



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Covilhã | Portugal

Análise de Estruturas

Estruturas Aeroespaciais I (10362)

2023

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais

Tópicos

- Estruturas de parede fina:
 - Esforços de flexão
 - Esforços de corte e torção em vigas de secção aberta e fechada
 - Idealização estrutural
 - Exemplos

1. Introdução

Um avião é, basicamente, um conjunto de elementos estruturais em casca reforçada, desde células fechadas simples de secções de fuselagem até asas e empenagens multicelulares, sujeitas a flexão, corte, torção e forças axiais.

Outros elementos da estrutura mais pequenos consistem em tensores de parede fina - secções em T, Z, I e “chapéu” - que são usadas para reforçar os revestimentos dos componentes celulares e suportar esforços internos vindos do chão, suportes do motor, etc..

Estes membros estruturais são conhecidos como vigas de *secção aberta* enquanto que os componentes celulares são vigas de *secção fechada*; obviamente ambos os tipos de viga estão sujeitos a esforços axiais, fletores, torsões e de corte.

1. Introdução



asa



fuselagem

1. Introdução

Neste capítulo vão ser investigadas as tensões e as deflexões que surgem nas vigas de parede fina, com secção aberta ou secção fechada e com uma só célula, resultantes de esforços de flexão, corte e torção.

Também vai ser analisada a idealização destas secções quando elas são reforçadas com tensores.

2. Flexão de vigas de parede fina

Vai mostrar-se que o valor da tensão direta num ponto da secção transversal de uma viga sujeita a flexão depende da posição do ponto, do esforço aplicado e das propriedades geométricas da secção.

Daqui resulta que o facto de a secção ser aberta ou fechada não tem qualquer influência.

Desta forma deriva-se a teoria para uma viga com uma secção transversal arbitrária e seguidamente explora-se a sua aplicação em vigas de paredes finas com secção aberta e fechada sujeitas a momentos fletores.

A condição básica da teoria é que secções transversais planas na viga permanecem planas após o deslocamento provocado pelo esforço aplicado.

2. Flexão de vigas de parede fina

Além disto, para simplificar, assume-se que o material da viga é homogéneo e linearmente elástico.

No entanto, antes da derivação da expressão de distribuição das tensões diretas numa viga sujeita à flexão é necessário estabelecer uma convenção de sinais para os momentos, forças, e deslocamentos, investigar o efeito da escolha da secção nas direcções positivas destes parâmetros e determinar as componentes do momento fletor aplicado em qualquer plano longitudinal.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.1. Notação e convenção de sinais

As forças, os momentos e os deslocamentos referem-se a um sistema de eixos arbitrário $Oxyz$ dos quais Oz é paralelo ao eixo longitudinal da viga e Oxy são os eixos no plano da secção transversal.

Os símbolos M , S , P , T e w atribuem-se ao momento fletor, força de corte, força axial ou direta, momento de torção e esforço distribuído, respetivamente, com índice quando necessário para indicar o sentido ou a direção.

Assim M_x é o momento fletor em torno do eixo x , S_x é uma força de corte na direção do x e por aí adiante.

A *figura 3.01* mostra as direções e os sentidos positivos para as forças e momentos aplicados *externamente* a uma viga.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.1. Notação e convenção de sinais

Também mostra as direções positivas das componentes do deslocamento u , v e w de qualquer ponto na secção transversal da viga paralela aos eixos x , y e z , respetivamente.

Uma outra condição que define os sinais dos momentos fletores M_x e M_y é que eles são positivos quando induzem tração no quadrante positivo de xy da secção transversal da viga.

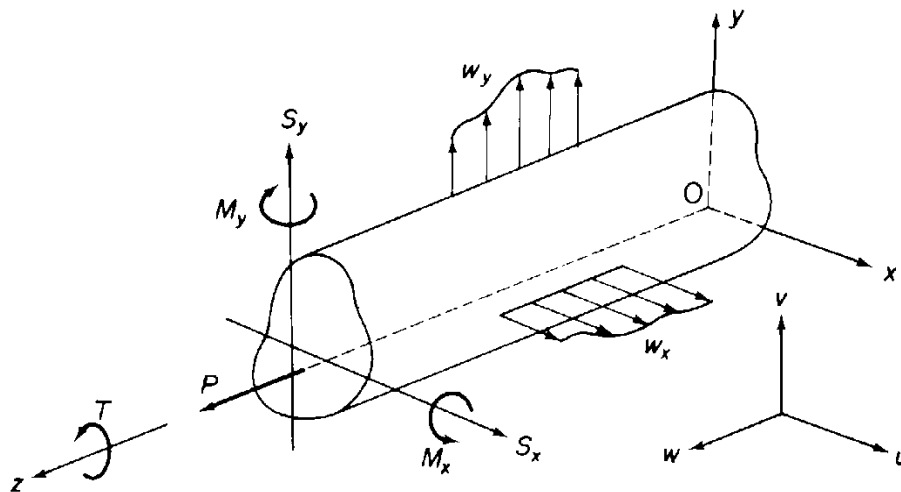


Figura 3.01 Notação e convenção de sinais das forças, momentos e deslocamentos.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.1. Notação e convenção de sinais

Se relacionarmos forças e momentos internos com a face da secção que é vista na direção zO então, como mostra a *figura 3.02*, as forças e momentos internos têm a mesma direção e sentido dos esforços externos ao passo que na face oposta eles formam um sistema inverso.

O primeiro sistema, como se verá, tem a vantagem de os esforços diretos e de corte serem sempre positivos na direção positiva dos respetivos eixos sendo eles internos ou não.

É preciso realçar que as resultantes das tensões internas são equivalentes às forças e momentos aplicados externamente e não estão em equilíbrio com eles.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.1. Notação e convenção de sinais

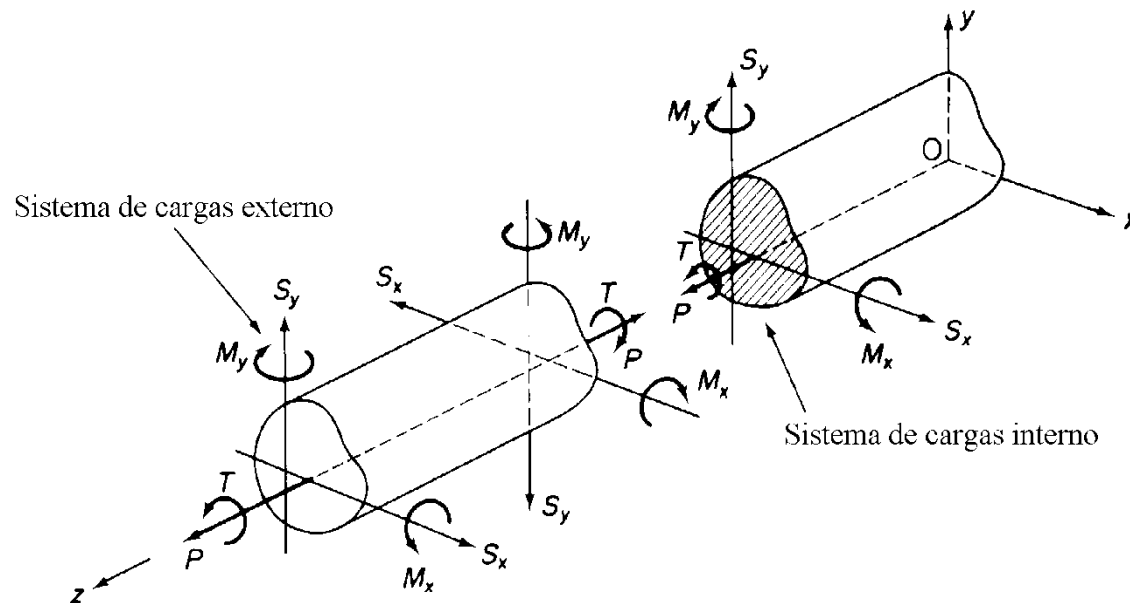


Figura 3.02 Sistema de cargas interno.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.2. Resolução dos momentos fletores

Um momento fletor M aplicado em qualquer plano longitudinal paralelo ao eixo do z pode ser resolvido em componentes M_x e M_y através das regras normais de vetores.

Uma apreciação visual do problema pode ajudar.

Com referência à *figura 3.03* vê-se que o momento fletor M num plano que forma um ângulo θ com Ox pode ter componentes de sinais diferentes dependendo do valor de θ .

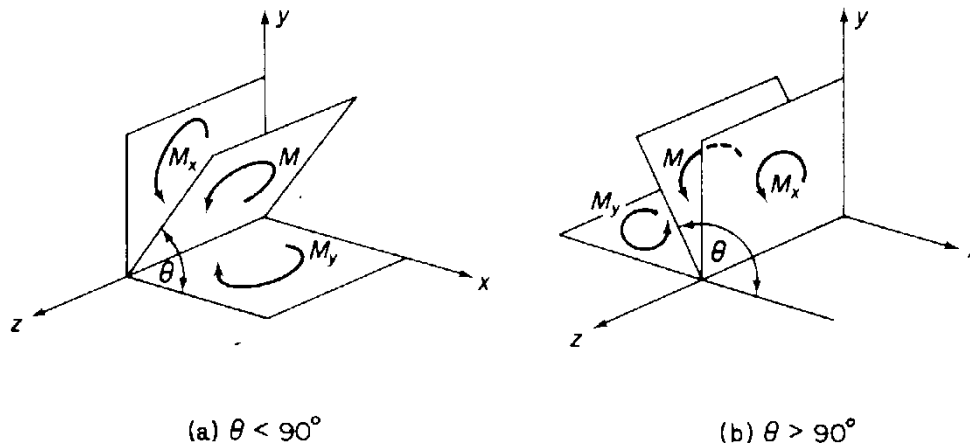


Figura 3.03 Resolução de momentos fletores.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.2. Resolução dos momentos fletores

Em ambos os casos, para o sentido de M representado

$$M_x = M \sin \theta$$

$$M_y = M \cos \theta$$

que dão, para $\theta < \pi/2$, M_x e M_y positivo (*figura 3.03(a)*) e para $\theta > \pi/2$, M_x positivo e M_y negativo (*figura 3.03(b)*).

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

Considere-se uma viga com a secção transversal da *figura 3.04(a)*.

A viga está sujeita a momentos fletores M_x e M_y e flete em torno de um eixo na sua secção que é, por isso, um eixo com tensões nulas ou *eixo neutro* (E.N.).

Suponha-se que a origem do eixo coincide com o centróide C da secção transversal e que o eixo neutro está a uma distância p de C.

A tensão direta σ_z num elemento de área δA num ponto (x,y) e uma distância ξ (*ksi* ou *xi*) do eixo neutro é

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad (3.01)$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

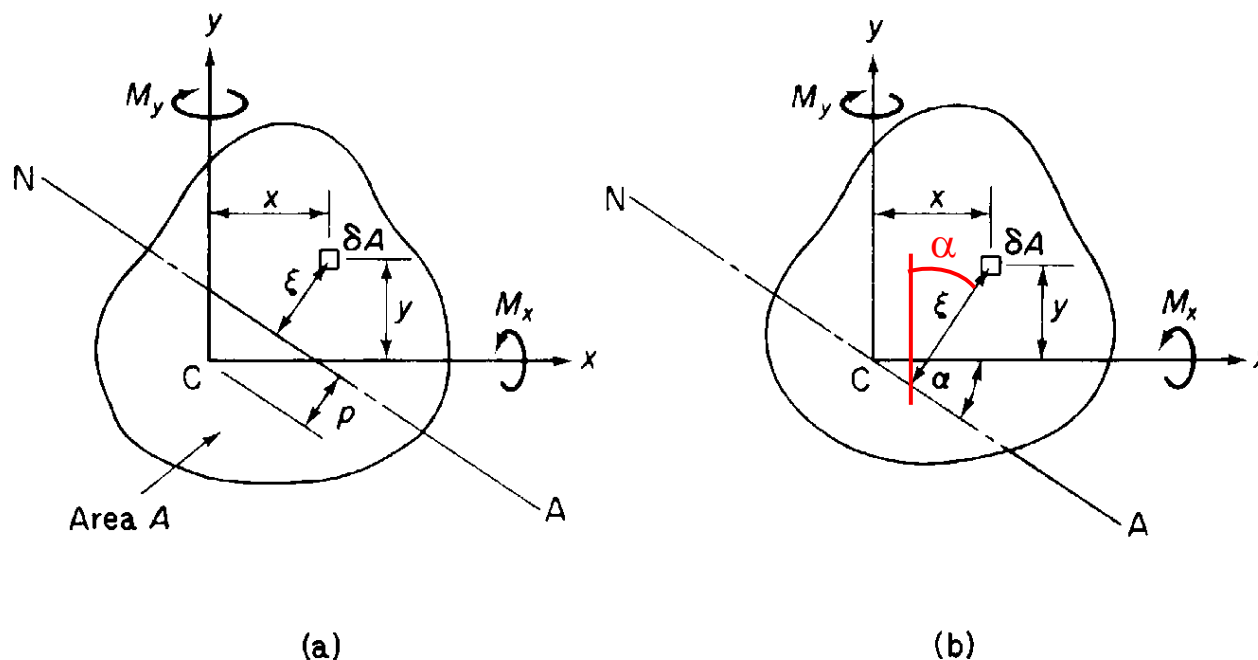


Figura 3.04 Determinação da posição do eixo neutro e das tensões diretas devido à flexão.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

Se a viga é fletida com um raio de curvatura ρ em torno do eixo neutro, nesta secção em particular, então, uma vez que secções planas permanecem planas depois de fletirem, e comparando com a teoria de flexão simétrica tem-se

$$\varepsilon_z = \frac{\xi}{\rho} \quad (3.02)$$

Substituindo para ε_z na *equação 4.01* obtém-se

$$\sigma_z = E \frac{\xi}{\rho} \quad (3.03a)$$

A viga suporta momentos fletores puros de forma que o esforço axial resultante em qualquer secção tem que ser nulo.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

Assim

$$\int_A \sigma_z dA = 0$$

Desta forma, substituindo σ_z nesta equação pela *equação 3.03* e cancelando a constante E/ρ tem-se

$$\int_A \xi dA = 0$$

isto é, o primeiro momento de área da secção transversal da viga em torno do eixo neutro é zero.

