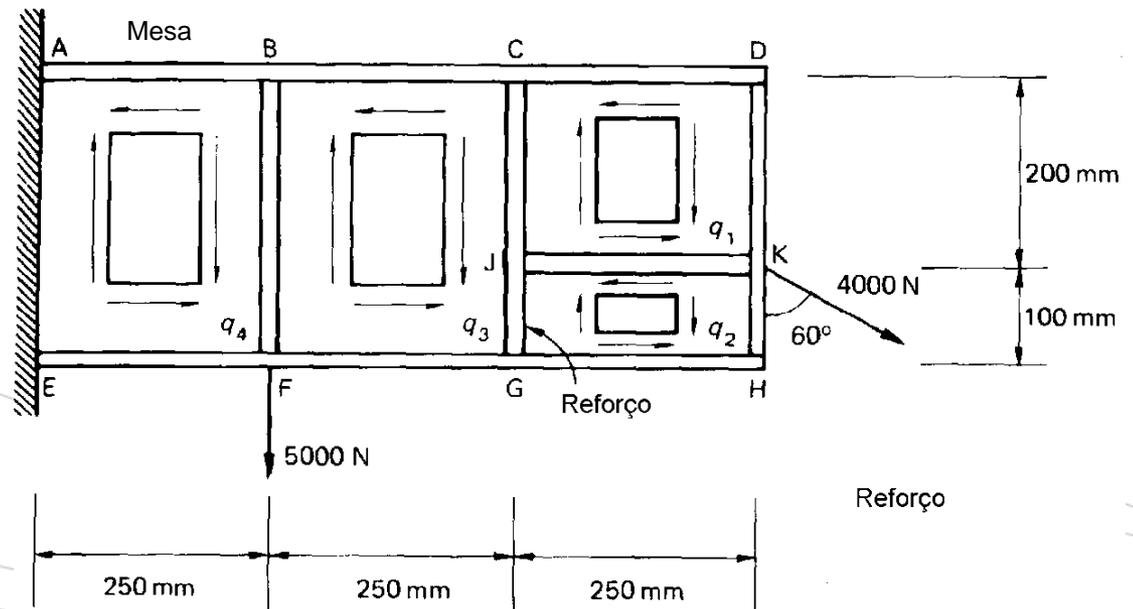
Os princípios básicos da construção de reforços e almas estão exemplificados no exemplo seguinte.



## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.1. Princípios de fabricação de reforços/almas

**Exemplo 4.15:** Uma viga encastrada suporta duas forças concentradas como mostra a figura. Calcular a distribuição das cargas nos reforços e a distribuição do fluxo de corte nos painéis da alma assumindo que estes suportam apenas o corte.



**Figura 4.28** Viga suspensa do exemplo 4.15.



## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.1. Princípios de fabricação de reforços/almas

Na análise do exemplo acima assume-se que os painéis da alma em vigas do tipo representado na *figura 4.28* resistem corte puro ao longo dos seus limites.

Almas finas podem flambar mediante a ação de tais cargas de corte criando campos de tensão que, por sua vez, induzem cargas adicionais nos reforços e nas mesas das vigas.

O campo de tensão pode ser calculado separadamente e posteriormente adicionado às tensões determinadas como descrito acima.

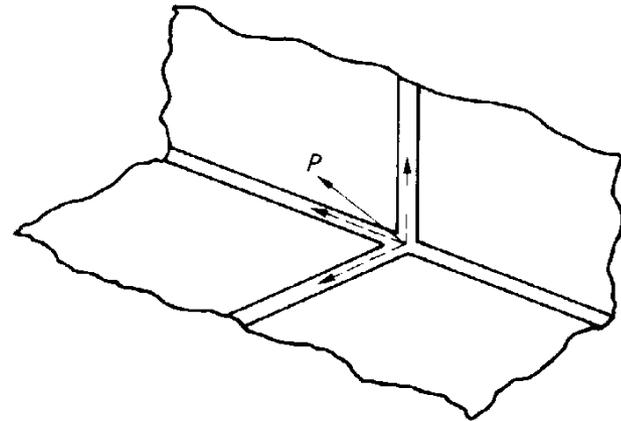
Até agora tem-se visto combinações de almas e reforços onde as cargas são aplicadas no plano da alma de forma que os reforços são suficientes para resistir às componentes de uma força concentrada.



## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.1. Princípios de fabricação de reforços/almas

As cargas possuem, frequentemente, uma componente não coplanar o que requer uma estrutura em que duas almas se encontrem no ponto de aplicação da força com reforços alinhados com as três direções das componentes da força (*figura 4.29*).



**Figura 4.29** Arranjo estrutural para uma carga não coplanar.

Em alguns casos não é possível fazer com que as almas se encontrem no ponto de aplicação da força e por isso usa-se um componente perpendicular à alma.

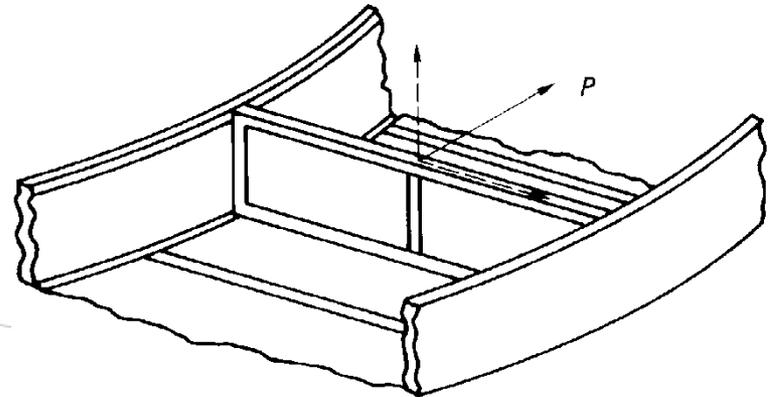


## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.1. Princípios de fabricação de reforços/almas

Se este componente for pequeno, ele pode resistir à flexão por meio de um reforço coplanar, caso contrário é necessário um novo membro que una cavernas ou nervuras adjacentes como mostra a *figura 4.30*.

Em geral não se devem aplicar cargas normais numa alma não suportada, independentemente da sua magnitude.



**Figura 4.30** Suporte de uma força com uma componente normal à alma.



## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.2. Cavernas de fuselagens

Já se viu que as cavernas das fuselagens transferem cargas para o revestimento da fuselagem e proporcionam suporte aos tensores longitudinais.

As cavernas tomam, geralmente, a forma de anéis abertos por forma a desimpedir o interior da fuselagem.

Elas estão ligadas continuamente à casca da fuselagem em torno do seu perímetro e não são necessariamente circulares mas a maior parte das vezes são simétricas em relação a um eixo vertical.

Uma caverna está em equilíbrio quando sujeita à ação de qualquer força externa e aos fluxos de corte de reação da casca da fuselagem.

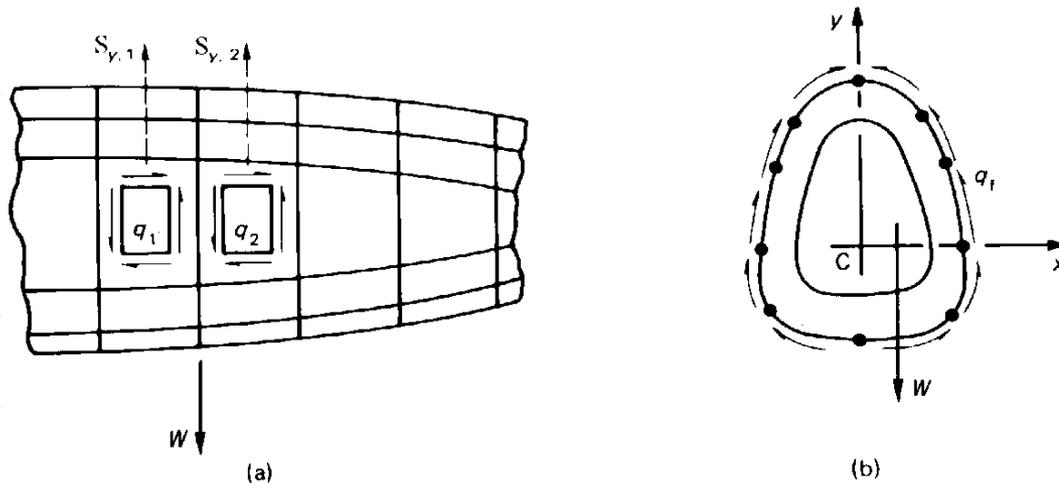


## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.2. Cavernas de fuselagens