Daqui segue que o eixo neutro passa pelo centróide da secção como representado na *figura 3.04(b)*.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

Suponha-se que a inclinação do eixo neutro em relação a Cx é α (medido no sentido dos ponteiros do relógio a partir de Cx), então

$$\xi = x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (3.03b)$$

e da *equação 3.03a*

$$\sigma_z = \frac{E}{\rho} (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \quad (3.04)$$

Os momentos resultantes da distribuição das tensões diretas internas têm o mesmo sentido que os momentos aplicados M_x e M_y .

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

Assim

$$\begin{aligned}M_x &= \int_A \sigma_z y dA \\M_y &= \int_A \sigma_z x dA\end{aligned}\tag{3.05}$$

Substituindo para σ_z da *equação 3.04* na *equação 3.05* e definindo os segundos momentos de área da secção em torno dos eixos Cx e Cy como

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \int_A y^2 dA \\I_{yy} &= \int_A x^2 dA \\I_{xy} &= \int_A xy dA\end{aligned}\tag{3.06}$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

obtém-se

$$M_x = \frac{E \sin \alpha}{\rho} I_{xy} + \frac{E \cos \alpha}{\rho} I_{xx}$$

$$M_y = \frac{E \sin \alpha}{\rho} I_{yy} + \frac{E \cos \alpha}{\rho} I_{xy}$$

ou em forma de matriz

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{\rho} \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

Invertendo tem-se

$$\frac{E}{\rho} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix}$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

ou seja

$$\frac{E}{\rho} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \frac{1}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2} \begin{bmatrix} -I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & -I_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix}$$

Assim, a equação (3.04) fica

$$\sigma_z = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y \quad (3.07)$$

Alternativamente

$$\sigma_z = \frac{M_x (I_{yy} y - I_{xy} x)}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} + \frac{M_y (I_{xx} x - I_{xy} y)}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \quad (3.08)$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

Da *equação 3.08* pode observar-se que se $M_y=0$ o momento M_x produz uma tensão que varia com x e y , o mesmo acontece para M_y se $M_x=0$.

No caso em que a secção transversal da viga tem C_x ou C_y (ou ambos) como um eixo de simetria, o produto do momento de área I_{xy} é zero e C_{xy} são *eixos principais*.

A *equação 3.08* então reduz-se a

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y + \frac{M_y}{I_{yy}} x \quad (3.09)$$

Se um dos momentos M_x ou M_y for nulo tem-se

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y \quad \text{ou} \quad \sigma_z = \frac{M_y}{I_{yy}} x \quad (3.10)$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

As *equações 3.09* e *3.10* correspondem à flexão de vigas que possuem pelo menos uma secção simétrica.

Pode notar-se também que, na *equação 3.10*, $\sigma_z=0$ quando, na primeira equação, $y=0$ e na segunda $x=0$.

Desta forma, na teoria de flexão simétrica o eixo do x é o eixo neutro quando $M_y=0$ e o eixo do y é o eixo neutro quando $M_x=0$.

Pode ver-se que a posição do eixo neutro depende da forma do esforço aplicado assim como das propriedades geométricas da secção transversal.

Qualquer secção assimétrica possui um conjunto de eixos com origem no centroide para o qual o produto do momento de área, I_{xy} , é zero.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.3. Distribuição de tensões diretas devido à flexão

Estes eixos são então eixos principais e a distribuição das tensões diretas referentes a estes eixos tomam a forma simplificada das *equações 3.09* ou *3.10*.

É, pois, aparentemente visível que a quantidade de computação pode ser reduzida se estes eixos forem usados.

Não é o caso a menos que os eixos principais sejam facilmente identificáveis uma vez que o cálculo da posição dos eixos principais, das propriedades da secção relativamente a estes eixos e das coordenadas dos pontos onde as tensões vão ser determinadas envolve mais tempo que o uso direto das *equações 3.07* ou *3.08* para um conjunto de eixos centroidais arbitrário, mas conveniente.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.4. Posição do eixo neutro

O eixo neutro passa sempre pelo centróide da área da secção transversal da viga mas a sua inclinação α (ver *figura 3.04(b)*) em relação ao eixo do x depende do tipo da carga aplicada e das propriedades geométricas da secção.

Em qualquer ponto do eixo neutro as tensões diretas são nulas.

Assim, da *equação 3.07*,

$$0 = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x_{EN} + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y_{EN}$$

onde x_{EN} e y_{EN} são as coordenadas de qualquer ponto no eixo neutro.

Daqui

$$\frac{y_{EN}}{x_{EN}} = - \frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.4. Posição do eixo neutro

ou, da *figura 3.04(b)* e tendo em conta que quando α é positivo x_{EN} e y_{EN} têm sinal oposto,

$$\tan \alpha = \frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}} \quad (3.11)$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.4. Posição do eixo neutro

Exemplo 3.01: Uma viga com a secção transversal da *figura 3.05* está sujeita a um momento fletor de 1500 Nm num plano vertical. Calcular a tensão direta máxima devido à flexão e dizer em que ponto ela atua.

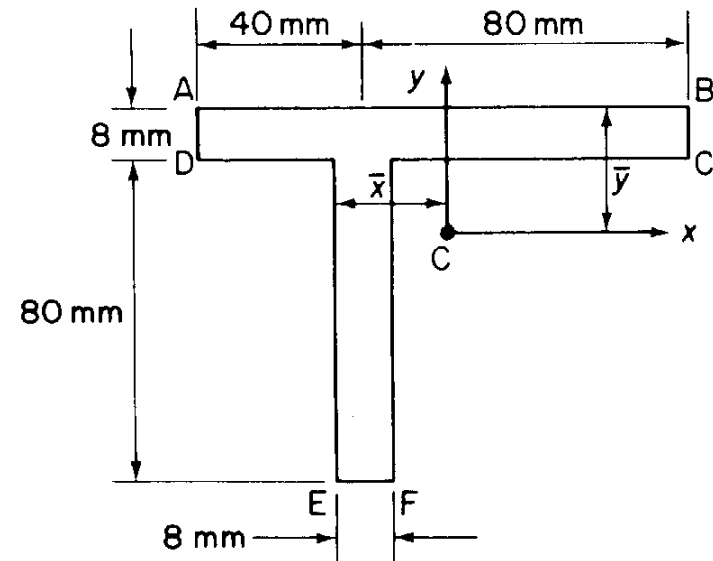


Figura 3.05 Secção transversal da viga do exemplo 3.01.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.5. Relações entre carga distribuída, força de corte e momento fletor

Considere-se um elemento de comprimento δz , de uma viga com uma secção transversal assimétrica, sujeita a forças de corte, momentos fletores e uma carga distribuída com intensidade variável, todos no plano yz como mostra a *figura 3.06*.

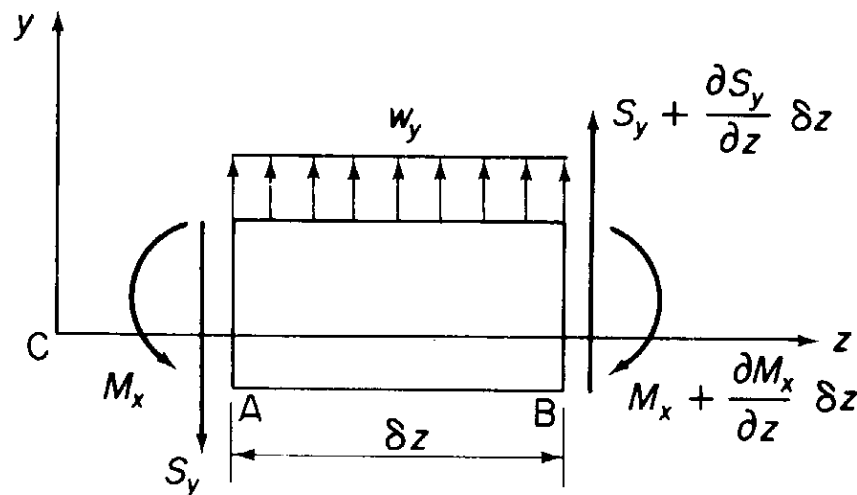


Figura 3.06 Equilíbrio de um elemento de uma viga com um sistema de forças no plano yz .

2. Flexão de vigas de parede fina

2.5. Relações entre carga distribuída, força de corte e momento fletor

As forças e os momentos são positivos de acordo com a convenção de sinais adotada.

Pode assumir-se que a intensidade da carga distribuída é constante em todo o comprimento do elemento.

Assim, para o elemento estar em equilíbrio na direção do y

$$\left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial z} \delta z \right) + w_y \delta z - S_y = 0$$

de onde se tira que

$$w_y = -\frac{\partial S_y}{\partial z}$$

Tirando momentos em torno de A tem-se

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial z} \delta z \right) - \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial z} \delta z \right) \delta z - w_y \frac{(\delta z)^2}{2} - M_x = 0$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.5. Relações entre carga distribuída, força de corte e momento fletor

ou, quando termos de segunda ordem são desprezados,

$$S_y = \frac{\partial M_x}{\partial z}$$

Pode combinar-se estes resultados numa só expressão

$$-w_y = \frac{\partial S_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} \quad (3.12)$$

Da mesma forma no plano xz

$$-w_x = \frac{\partial S_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} \quad (3.13)$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.6. Deslocamentos devido à flexão

Por outras palavras, o centróide C é deslocado da sua posição inicial C_i uma distância ζ até à sua posição final C_f .

Suponha-se também que o centro de curvatura R da viga nesta secção particular está no lado oposto à direção do deslocamento ζ e que o raio de curvatura é ρ .

Para esta posição do centro de curvatura e para a expressão aproximada da curvatura tem-se

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\zeta}{dz^2} \quad (3.14)$$

As componentes u e v de ζ são nas direções negativas dos eixos x e y , respetivamente, de modo que

$$u = -\zeta \sin \alpha \quad ; \quad v = -\zeta \cos \alpha \quad (3.15)$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.6. Deslocamentos devido à flexão

Derivando as *equações 3.15* duas vezes em ordem a z e substituindo para ζ da *equação 3.14* obtém-se

$$\frac{\sin \alpha}{\rho} = -\frac{d^2 u}{dz^2} \quad ; \quad \frac{\cos \alpha}{\rho} = -\frac{d^2 v}{dz^2} \quad (3.16)$$

Quando se derivou a *equação 3.07* viu-se que

$$\frac{1}{\rho} \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \frac{1}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \begin{bmatrix} -I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & -I_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Substituindo $\sin(\alpha)/\rho$ e $\cos(\alpha)/\rho$ das *equações 3.16* na *equação 3.17* e escrevendo $u'' = d^2 u/dz^2$ e $v'' = d^2 v/dz^2$ tem-se

$$\begin{Bmatrix} u'' \\ v'' \end{Bmatrix} = \frac{-1}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \begin{bmatrix} -I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & -I_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.6. Deslocamentos devido à flexão

É conveniente reorganizar as *equações 3.18* da seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = -E \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'' \\ v'' \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

isto é

$$M_x = -EI_{xy}u'' - EI_{xx}v'' \quad ; \quad M_y = -EI_{yy}u'' - EI_{xy}v'' \quad (3.20)$$

A primeira das *equações 3.18* mostra que M_x produz curvaturas, isto é deflexões, tanto no plano xz como no yz ainda que $M_y=0$; o mesmo acontece para M_y quando $M_x=0$.

Assim, por exemplo, uma viga assimétrica deflete tanto verticalmente como horizontalmente mesmo que a carga atue somente no plano vertical.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.6. Deslocamentos devido à flexão

Da mesma forma, componentes da deflexão, vertical e horizontal, numa viga assimétrica podem resultar de cargas horizontais.

Para uma viga em que C_x ou C_y (ou ambos) são um eixo de simetria, $I_{xy}=0$ e as equações 3.18 reduzem-se a

$$u'' = -\frac{M_y}{EI_{yy}} \quad ; \quad v'' = -\frac{M_x}{EI_{xx}} \quad (3.21)$$

que são as equações da teoria de flexão simétrica.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.6. Deslocamentos devido à flexão

Exemplo 3.02: Determinar as componentes vertical e horizontal da deflexão na ponta da viga encastrada da *figura 3.08*. Os segundos momentos de área da sua secção assimétrica são I_{xx} , I_{yy} e I_{xy} .

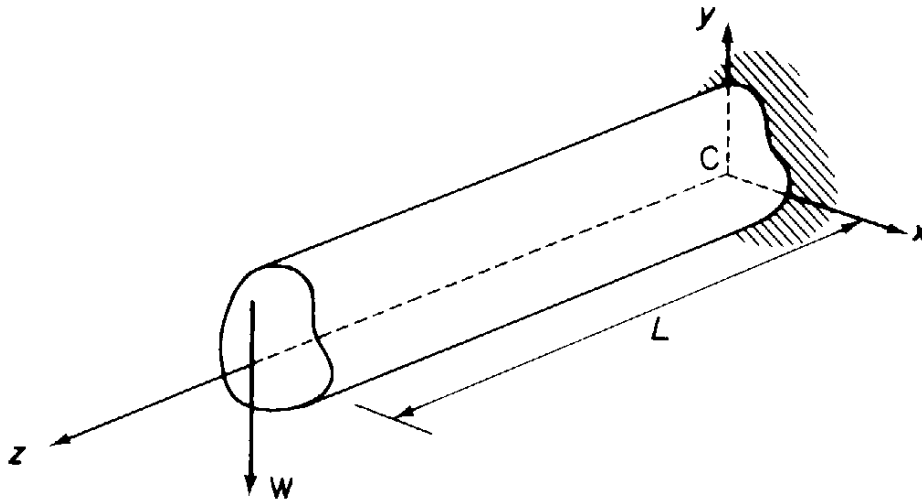


Figura 3.08 Determinação da deflexão de uma viga encastrada.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.7. Aproximação para secções de parede fina

Pode explorar-se a natureza das paredes finas nas estruturas de aviões para fazer simplificações na determinação das tensões e deflexões produzidas pela flexão.

A espessura t de uma secção de parede fina assume-se pequena em relação às dimensões da secção transversal de forma que as tensões podem considerar-se constantes em toda a espessura.

Também se desprezam as potências de t iguais ou superiores a dois quando se calculam as propriedades da secção e toma-se a secção como sendo a linha média das suas paredes.

Como exemplo considere-se a secção de *figura 3.09(a)*.

A secção é simétrica em relação ao eixo do x , por isso $I_{xy}=0$.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.7. Aproximação para secções de parede fina

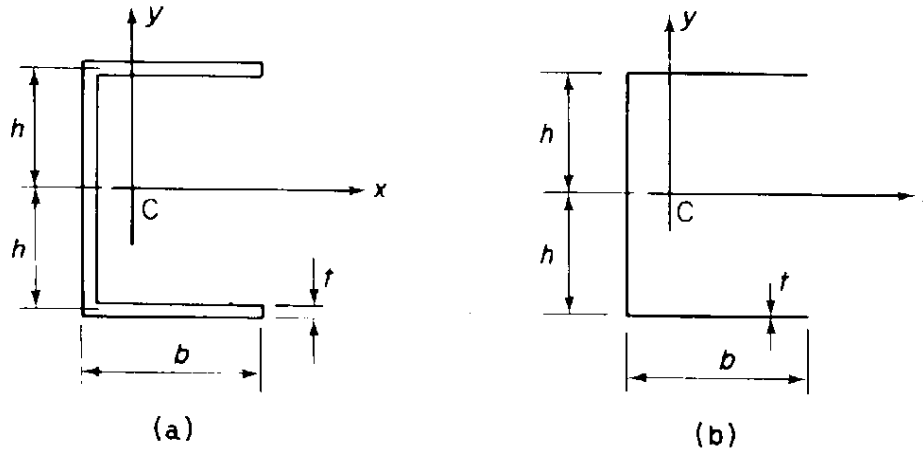


Figura 3.09 (a) Secção de paredes finas real; (b) Representação aproximada da secção.

O segundo momento de área I_{xx} é dado por

$$I_{xx} = 2 \left(\frac{bt^3}{12} + bth^2 \right) + \frac{t[2(h-t/2)]^3}{12}$$

Expandindo obtém-se

$$I_{xx} = 2 \left(\frac{bt^3}{12} + bth^2 \right) + \frac{t}{12} \left[2^3 \left(h^3 - 3h^2 \frac{t}{2} + 3h \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{8} \right) \right]$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.7. Aproximação para secções de parede fina

o que reduz, desprezando as potências de t^2 e superiores, a

$$I_{xx} = 2bth^2 + \frac{t(2h)^3}{12}$$

O segundo momento de área da secção em relação a C_y é obtido da mesma maneira.

Pode ver-se, assim, que para os cálculos das propriedades da secção pode considerar-se a secção representada por uma linha única, como mostra a *figura 3.09(b)*.

As secções de paredes finas têm frequentemente paredes inclinadas ou curvas que complicam os cálculos das propriedades da secção.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.7. Aproximação para secções de parede fina

Considere a secção da *figura 3.10*.

O segundo momento de área em torno do eixo horizontal que passa no centróide é dado por

$$I_{xx} = \int y^2 dA = 2 \int_0^{a/2} t y^2 ds = 2 \int_0^{a/2} t (s \sin \beta)^2 ds$$

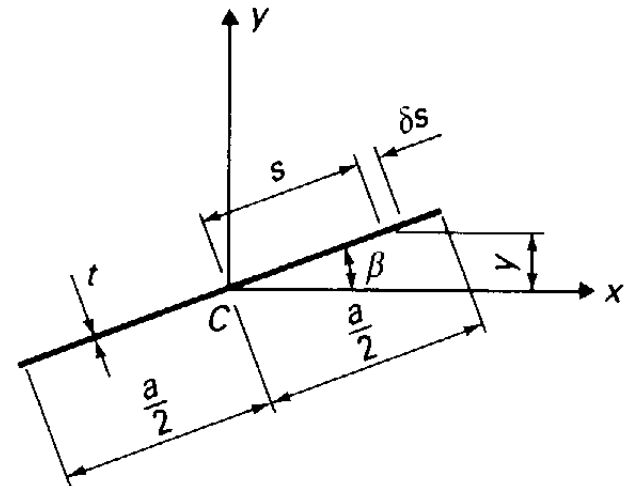


Figura 3.10 Segundos momentos de área de uma secção inclinada.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.7. Aproximação para secções de parede fina

de onde se tira

$$I_{xx} = \frac{a^3 t \sin^2 \beta}{12}$$

Do mesmo modo

$$I_{yy} = \frac{a^3 t \cos^2 \beta}{12}$$

O produto momento de área é

$$I_{xy} = \int xy dA = 2 \int_0^{a/2} txy ds = 2 \int_0^{a/2} t(s \sin \beta)(s \cos \beta) ds$$

o que resulta em

$$I_{xy} = \frac{a^3 t \cos 2\beta}{24}$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.7. Aproximação para secções de parede fina

É de salientar que estas expressões são aproximadas uma vez que na sua derivação se desprezam as potências de t^2 e superiores, ignorando os segundos momentos de área do elemento δs em torno de eixos que passam pelo seu próprio centróide.

As propriedades de secções de paredes finas curvas são determinadas de uma forma idêntica.

Considere-se a secção semi-circular da *figura 3.11*.

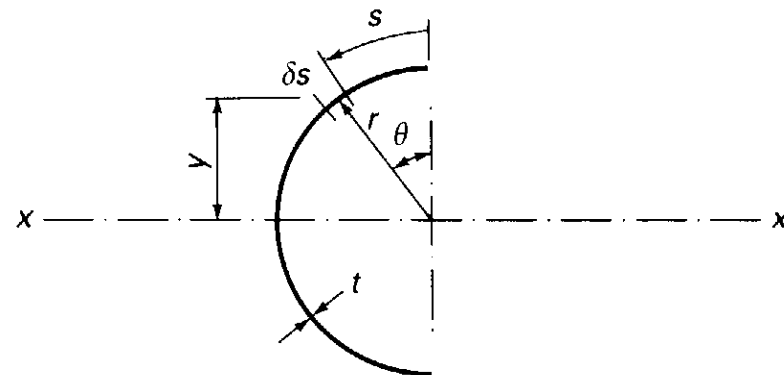


Figura 3.11 Segundo momento de área de uma secção semicircular.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.7. Aproximação para secções de parede fina

Assim, I_{xx} para a secção semi-circular da *figura 3.11* é

$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int_0^\pi ty^2 ds$$

Expressando y e s em função de uma única variável θ simplifica a integração, obtendo-se

$$I_{xx} = \int_0^\pi t(r \cos \theta)^2 r d\theta$$

Daqui obtém-se

$$I_{xx} = \frac{\pi^3 t}{2}$$

sabendo que

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

2. Flexão de vigas de parede fina

2.7. Aproximação para secções de parede fina

Exemplo 3.03: Determinar a distribuição da tensão direta na secção em Z de paredes finas da *figura 3.12* produzida por um momento fletor positivo M_x .

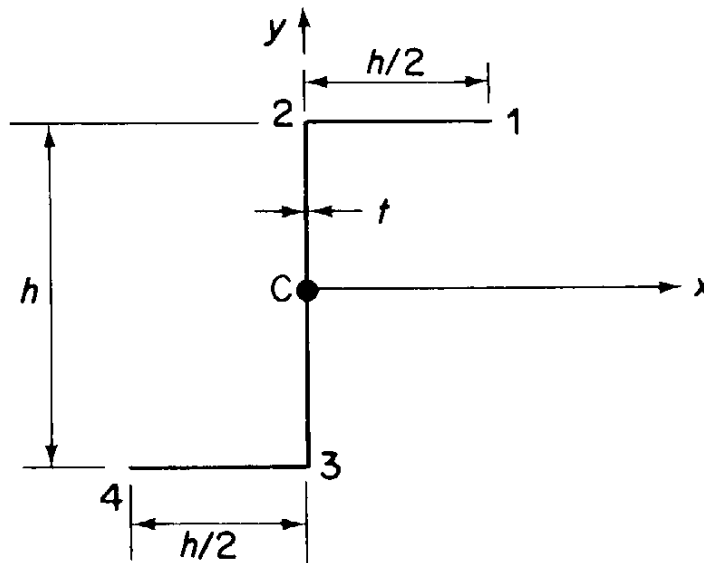


Figura 3.12 Secção da viga do *exemplo 3.03*.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.8. Aplicação da teoria de flexão

As expressões da tensão direta e deslocamento derivadas acima são baseadas na condição de que a viga tem uma secção uniforme e homogénea e que secções transversais planas permanecem planas depois da flexão.

Esta última condição só é verdadeira se os momentos fletores M_x e M_y forem constantes ao longo da viga.

Uma variação do momento fletor implica a presença de esforços de corte e o efeito destes é deformar a secção da viga num “s” invertido.

No entanto as tensões de corte em vigas cujas dimensões da secção transversal são pequenas em relação aos seus comprimentos são comparativamente pequenas de forma que a teoria de flexão pode ser usada com precisão razoável.

2. Flexão de vigas de parede fina

2.8. Aplicação da teoria de flexão

Em secções de paredes finas as tensões de corte produzidas por cargas de corte não são pequenas e têm que ser calculadas ainda que as tensões diretas sejam obtidas pela teoria básica de flexão desde que restrições axiais das tensões não estejam presentes.

As deflexões em estruturas de paredes finas são tidas como resultantes, em primeiro lugar, das deformações de flexão; a contribuição das deformações de corte pode ser calculada separadamente caso seja necessário.

3. Relações para tensão, deformação e flexão

Nesta secção vamos determinar as equações de equilíbrio e expressões para as deformações que são necessárias para analisar vigas de secção aberta que suportam cargas de corte e vigas de secção fechada que suportam cargas de corte e de torção.

A análise de vigas de secção aberta sujeitas à torção requer uma análise diferente e por isso é apresentada mais tarde.

3. Relações para tensão, deformação e flexão

As relações são obtidas a partir de princípios básicos.

Geralmente na análise assume-se que os efeitos de restrições axiais são desprezáveis, que as tensões de corte normais à superfície da viga podem desprezar-se uma vez que elas são nulas em cada superfície e que a parede é fina, que as tensões diretas e de corte são constantes na espessura e, finalmente, que a viga possui uma secção uniforme em que a espessura pode variar em torno da secção mas é constante ao longo do comprimento da viga.

Também se ignoram as potências da espessura t iguais ou superiores a dois aquando do cálculo das constantes da secção.

O parâmetro s é a distância medida em torno da secção transversal a partir de uma origem conveniente.

3. Relações para tensão, deformação e flexão

Um elemento $\delta s \delta z t$ da parede da viga é mantido em equilíbrio por um sistema de tensões diretas e de corte como mostrado na *figura 3.13(a)*.

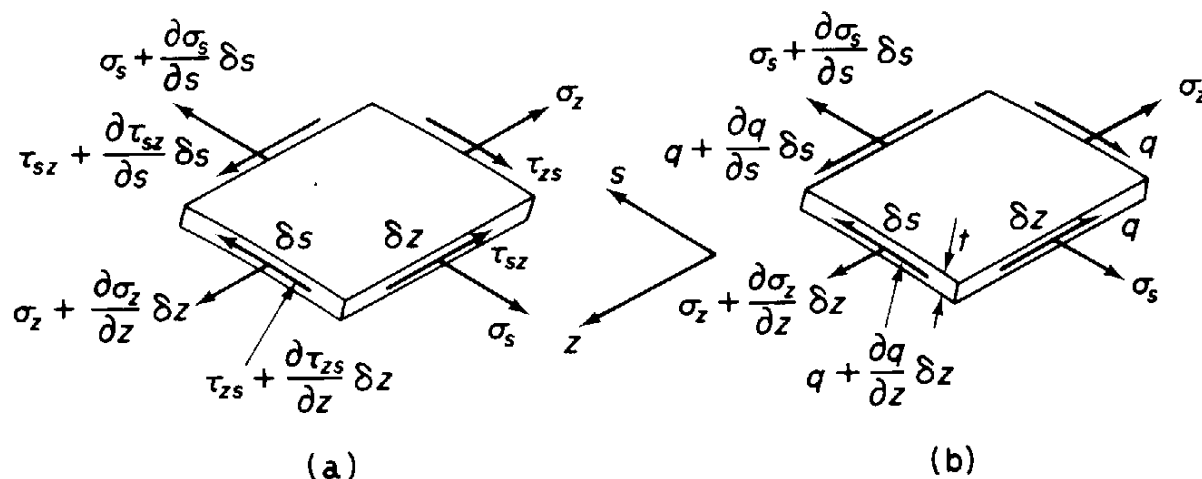


Figura 3.13 (a) Sistema geral de tensões num elemento de uma viga aberta ou fechada; (b) Sistema da tensão direta e do fluxo de corte no elemento.