Suponha-se que uma caverna tem um eixo vertical de simetria e que suporta uma carga externa vertical  $W$  como mostra a *figura 4.31*.

A secção da fuselagem com revestimento e tensores foi idealizada de forma a que o revestimento suporte apenas o corte.



**Figura 4.31** Cargas numa caverna de fuselagem.



## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.2. Cavernas de fuselagens

Suponha-se também que a força de corte na fuselagem imediatamente à esquerda da caverna é  $S_{y,1}$  e que a força de corte imediatamente à direita da caverna é  $S_{y,2}$ .

Então

$$S_{y,2} = S_{y,1} - W$$

$S_{y,1}$  e  $S_{y,2}$  geram distribuições de corte  $q_1$  e  $q_2$ , respetivamente, na pele da fuselagem, cada uma dada pela *equação 4.17* onde  $S_{x,1} = S_{x,2} = 0$  e  $I_{xy} = 0$  ( $Cy$  é um eixo de simetria).

O fluxo de corte  $q_f$  transmitido para a periferia da caverna é igual à soma algébrica de  $q_1$  e  $q_2$ , isto é

$$q_f = q_1 - q_2$$



## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.2. Cavernas de fuselagens

Assim, substituindo para  $q_1$  e  $q_2$ , obtidos da *equação 4.17*

$$q_s = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right) \sum_{r=1}^n B_r x_r - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right) \sum_{r=1}^n B_r y_r + q_{s,0}$$

e sabendo que  $S_{y,2} = S_{y,1} - W$  tem-se

$$q_f = -\frac{W}{I_{xx}} \sum_{r=1}^n B_r y_r + q_{s,0}$$

onde  $q_{s,0}$  é calculado com a *equação 3.37*, a força de corte é  $W$  e

$$q_b = -\frac{W}{I_{xx}} \sum_{r=1}^n B_r y_r$$

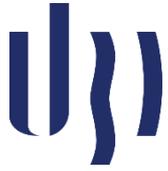
O método para determinar a distribuição do fluxo de corte aplicado na periferia duma caverna de fuselagem é idêntico ao método (ou o método alternativo) do *exemplo 4.05*.



## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.2. Cavernas de fuselagens

Tendo determinado a distribuição do fluxo de corte em torno da periferia da caverna, a própria caverna pode ser analisada para os momentos fletores, as forças de corte e as forças normais.