3. Relações para tensão, deformação e flexão

A tensão direta σ_z é produzida por momentos fletores ou pelo momento das cargas de corte enquanto que as tensões de corte são resultantes do corte e/ou torção de vigas fechadas ou corte em vigas abertas.

A tensão de “hoop” σ_s é usualmente zero mas pode ser causada, em vigas fechadas, por pressão interna.

Apesar de ter sido especificado que t pode variar com s , a variação é pequena na maior parte das estruturas de paredes finas e, por isso, pode assumir-se que t é constante no elemento δs .

3. Relações para tensão, deformação e flexão

Também se tem $\tau_{zs} = \tau_{sz} = \tau$.

No entanto, é conveniente trabalhar com o *fluxo de corte* q , isto é, força de corte por unidade de comprimento, em vez da tensão de corte.

Assim, na *figura 3.13(b)*

$$q = \tau \quad (3.22)$$

e é tido como positivo na direção positiva de s .

Para equilíbrio do elemento na direção de z e desprezando as forças inerciais tem-se

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta z \right) t \delta s - \sigma_z t \delta s + \left(q + \frac{\partial q}{\partial s} \delta s \right) \delta z - q \delta z = 0$$

3. Relações para tensão, deformação e flexão

Esta expressão reduz a

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (3.23)$$

Da mesma forma, na direção s , tem-se

$$\frac{\partial q}{\partial z} + t \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} = 0 \quad (3.24)$$

As tensões diretas σ_z e σ_s produzem deformações ε_z e ε_s enquanto que a tensão de corte τ induz uma deformação de corte γ ($= \gamma_{zs} = \gamma_{sz}$).

Agora vamos exprimir estas deformações em função das três componentes do deslocamento de um ponto na parede da secção (ver *figura 3.14*).

3. Relações para tensão, deformação e flexão

Destas componentes: v_t é o deslocamento tangencial no plano xy e é positivo na direção em que s aumenta; v_n é o deslocamento normal ao plano xy e é positivo de dentro para fora; e w é o deslocamento axial que foi definido anteriormente.

A deformação axial será

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.25)$$

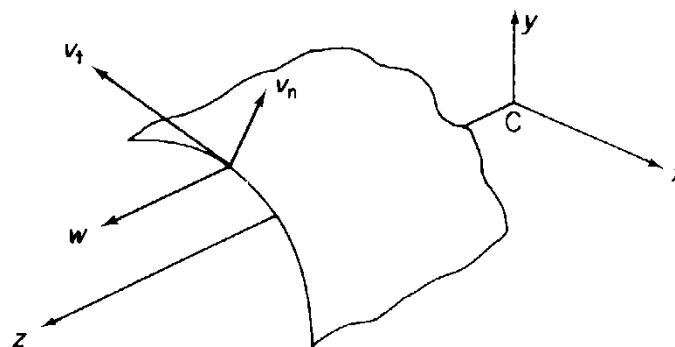


Figura 3.14 Componentes axial, tangencial e normal do deslocamento num ponto da parede da viga.

3. Relações para tensão, deformação e flexão

É possível derivar uma expressão simples para a deformação direta ε_s em relação a v_t , v_n , s e a curvatura $1/r$ no plano xy da parede da viga.

No entanto, como ε_s não é necessário, na análise que se segue apenas é dada a expressão

$$\varepsilon_s = \frac{\partial v_t}{\partial s} + \frac{v_n}{r} \quad (3.26)$$

A deformação de corte γ é obtida em relação ao deslocamento w e v_t considerando a distorção de corte de um elemento $\delta s \delta z$ da parede da viga.

3. Relações para tensão, deformação e flexão

Da *figura 3.15* vê-se que a deformação de corte é dada por

$$\gamma = \phi_1 + \phi_2 \quad (3.27)$$

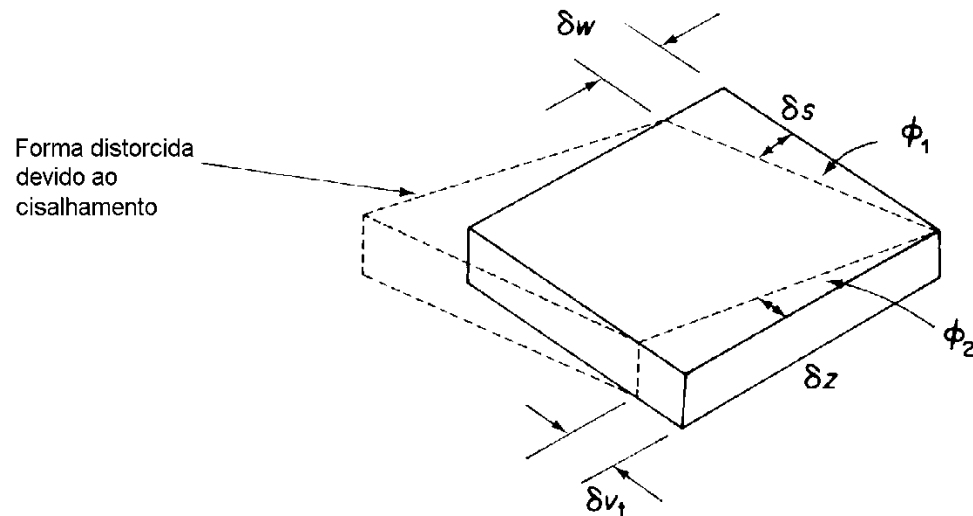


Figura 3.15 Componentes axial, tangencial e normal do deslocamento num ponto da parede da viga.

3. Relações para tensão, deformação e flexão

ou, no limite como tanto δs quanto δz tendem para zero,

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \quad (3.28)$$

Para além do assumido anteriormente nesta secção também se assume que, durante qualquer deslocamento, a forma da secção transversal da viga é mantida por um sistema de diafragmas próximos que são rígidos no seu próprio plano mas são perfeitamente flexíveis perpendicularmente ao seu plano.

Assim, não há resistência ao deslocamento axial w e a secção move-se como um corpo rígido no seu próprio plano, onde o deslocamento de cada ponto é completamente especificado pelas translações u e v e pela rotação θ (ver *figura 3.16*).

3. Relações para tensão, deformação e flexão

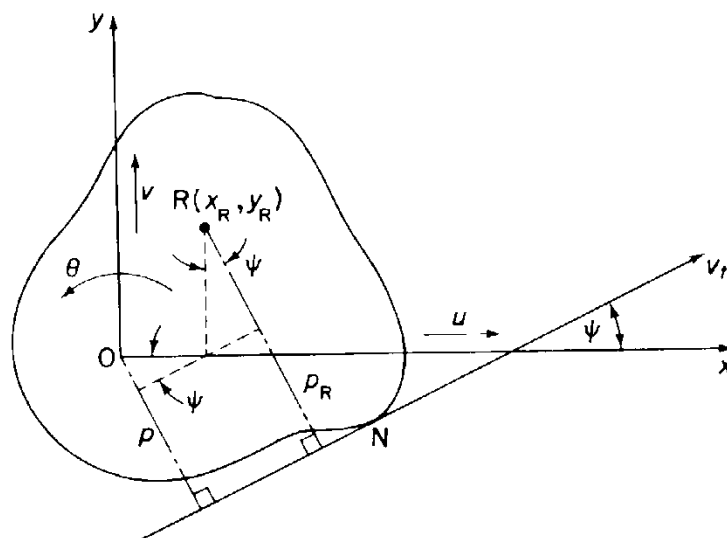


Figura 3.16 Determinação das relações de deslocamento e posição do centro de torção de uma viga (aberta ou fechada).

À primeira vista parece que isto é pouco convincente mas para estruturas de aviões com células de paredes finas cujas secções transversais são reforçadas com nervuras ou cavernas posicionadas a intervalos frequentes ao longo dos seus comprimentos é uma aproximação razoável para tais secções.

3. Relações para tensão, deformação e flexão

O deslocamento tangencial v_t de qualquer ponto N na parede de uma viga de secção aberta ou fechada pode ver-se da *figura 3.16* como sendo

$$v_t = p\theta + u \cos \psi + v \sin \psi \quad (3.29)$$

onde, claramente, u , v e θ são funções só de z (w pode ser função de z e s).

A origem O dos eixos na *figura 3.16* foi escolhida arbitrariamente e os eixos sofrem deslocamentos u , v e θ .

Estes deslocamentos, num caso de torção pura, são equivalentes a uma rotação pura em torno de um ponto $R(x_R, y_R)$ na secção transversal onde R é o centro de torção.

3. Relações para tensão, deformação e flexão

Assim, da *figura 3.16*

$$v_t = p_R \theta \quad (3.30)$$

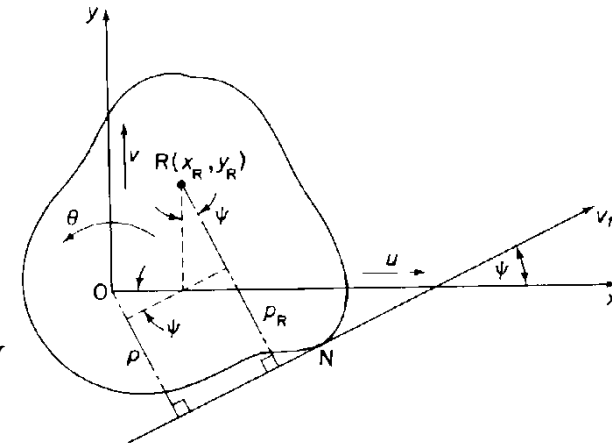
e

$$p_R = p - x_R \sin \psi + y_R \cos \psi$$

o que dá

$$v_t = p \theta - x_R \theta \sin \psi + y_R \theta \cos \psi$$

e



$$\frac{\partial v_t}{\partial z} = p \frac{d\theta}{dz} - x_R \sin \psi \frac{d\theta}{dz} + y_R \cos \psi \frac{d\theta}{dz} \quad (4.31)$$

3. Relações para tensão, deformação e flexão

Da *equação 3.29* tem-se

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} = p \frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{dz} \cos \psi + \frac{dv}{dz} \sin \psi \quad (3.32)$$

Comparando os coeficientes das *equações 3.31 e 3.32* vê-se que

$$x_R = -\frac{dv/dz}{d\theta/dz} \quad ; \quad y_R = \frac{du/dz}{d\theta/dz} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} = p \frac{d\theta}{dz} - x_R \sin \psi \frac{d\theta}{dz} + y_R \cos \psi \frac{d\theta}{dz}$$

4. Corte em vigas de parede fina e secção aberta

A viga com secção aberta da *figura 3.17* suporta forças de corte S_x e S_y de maneira a não haver torção da secção transversal.

Para esta condição ser válida ambas as forças de corte têm que passar por um ponto específico na secção conhecido como o *centro de corte*.

A análise de vigas de secção aberta sujeitas à torção requer uma análise diferente e por isso é apresentada mais tarde.

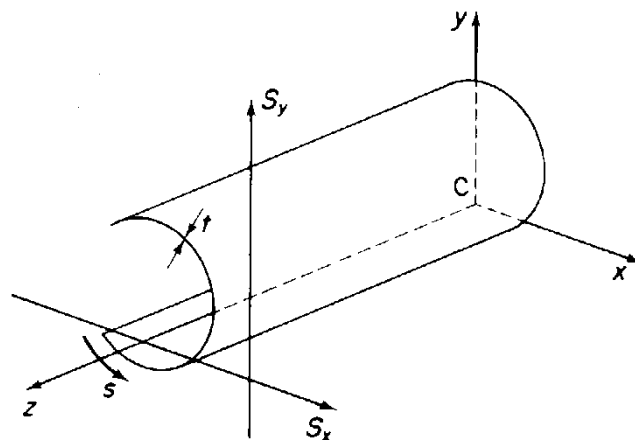


Figura 3.17 Cargas de corte numa viga de secção aberta.

4. Corte em vigas de parede fina e secção aberta

Uma vez que não existem tensões de “hoop” na viga, os fluxos de corte e as tensões diretas que atuam num elemento da parede da viga são relacionadas pela *equação 3.23*, isto é

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Assume-se que as tensões diretas são obtidas com precisão suficiente a partir da teoria de flexão de forma que da *equação 3.06*

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\left[(\partial M_y / \partial z) I_{xx} - (\partial M_x / \partial z) I_{xy} \right]}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} x + \frac{\left[(\partial M_x / \partial z) I_{yy} - (\partial M_y / \partial z) I_{xy} \right]}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} y$$

4. Corte em vigas de parede fina e secção aberta

Usando as relações das *equações 3.12 e 3.13*, isto é $\partial M_y / \partial z = S_x$ e $\partial M_x / \partial z = S_y$, esta expressão fica

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y$$

Substituindo para $\partial \sigma_z / \partial z$ na *equação 3.23* tem-se

$$\frac{\partial q}{\partial s} = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) tx - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) ty \quad (3.34)$$

Integrando a *equação 3.34* ao longo de s a partir da mesma origem de s para qualquer ponto em torno da secção transversal obtém-se

$$\int_0^s \frac{\partial q}{\partial s} ds = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s tx ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s ty ds \quad (3.35)$$

4. Corte em vigas de parede fina e secção aberta

Se a origem de s for junto à parte aberta da secção então $q=0$ quando $s=0$ e a *equação 3.35* fica

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds \quad (3.36)$$

Para uma secção que tenha C_x ou C_y como eixo de simetria, a *equação 3.36* reduz-se a

$$q_s = - \frac{S_x}{I_{yy}} \int_0^s t x ds - \frac{S_y}{I_{xx}} \int_0^s t y ds$$

4. Corte em vigas de parede fina e secção aberta

Exemplo 3.04: Determinar a distribuição do fluxo de corte na viga de paredes finas com secção em Z da *figura 3.18* devido a uma força de corte S_y aplicada no centro de corte da secção.

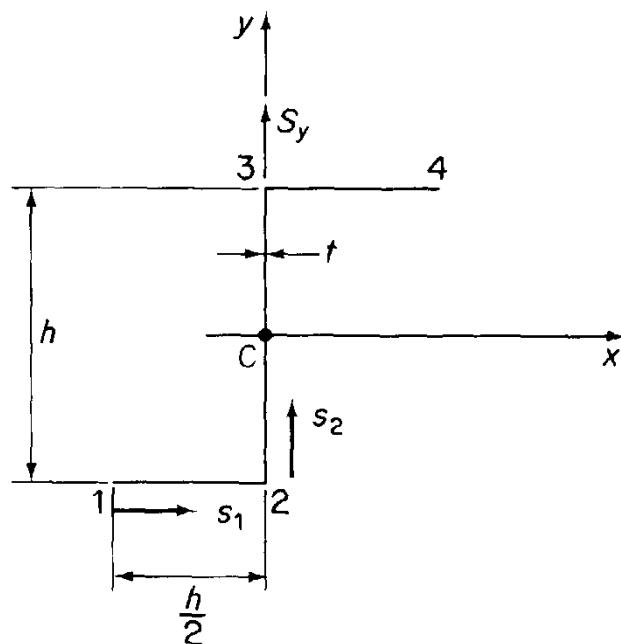


Figura 3.18 Secção em Z com uma força de corte para o *exemplo 3.04*.

4. Corte em vigas de parede fina e secção aberta

4.1. Centro de corte

O centro de corte é definido como o ponto da secção transversal através do qual forças de corte não produzem qualquer torção.

Pode ser mostrado, usando o teorema recíproco, que este ponto também é o centro de torção.

No entanto, existem algumas exceções importantes a esta regra geral.

Na maioria dos casos práticos é claramente impossível garantir que uma força de corte passe pelo centro de corte da secção.

Também é óbvio o facto de que qualquer força de corte pode ser representada por uma combinação de uma força de corte atuando através do centro de corte e um momento de torção.

As tensões produzidas pelas ações separadas da torção e do corte podem ser adicionadas por sobreposição.

4. Corte em vigas de parede fina e secção aberta

4.1. Centro de corte

É, por isso, necessário saber a posição do centro de corte em todos os tipos de secção ou calculá-la de alguma forma.

No caso de a secção ter um eixo de simetria o centro de corte tem obrigatoriamente de estar neste eixo.

Para secções em forma de cruz ou em ângulo, como as da *figura 3.19a*, o centro de corte está localizado na interseção dos lados, uma vez que as tensões de corte internas resultantes passam todas por estes pontos.

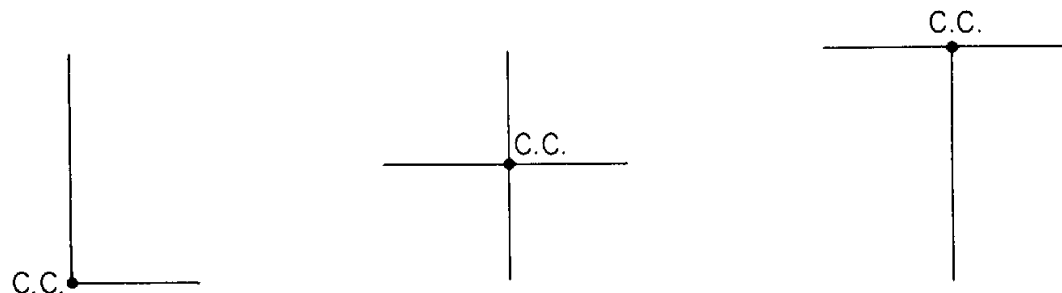


Figura 3.19a Centro de corte das secções abertas mostradas.

4. Corte em vigas de parede fina e secção aberta

4.1. Centro de corte

Exemplo 3.05: Calcular a posição do centro de corte da secção em C de paredes finas da *figura 3.19*. A espessura t das paredes é constante.

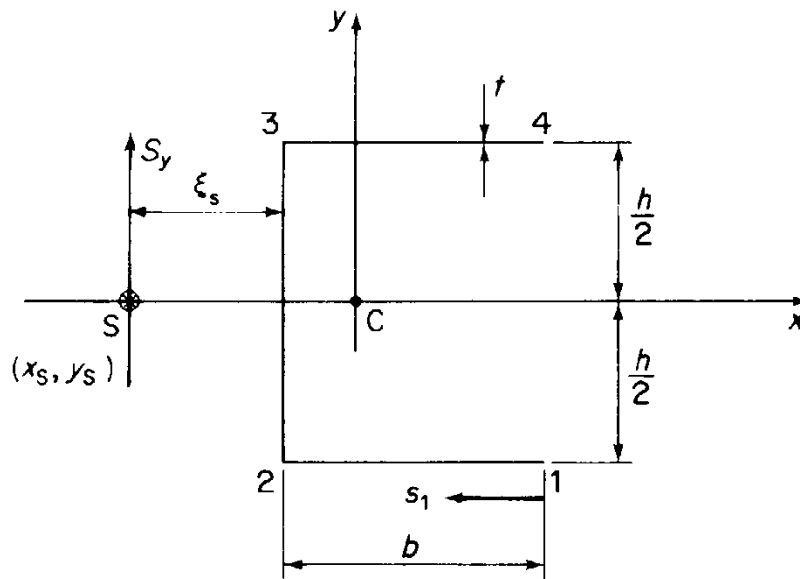


Figura 3.19 Determinação da posição do centro de corte da secção do *exemplo 3.05*.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

A solução de uma viga de secção fechada com uma força de corte segue um método semelhante ao descrito na *secção 4* para uma viga de secção aberta mas com duas diferenças importantes.

Primeiro, as forças de corte podem ser aplicadas em pontos na secção transversal que não sejam o centro de corte de modo a incluir os efeitos de torção e de corte.

Isto é possível uma vez que as tensões de corte produzidas pela torção em vigas de secção fechada têm exatamente a mesma forma que as tensões de corte produzidas por corte, ao contrário das tensões de corte produzidas por corte e torção em vigas abertas.

Segundo, é geralmente impossível escolher uma origem para s em que o valor do fluxo de corte seja conhecido.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

Considere-se uma viga de secção fechada com uma secção arbitrária (*figura 3.20*).

As forças de corte S_y e S_x são aplicadas em qualquer ponto na secção transversal e em geral causam tensões de flexão e fluxos de corte que são relacionados pela equação de equilíbrio 3.23. Assume-se que as tensões de “hoop” e forças inerciais estão ausentes.

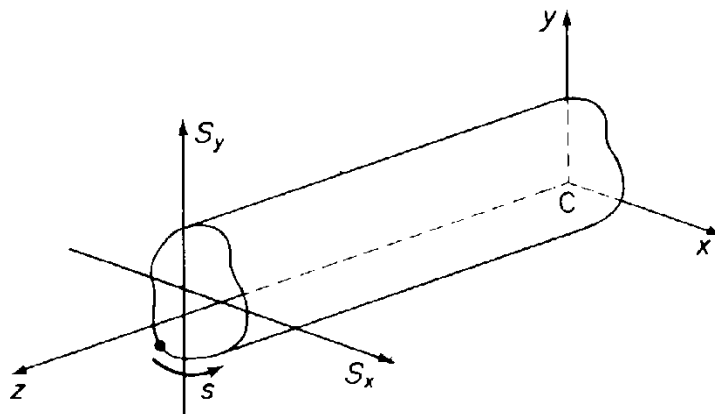


Figura 3.20 Corte de vigas de secção fechada.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

Assim

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Daqui em diante a análise é idêntica àquela das vigas abertas com uma força de corte até se chegar à integração da *equação 3.34*, que é

$$\int_0^s \frac{\partial q}{\partial s} ds = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds$$

Suponha-se que se escolhe uma origem para s onde o fluxo de corte tem o valor desconhecido $q_{s,0}$.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

Integrando a *equação 3.34* obtém-se

$$q_s - q_{s,0} = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds$$

ou

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds + q_{s,0} \quad (3.37)$$

Comparando as *equações 3.36 e 3.37* observa-se que os primeiros dois termos no lado direito da *equação 3.37* representam a distribuição do fluxo de corte numa viga de secção aberta carregada no seu centro de corte.

Este facto indica um método de solução para uma viga fechada que suporta uma força de corte.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

Representando este fluxo de corte “aberto” ou “básico” por q_b pode escrever-se a *equação 3.37* como

$$q_s = q_b + q_{s,0} \quad (3.38)$$

q_b obtém-se supondo que a secção fechada é “cortada” num ponto conveniente produzindo assim uma secção “aberta” (ver *figura 3.21(b)*).

A distribuição do fluxo de corte (q_b) em torno da secção “aberta” é dado por

$$q_b = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t y ds$$

como na *secção 4*.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

O valor do fluxo de corte na abertura ($s=0$) é então determinado equacionando os momentos externos aplicados e os momentos internos tirados em torno de um centro de momento conveniente.

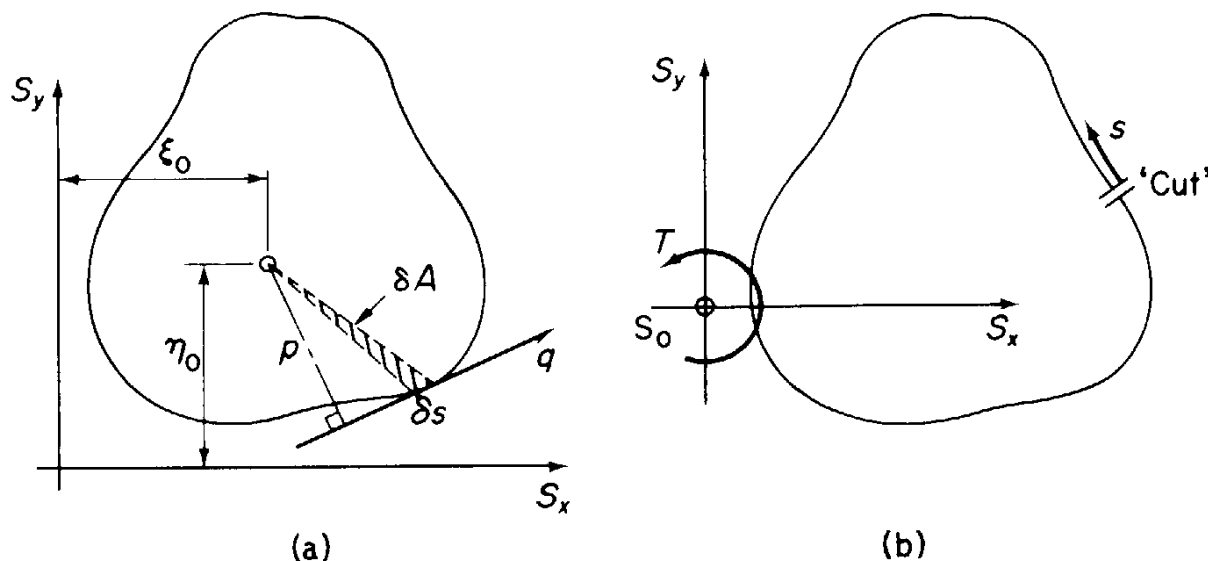


Figura 3.21 (a) Determinação de $q_{s,0}$; (b) Carregamento equivalente numa viga com secção “aberta”.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

Assim, da *figura 3.21(a)*

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint p q ds = \oint p q_b ds + q_{s,0} \oint p ds$$

onde $\oint$ denota integração completa em torno da secção transversal.

Na *figura 3.21(a)*

$$\delta A = \frac{1}{2} p \delta s$$

de forma que

$$\oint dA = \frac{1}{2} \oint p ds$$

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

Daqui tira-se que

$$\oint p ds = 2A$$

onde A é a área contida pela linha média da parede da secção da viga.

Assim

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint p q_b ds + 2A q_{s,0} \quad (3.39)$$

Se o centro de momento for escolhido a coincidir com as linhas de ação de S_x e S_y então a *equação 3.39* reduz-se a

$$0 = \oint p q_b ds + 2A q_{s,0} \quad (3.40)$$

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

O fluxo de corte desconhecido $q_{s,0}$ obtém-se da *equação 3.39* ou da *equação 3.40*.

Vale a pena considerar algumas das implicações do método.

A *equação 3.36* representa a distribuição do fluxo de corte numa viga de secção aberta quando não há torção.

Assim, “cortando” a secção fechada da viga da *figura 3.21(a)* para determinar q_b está, com efeito, a substituir-se as forças de corte da *figura 3.21(a)* pelas forças de corte S_x e S_y atuando no centro de corte da secção “aberta” resultante, juntamente com um momento de torção T como mostra a *figura 3.21(b)*.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

Mais à frente ver-se-á que um momento de torção aplicado numa secção fechada resulta num fluxo de corte constante.

Neste caso, o fluxo de corte constante $q_{s,0}$ corresponde ao momento de torção mas tem valores diferentes para posições do “corte” diferentes, uma vez que as secções “abertas” correspondentes terão centros de corte diferentes.

Um efeito adicional que resulta do “corte” da viga é obter-se uma estrutura estaticamente determinada atendendo a que os fluxos de corte q_b são obtidos a partir de considerações de equilíbrio estático.

Daqui se segue que uma viga de secção fechada de uma célula suportando apenas forças de corte é singularmente redundante.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.1. Torção e empeno com forças de corte

As forças de corte que não são aplicadas no centro de corte de uma viga de secção fechada fazem com que as secções transversais sejam torcidas e empenadas, isto é, para além da rotação, elas sofrem deslocamentos axiais.

As expressões para estas grandezas podem ser derivadas em relação à distribuição do fluxo de corte q_s , do seguinte modo.