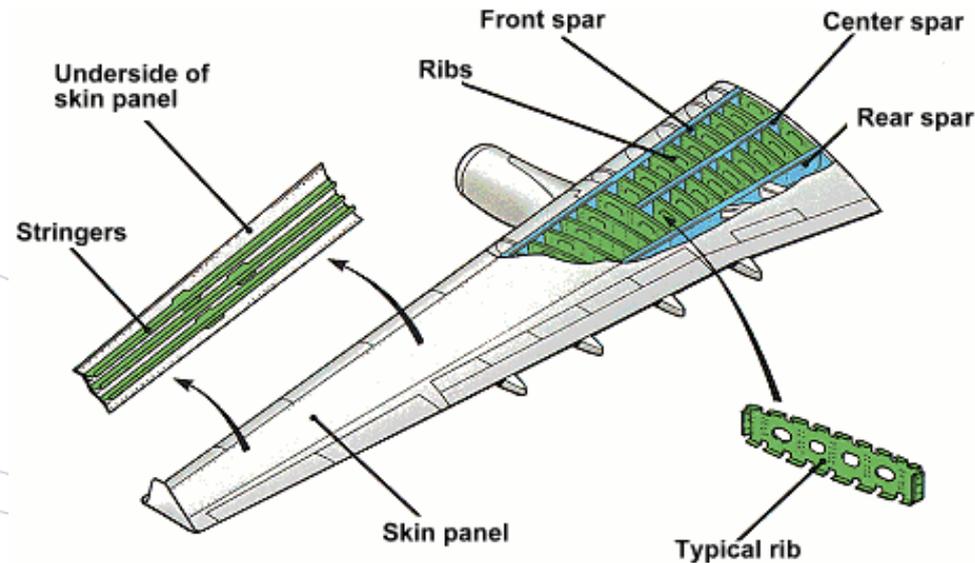


## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.3. Nervuras de asas

As nervuras de asas desempenham um papel similar àquele das cavernas de fuselagens.

Elas mantêm a forma da secção da asa, ajudam na transmissão de cargas externas para a pele da asa e reduzem o comprimento dos tensores.





## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.3. Nervuras de asas

A sua geometria, no entanto, é normalmente diferente pois são frequentemente de forma assimétrica e possuem almas que são contínuas exceto quando têm aberturas para redução de peso e para a passagem dos comandos.

As nervuras de asa são sujeitas a sistemas de cargas semelhantes àqueles aplicados nas cavernas de fuselagens.

As cargas externas aplicadas no plano da nervura produzem uma mudança na força de corte na asa através da nervura; isto induz fluxos de corte de reação em volta da sua periferia.

Estes fluxos de corte são calculados usando o método descrito na *secção 3*.



## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.3. Nervuras de asas

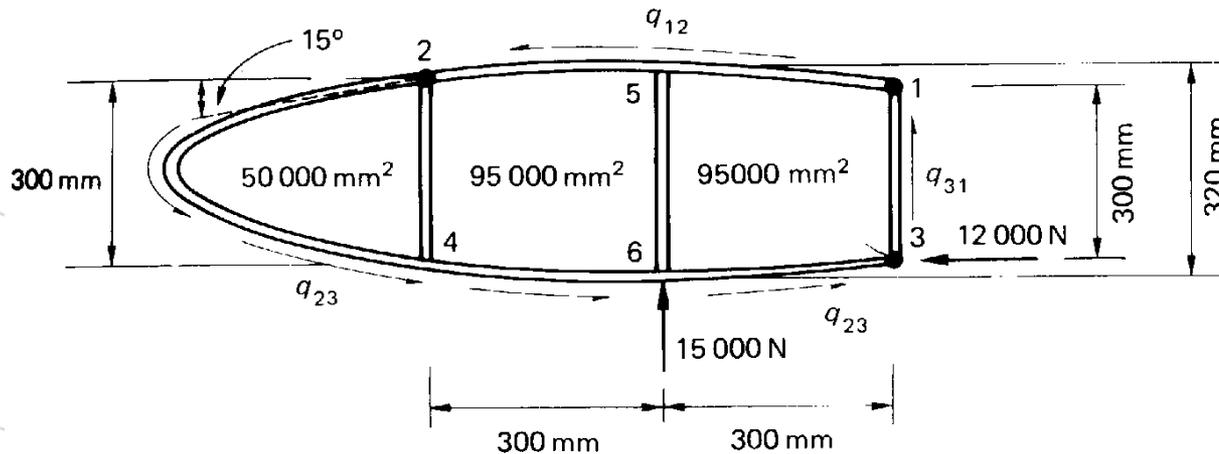
Para ilustrar este método de análise de nervuras vai ver-se um exemplo com uma secção de asa com três mesas em que, como se viu na *secção 3*, a distribuição do fluxo de corte é estaticamente determinada.



## 5. Cavernas e Nervuras

### 5.3. Nervuras de asas

**Exemplo 4.16:** Calcular os fluxos de corte nos painéis da alma e as cargas axiais nas mesas da nervura da asa mostrada na *figura 4.32*. Assumir que a alma da nervura suporta apenas o corte e que a resistência da asa aos momentos fletores é devida inteiramente às três mesas 1, 2 e 3.



**Figura 4.32** Nervura da asa do *exemplo 4.16*.