Uma vez que $q = \tau t$ e $\tau = G\gamma$, então pode exprimir-se q_s em termos das deformações de empeno e tangenciais, w e v_t , num ponto da parede da viga usando a *equação 3.28*.

Assim

$$q_s = Gt \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \right) \quad (3.41)$$

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.1. Torção e empeno com forças de corte

Substituindo para $\partial v_t / \partial z$ da *equação 3.31* tem-se

$$\frac{q_s}{Gt} = \frac{\partial w}{\partial s} + p \frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{dz} \cos \psi + \frac{dv}{dz} \sin \psi \quad (3.41a)$$

Integrando a *equação 3.41a* em relação a s desde a origem escolhida e tendo em conta que G pode também ser uma função de s obtém-se

$$\int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds = \int_0^s \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{d\theta}{dz} \int_0^s p ds + \frac{du}{dz} \int_0^s \cos \psi ds + \frac{dv}{dz} \int_0^s \sin \psi ds$$

ou

$$\int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds = \int_0^s \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{d\theta}{dz} \int_0^s p ds + \frac{du}{dz} \int_0^s dx + \frac{dv}{dz} \int_0^s dy$$

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.1. Torção e empeno com forças de corte

o que dá

$$\int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds = (w_s - w_0) + 2A_{Os} \frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{dz} (x_s - x_0) + \frac{dv}{dz} (y_s - y_0) \quad (3.42)$$

onde A_{Os} é a área varrida pela geratriz, com centro na origem dos eixos O, desde a origem de s até qualquer s em torno da secção transversal.

Continuando a integração completa em torno da secção resulta, da *equação 3.42*, que

$$\oint \frac{q_s}{Gt} ds = 2A \frac{d\theta}{dz}$$

de onde se obtém a taxa de torção

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A} \oint \frac{q_s}{Gt} ds \quad (3.43)$$

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.1. Torção e empeno com forças de corte

Substituindo a taxa de torção da *equação 3.43* na *equação 3.42* e reorganizando obtém-se a distribuição de empeno em torno da secção transversal

$$(w_s - w_0) = \int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds - \frac{A_{Os}}{A} \oint \frac{q_s}{Gt} ds - \frac{du}{dz}(x_s - x_0) - \frac{dv}{dz}(y_s - y_0) \quad (3.44)$$

Usando as *equações 3.33* para substituir du/dz e dv/dz na *equação 3.44* tem-se

$$(w_s - w_0) = \int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds - \frac{A_{Os}}{A} \oint \frac{q_s}{Gt} ds - x_R \frac{d\theta}{dz}(x_s - x_0) + y_R \frac{d\theta}{dz}(y_s - y_0) \quad (3.45)$$

Os últimos dois termos na *equação 3.45* representam o efeito de relacionar o deslocamento de empeno com uma origem arbitrária que sofre ela própria um deslocamento axial devido ao empeno.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.1. Torção e empeno com forças de corte

No caso em que a origem coincide com o centro de torção R da secção a *equação 3.45* pode simplificar-se para

$$(w_s - w_0) = \int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds - \frac{A_{Os}}{A} \oint \frac{q_s}{Gt} ds \quad (3.46)$$

Em problemas que envolvem secções singularmente ou duplamente simétricas a origem de s pode ser coincidente com um ponto de empeno nulo que ocorrerá onde um eixo de simetria e a parede da secção se intersetam.

A origem de s em secções assimétricas pode ser escolhida arbitrariamente.

A distribuição de empeno resultante terá exatamente a forma da distribuição real mas estará deslocada axialmente pelo deslocamento de empeno na origem de s .

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.1. Torção e empeno com forças de corte

Este valor pode ser achado fazendo referência à torção de vigas de secção fechada sujeitas a uma restrição axial.

Na análise destas vigas assume-se que a distribuição das tensões diretas resultantes da restrição é diretamente proporcional ao empeno livre da secção, isto é

$$\sigma = \text{constante} \times w$$

Além disto, uma vez que é aplicado um momento de torção puro, a resultante de qualquer sistema interno de tensões diretas tem que ser zero, ou seja auto-equilibrador.

Assim

$$\text{força axial resultante} = \oint \sigma t ds$$

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.1. Torção e empeno com forças de corte

onde σ é a tensão direta em qualquer ponto da secção transversal.

Então, pela condição assumida acima, tem-se

$$0 = \oint w t ds$$

ou

$$0 = \oint (w_s - w_0) t ds$$

o que dá

$$w_0 = \frac{\oint w_s t ds}{\oint t ds} \quad (3.47)$$

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.2. Centro de corte

O centro de corte de uma viga de secção fechada é localizado de uma maneira semelhante àquela descrita anteriormente para vigas de secção aberta.

Assim, para determinar a coordenada ξ_s (referente a qualquer ponto conveniente na secção) do centro de corte S da viga de secção fechada da *figura 3.22* aplica-se uma força de corte S_y arbitrária através de S , calcula-se a distribuição do fluxo de corte q_s devido a S_y e seguidamente equacionam-se os momentos internos e externos.

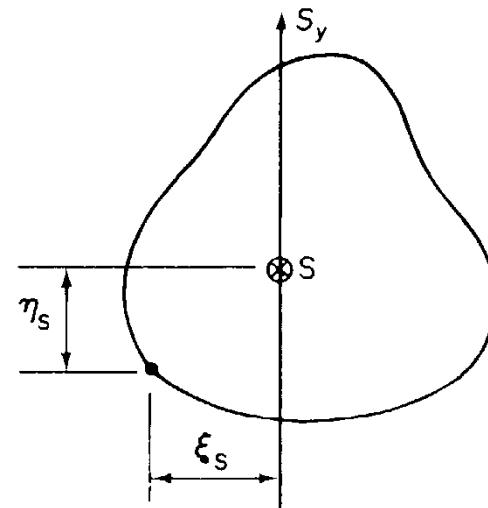


Figura 3.22 Centro de corte de uma viga de secção fechada.

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.2. Centro de corte

No entanto, existe um problema em obter $q_{s,0}$ uma vez que nesta altura é impossível equacionar os momentos internos e externos de forma a produzir uma equação semelhante à *equação 3.39* visto a posição de S_y ser desconhecida.

Por isso usa-se a condição de que uma força de corte que atue no centro de corte de uma secção produz torção nula.

Daqui segue-se que $d\theta/dz$ na *equação 3.43* é zero, o que dá

$$0 = \oint \frac{q_s}{Gt} ds$$

ou

$$0 = \oint \frac{1}{Gt} (q_b + q_{s,0}) ds$$

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.2. Centro de corte

o que dá

$$q_{s,0} = - \frac{\oint (q_b / Gt) ds}{\oint ds / Gt} \quad (3.48)$$

Se $Gt = \text{constante}$, então a *equação 3.48* pode simplificar-se em

$$q_{s,0} = - \frac{\oint q_b ds}{\oint ds} \quad (3.49)$$

A coordenada η_s é calculada da mesma forma aplicando S_x através de S .

5. Corte em vigas de parede fina e secção fechada

5.2. Centro de corte

Exemplo 3.06: Uma viga de secção fechada e paredes finas tem a secção transversal simétrica mostrada na *figura 3.23*. Cada parede da secção é plana e tem a mesma espessura t e o mesmo módulo de corte G . Calcular a distância do centro de corte ao ponto 4.

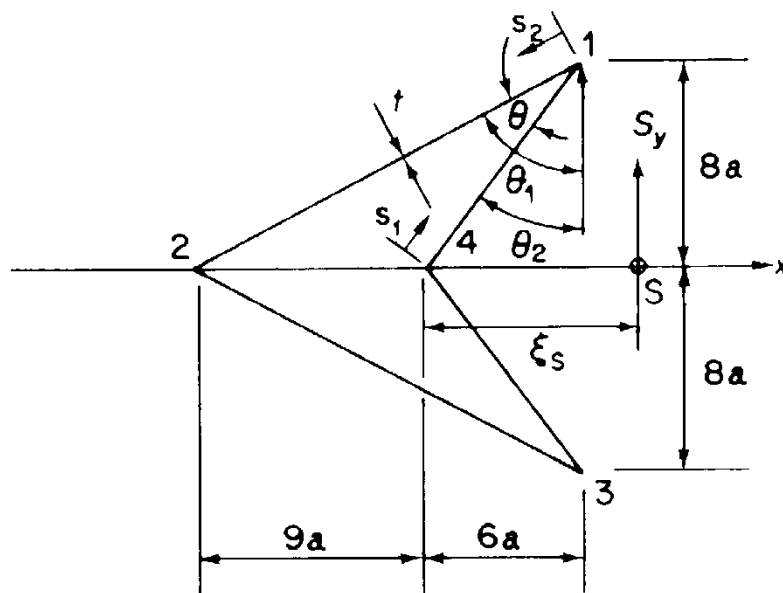


Figura 3.23 Viga de secção fechada do exemplo 3.06.

6. Torção de vigas de secção fechada

Uma viga de secção fechada sujeita a um momento de torção puro T , como mostra a *figura 3.24*, não desenvolve, na ausência de restrições axiais, um sistema de tensões diretas.

Daqui segue-se que as condições de equilíbrio das *equações 3.23* e *3.24* reduzem-se a $\partial q / \partial s = 0$ e $\partial q / \partial z = 0$, respetivamente.

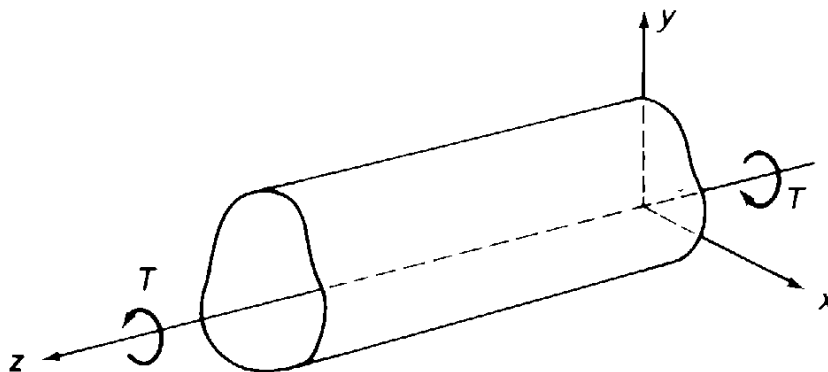


Figura 3.24 Torção de uma viga de secção fechada.

6. Torção de vigas de secção fechada

Estas relações só podem ser satisfeitas simultaneamente por um valor constante de q .

Deduz-se, assim, que a aplicação de um momento de torção puro numa viga de secção fechada resulta num fluxo de corte constante na parede da viga.

No entanto, a tensão de corte τ pode variar em torno da secção transversal uma vez que a espessura t pode ser uma função de s .

A relação entre o momento de torção aplicado e este fluxo de corte constante é simplesmente derivada considerando o equilíbrio de torção da secção da *figura 3.25*.

6. Torção de vigas de secção fechada

O momento de torção produzido pelo fluxo de corte atuando num elemento δs da parede da viga é $p q \delta s$.

Assim

$$T = \oint p q ds$$

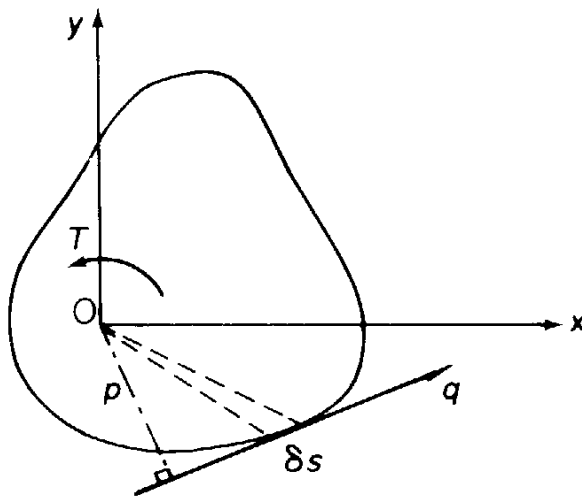


Figura 3.25 Determinação da distribuição do fluxo de corte numa viga de secção fechada sujeita à torção.

6. Torção de vigas de secção fechada

Uma vez que q é constante e, como anteriormente,

$$\oint p ds = 2A$$

então

$$T = 2Aq \quad (3.50)$$

É de salientar que a origem O do eixo na *figura 3.25* pode ser posicionado dentro ou fora da secção da viga uma vez que o momento dos fluxos de corte internos (cuja resultante é um momento de torção puro) é o mesmo em torno de qualquer ponto no seu plano.

Para uma origem fora da secção o termo $\oint p ds$ envolve a soma das áreas positivas e negativas.

6. Torção de vigas de secção fechada

O sinal de uma área é determinado pelo sinal de p que, ele próprio, está associado com a convenção de sinais para momentos da seguinte maneira.

Se o movimento de p ao longo da tangente em qualquer ponto na direção positiva de s resultar numa rotação de p no sentido anti-horário em torno da origem dos eixos, p é positivo.

A direção positiva de s é na direção positiva de q que é oposta ao movimento dos ponteiros do relógio (correspondendo a um momento de torção positivo).

Assim, na *figura 3.26* o gerador OA, rodando em torno de O, varrerá inicialmente uma área negativa uma vez que p_A é negativo.

6. Torção de vigas de secção fechada

Em B, no entanto, p_B é positivo e, por isso, a área varrida pelo gerador mudou de sinal (no ponto onde a tangente passa por O e $p=0$).

Áreas positivas e negativas cancelam-se umas às outras à medida que se sobrepõem de maneira que, à medida que o gerador se movimenta em torno da secção completa, começando e voltando a A, a área resultante é aquela envolvida pelo perfil da viga.

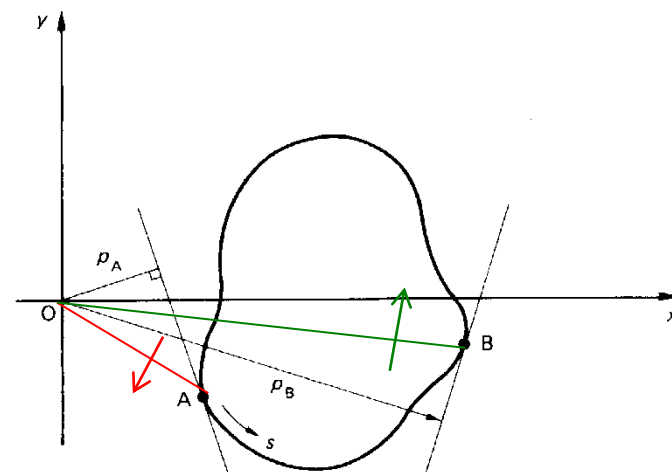


Figura 3.26 Convenção de sinal para áreas varridas.

6. Torção de vigas de secção fechada

A teoria da torção de vigas de secção fechada é conhecida pela *teoria de Bredt-Batho* e a *equação 3.50* é muitas vezes referida como a *fórmula de Bredt-Batho*.

6. Torção de vigas de secção fechada

6.1. Deslocamentos associados ao fluxo de corte de Bredt-Batho

A relação entre q e a deformação de corte γ estabelecida na equação 3.41, nomeadamente

$$q = Gt \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \right)$$

é válida para o caso de torção pura onde q é constante. Derivando esta expressão em relação a z tem-se

$$\frac{\partial q}{\partial z} = Gt \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} + \frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2} \right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2} = 0 \quad (3.51)$$

6. Torção de vigas de secção fechada

6.1. Deslocamentos associados ao fluxo de corte de Bredt-Batho

Na ausência de tensões diretas a extensão longitudinal $\partial w / \partial z = \varepsilon_z$ é zero de forma que

$$\frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2} = 0$$

Assim, da *equação 3.32*

$$p \frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \cos \psi + \frac{d^2 v}{dz^2} \sin \psi = 0 \quad (3.52)$$

Para a *equação 3.52* ser válida em todos os pontos da parede da secção, por outras palavras para todos os valores de ψ , então

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

6. Torção de vigas de secção fechada

6.1. Deslocamentos associados ao fluxo de corte de Bredt-Batho

Daqui segue-se que $\theta = Az + B$, $u = Cz + D$ e $v = Ez + F$ onde A , B , C , D , E e F são constantes desconhecidas.

Assim θ , u e v são funções lineares de z .

A equação 3.43 relacionando a razão de torção com o fluxo de corte variável q_s desenvolvida numa viga de secção fechada sujeita a uma força de corte é também válida para o caso de $q_s = q = \text{constante}$.

Assim

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{q}{2A} \oint \frac{ds}{Gt}$$

que se transforma, quando se substitui q da equação 3.50, em

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{4A^2} \oint \frac{ds}{Gt} \quad (3.53)$$

6. Torção de vigas de secção fechada

6.1. Deslocamentos associados ao fluxo de corte de Bredt-Batho

A distribuição de empeno produzida por um fluxo de corte variável como definido pela *equação 3.46* para eixos com a sua origem no centro de rotação é também aplicável ao caso em que o fluxo de corte é constante.

Assim

$$(w_s - w_0) = q \int_0^s \frac{ds}{Gt} - \frac{A_{Os}}{A} q \oint \frac{ds}{Gt}$$

Substituindo q da *equação 3.50* tem-se

$$w_s - w_0 = \frac{T\delta}{2A} \left(\frac{\delta_{Os}}{\delta} - \frac{A_{Os}}{A} \right) \quad (3.54)$$

onde

$$\delta = \oint \frac{ds}{Gt} \quad ; \quad \delta_{Os} = \int_0^s \frac{ds}{Gt}$$

6. Torção de vigas de secção fechada

6.1. Deslocamentos associados ao fluxo de corte de Bredt-Batho

O sinal do deslocamento de empeno na *equação 3.54* é governado pelo sinal do momento de torção aplicado e pelos sinais dos parametros δ_{0s} e A_{0s} .

Tendo especificado inicialmente que um momento de torção positivo atua no sentido anti-horário, os sinais de δ_{0s} e A_{0s} são fixos sendo que δ_{0s} é positivo quando s é positivo, isto é, toma-se s positivo no sentido anti-horário e A_{0s} é positivo quando, como anteriormente, p (ver *figura 3.26*) é positivo.

Já se notou que a deformação axial ε_z é zero numa viga de secção fechada sujeita a um momento de torção puro.

Isto significa que todas as secções da viga têm que possuir distribuições de empeno idênticas.



UBI
Covilhã
Portugal

6. Torção de vigas de secção fechada

6.1. Deslocamentos associados ao fluxo de corte de Bredt-Batho

Por outras palavras, os geradores longitudinais da superfície da viga permanecem imutáveis em comprimento apesar de sujeitos a deslocamento axial.

6. Torção de vigas de secção fechada

6.1. Deslocamentos associados ao fluxo de corte de Bredt-Batho

Exemplo 3.07: Determinar a distribuição de empeno na viga de secção retangular fechada e duplamente simétrica da *figura 3.27* quando sujeita a um momento de torção T aplicado no sentido anti-horário.

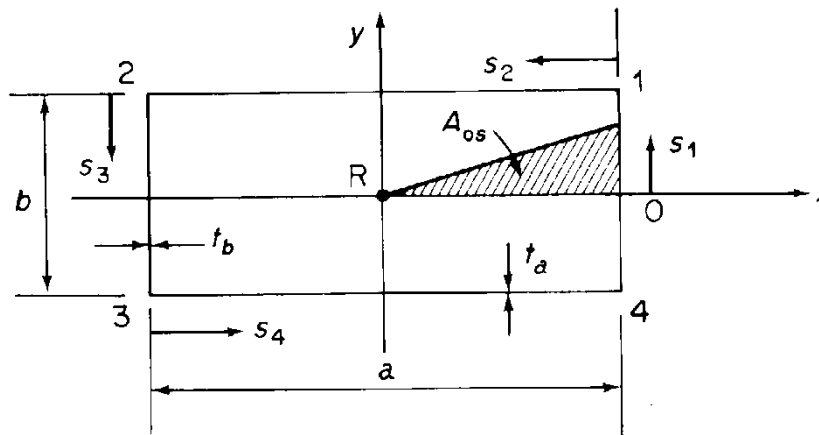


Figura 3.27 Convenção de sinal para áreas varridas.

6. Torção de vigas de secção fechada

6.2. Condições de empeno nulo numa secção

A geometria da secção de uma viga fechada sujeita a torção pode ser tal que a secção não empene.

Da *equação 3.54* vê-se que esta condição acontece quando

$$\frac{\delta_{Os}}{\delta} = \frac{A_{Os}}{A}$$

ou

$$\frac{1}{\delta} \int_0^s \frac{ds}{Gt} = \frac{1}{2A} \int_0^s p_R ds \quad (3.55)$$

Derivando a *equação 3.55* em relação a s tem-se

$$\frac{1}{\delta Gt} = \frac{p_R}{2A}$$

6. Torção de vigas de secção fechada

6.2. Condições de empeno nulo numa secção

ou

$$p_R Gt = \frac{2A}{\delta} = \text{constante} \quad (3.56)$$

Uma viga de secção fechada em que $p_R Gt = \text{constante}$ não empena e é conhecida como *viga de Neuber*.

Para vigas de secção fechada que tenham um módulo de corte constante esta condição fica

$$p_R t = \text{constante} \quad (3.57)$$

6. Torção de vigas de secção fechada

6.2. Condições de empeno nulo numa secção

Vigas deste tipo são:

- vigas de secção circular com espessura constante
- vigas de secção retangular com $at_b=bt_a$ (ver *exemplo 3.07*)
- vigas triangulares com espessura constante

No último caso o centro de corte e por isso o centro de rotação coincidem com o centro do círculo inscrito de forma que p_R de cada lado do triângulo seja o raio do círculo.

7. Torção de vigas de secção aberta

Pode obter-se uma solução aproximada para a torção de vigas abertas de parede fina usando os resultados da torção de uma tira retangular fina.

Se tal tira é dobrada para formar uma viga de secção aberta como mostra a *figura 3.28(a)* e se a distância s medida em torno da secção é grande em comparação com a espessura t então as linhas de tensão de corte são ainda paralelas às superfícies interior e exterior.

Daqui segue-se que as linhas de corte num elemento δs da secção aberta devem ser quase idênticas às linhas no elemento δs de uma tira retangular como a da *figura 3.28(b)*.

7. Torção de vigas de secção aberta

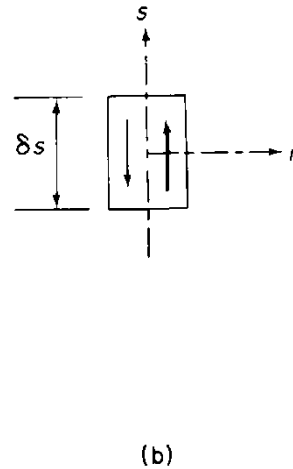
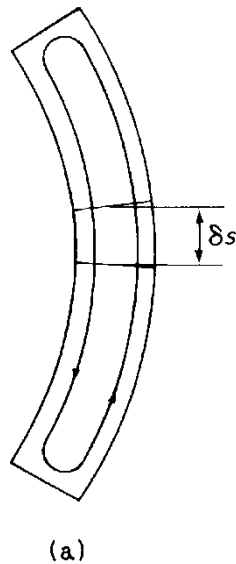


Figura 3.28 (a) Linhas de corte numa viga aberta de paredes finas sujeita à torção; (b) Aproximação de linhas de corte num elemento às linhas numa tira retangular fina.

7. Torção de vigas de secção aberta

As equações

$$\tau_{zs} = 2Gn \frac{d\theta}{dz} \quad ; \quad \tau_{zn} = 0 \quad (3.58)$$

$$\tau_{zs,\max} = \pm Gt \frac{d\theta}{dz} \quad (3.59)$$

$$J = \sum \frac{st^3}{3} \quad ; \quad J = \frac{1}{3} \int_{\text{secção}} t^3 ds \quad (3.60)$$

podem ser aplicadas a uma viga de secção aberta mas com a precisão reduzida.

Nas *equações 3.60* usa-se a segunda expressão da constante de torção se a secção tiver uma espessura variável.

7. Torção de vigas de secção aberta

Finalmente, a taxa de torção é expressa em função do momento de torção aplicado

$$T = GJ \frac{d\theta}{dz} \quad (3.61)$$

A distribuição da tensão de corte e a tensão de corte máxima são por vezes expressas mais convenientemente em função do momento de torção aplicado.

Assim, substituindo para $d\theta/dz$ na *equação 3.58 e 3.59* tem-se

$$\tau_{zs} = \frac{2n}{J} T \quad ; \quad \tau_{zs,\max} = \pm \frac{tT}{J} \quad (3.62)$$

Na análise de torção de vigas abertas assume-se que a secção transversal é mantida e que a viga tem uma secção uniforme.



UBI
Covilhã
Portugal

7. Torção de vigas de secção aberta

As tensões de corte variam nitidamente através da espessura da parede da viga enquanto que outras tensões como as tensões resultantes de restrições axiais assumem-se constantes através da espessura.

7. Torção de vigas de secção aberta

7.1. Empeno da secção transversal

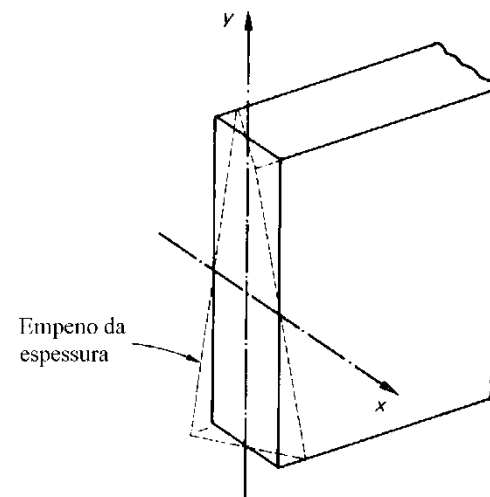
Uma tira retangular fina sofre empeno da sua espessura quando sujeita à torção.

Do mesmo modo, uma viga aberta de paredes finas também empena na espessura.

Este empeno, w_t , pode deduzir-se comparando a *figura 3.28(b)* com a *figura 3.29* e usando a equação em baixo.

$$w = xy \frac{d\theta}{dz}$$

Figura 3.29 Empeno de uma tira retangular fina.



7. Torção de vigas de secção aberta

7.1. Empeno da secção transversal

Assim

$$w_t = ns \frac{d\theta}{dz} \quad (3.63)$$

Além do empeno da espessura, a secção da viga também vai empenar de uma forma semelhante àquela de uma viga de secção fechada.

Da *figura 3.15*

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \quad (3.64)$$

Relacionando o deslocamento tangencial v_t com o centro de torção R da secção tem-se, da *equação 3.30*

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} = p_R \frac{d\theta}{dz} \quad (3.65)$$

7. Torção de vigas de secção aberta

7.1. Empeno da secção transversal

Substituindo para $\partial v_t / \partial z$ na *equação 3.64* obtém-se

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + p_R \frac{d\theta}{dz}$$

de onde

$$\tau_{zs} = G \left(\frac{\partial w}{\partial s} + p_R \frac{d\theta}{dz} \right) \quad (3.66)$$

Na linha média da parede da secção $\tau_{zs}=0$ (ver *equação 3.58*) de forma que, da *equação 3.66*

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -p_R \frac{d\theta}{dz}$$

7. Torção de vigas de secção aberta

7.1. Empeno da secção transversal

Integrando esta expressão em relação a s tomando o limite inferior de integração coincidente com o ponto de empeno nulo obtém-se

$$w_s = -\frac{d\theta}{dz} \int_0^s p_R ds \quad (3.67)$$

Das *equações 3.63 e 3.67* pode ver-se que existem dois tipos de empeno numa viga de secção aberta.

A *equação 3.67* dá o empeno da linha média da viga; este empeno é conhecido como o *empeno primário* e considera-se constante através da espessura.

7. Torção de vigas de secção aberta

7.1. Empeno da secção transversal

A equação 3.63 dá o empeno da viga na espessura da parede. Este empeno chama-se *empeno secundário*, é muito menor que o empeno primário e é usualmente ignorado nas secções de paredes finas encontradas em estruturas de aeronaves.

A equação 3.67 pode escrever-se na seguinte forma

$$w_s = -2A_R \frac{d\theta}{dz} \quad (3.68)$$

ou, em função do momento de torção aplicado,

$$w_s = -2A_R \frac{T}{GJ} \quad (3.69)$$

onde $A_R = 1/2 \int_0^s p_R ds$ é a área varrida por um gerador, rodando em torno do eixo de rotação, desde o ponto de empeno nulo como mostra a *figura 3.30*.

7. Torção de vigas de secção aberta

7.1. Empeno da secção transversal

O sinal de w_s , numa dada direção do momento de torção, depende do sinal de A_R que por sua vez depende do sinal de p_R , a distância perpendicular desde o centro de rotação até à tangente de qualquer ponto.

À semelhança das vigas de secção fechada, o sinal de p_R depende da direção assumida para um momento de torção positivo, neste caso no sentido anti-horário.

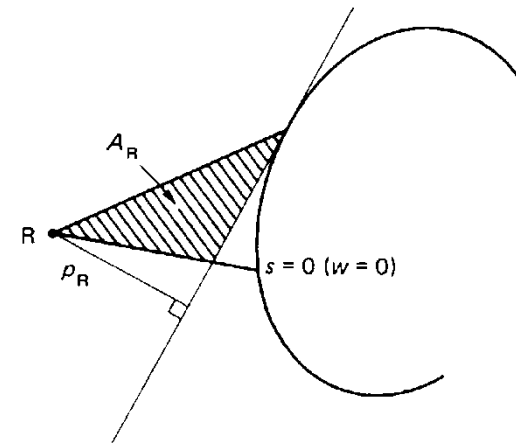


Figura 3.30 Empeno de uma viga de secção aberta.

7. Torção de vigas de secção aberta

7.1. Empeno da secção transversal

Assim, p_R (e por isso A_R) é positivo se o movimento do pé de p_R ao longo da tangente na direção positiva de s leva a uma rotação de p_R no sentido anti-horário em torno do centro de rotação. É de salientar que a direção positiva de s pode ser escolhida arbitrariamente numa viga aberta uma vez que, para um determinado momento de torção, o sinal do deslocamento de empeno depende apenas do sinal da área A_R .

7. Torção de vigas de secção aberta

7.1. Empeno da secção transversal

Exemplo 3.08: Determinar a tensão de corte máxima e a distribuição de empeno na secção da *figura 3.31* quando sujeita a um momento de torção anti-horário de 10 Nm.
 $G=25000\text{N/mm}^2$.

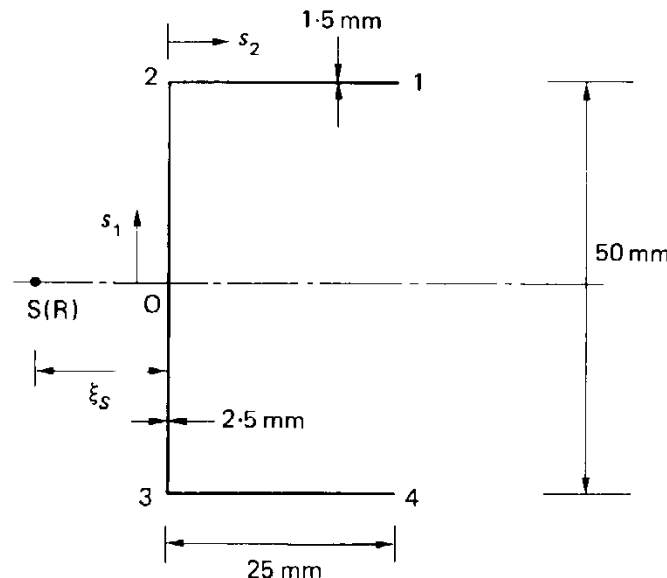


Figura 3.31 Secção do exemplo 3.08.

8. Combinação de secções abertas e fechadas

Em alguns casos a secção transversal de uma viga é formada por uma combinação de componentes abertos e fechados.

Por exemplo, uma asa na zona do porão do trem de aterragem pode tomar a forma mostrada na *figura 3.32* onde a porção do nariz é uma secção fechada e o corte forma um canal aberto.

Estas secções compostas podem ser analisadas usando, quando apropriado, uma combinação dos métodos anteriormente descritos neste capítulo.

Ir-se-á examinar as diferentes condições de carregamento uma de cada vez.

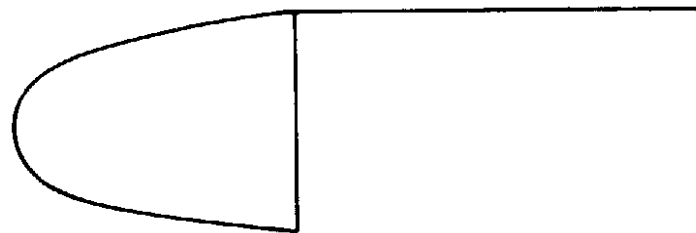


Figura 3.32 Secção de asa com componentes aberto e fechado.

8. Combinação de secções abertas e fechadas

8.1. Flexão

A forma da secção de uma viga é irrelevante; as tensões resultantes da flexão são obtidas da *equação 3.07* ou da *equação 3.08*.

8. Combinação de secções abertas e fechadas

8.2. Corte

Os métodos descritos nas *secções 4 e 5* são usados para determinar a distribuição das tensões de corte apesar de, ao contrário das *secções completamente fechadas*, as cargas de corte terem que ser aplicadas no centro de corte da *secção combinada*, de outra forma tensões de corte devido à torção também estarão presentes.

Quando as cargas não atuam no centro de corte a sua posição tem que ser determinada e o sistema de cargas tem que ser substituído por forças atuando no centro de corte juntamente com um momento de torção; os dois casos de carregamento são assim analisados separadamente.

Mais uma vez assume-se que a forma da *secção transversal da viga* permanece igual depois da aplicação das cargas.

8. Combinação de secções abertas e fechadas

8.2. Corte

Exemplo 3.09: Determinar a distribuição do fluxo de corte na secção da viga da *figura 3.33* quando sujeita a uma força de corte aplicada no seu plano vertical de simetria. A espessura das paredes da secção é 2 mm.

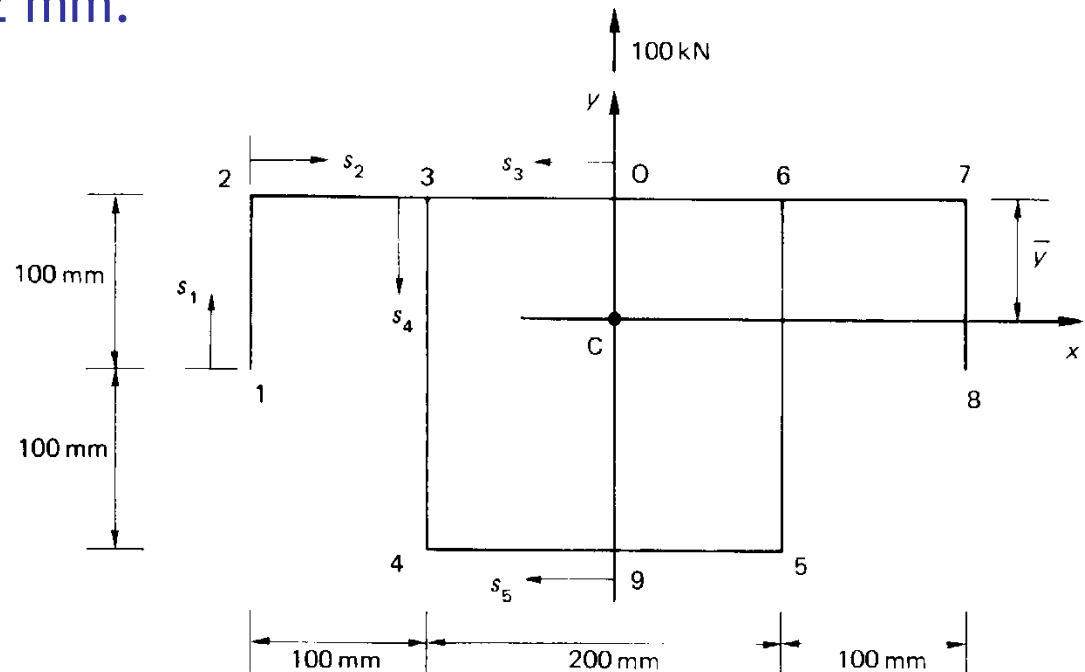


Figura 3.33 Secção da viga do exemplo 3.09.

8. Combinação de secções abertas e fechadas

8.3. Torção

Geralmente, na torção de secções compostas, a parte fechada é dominante uma vez que a rigidez de torção é muito maior do que a da secção aberta adjacente que pode, por isso, ser frequentemente ignorada no cálculo da rigidez de torção; as tensões de corte devem, apesar de tudo, ser verificadas nesta parte da secção.

8. Combinação de secções abertas e fechadas

8.3. Torção

Exemplo 3.10: Calcular a variação do ângulo de torção por unidade de comprimento na asa cuja secção está representada na *figura 3.34* quando sujeita a um momento de torção de 10 kNm. Determinar, também, a tensão de corte máxima na secção. $G=25000 \text{ N/mm}^2$. O comprimento da parede 12 externa é de 900 mm e a área da célula do nariz é 20000 mm^2 .

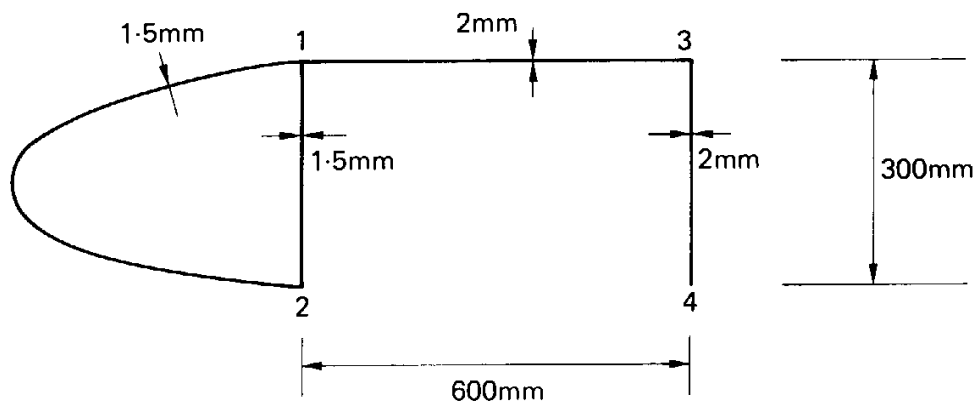


Figura 3.34 Secção da asa do exemplo 3.10.

9. Idealização estrutural

Até agora tem-se analisado secções estruturais relativamente simples que na prática seriam formadas a partir de chapas finas ou por extrusão.

Estas secções existem como membros estruturais independentes mas frequentemente elas são usadas para reforçar formas estruturais mais completas como, por exemplo, fuselagens, asas e empenagens.

Assim, uma asa com duas longarinas pode tomar a forma da *figura 3.35* onde tensores em Z são usados para reforçar o revestimento fino enquanto secções em L formam as mesas da longarina.

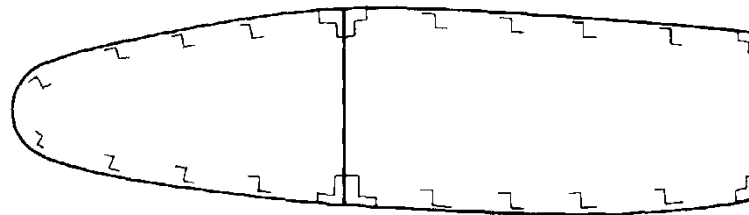


Figura 3.35 Secção de asa típica.

9. Idealização estrutural

Obviamente, a análise de uma secção deste tipo pode ser trabalhosa a menos que se usem algumas simplificações.

Geralmente o número e a natureza destas simplificações determina a precisão e o grau de complexidade do problema; quanto mais complexa for a análise maior será a precisão do resultado.

O grau de simplificação introduzido depende do problema em si. Numa investigação preliminar, rapidez e simplicidade têm geralmente mais importância do que muita precisão; por outro lado a solução final tem que ser tão exata quanto possível.

Na secção de asa da *figura 3.35*, as secções transversais dos tensores e das mesas das longarinas têm dimensões reduzidas quando comparadas com o resto da secção.

9. Idealização estrutural

Desta forma, a variação das tensões na secção transversal de um tensor devido à flexão da asa, por exemplo, seria pequena.

A diferença entre a distância dos centróides dos tensores e a distância do revestimento adjacente ao eixo da secção da asa também é pequena.

Seria razoável assumir que as tensões diretas não variam na secção transversal dos tensores.

Assim, poderíamos substituir os tensores e as mesas das longarinas por concentrações de área, conhecidas por “*booms*”, onde as tensões diretas são constantes e que são localizadas ao longo da linha média do revestimento como mostra a *figura 3.36*.

9. Idealização estrutural

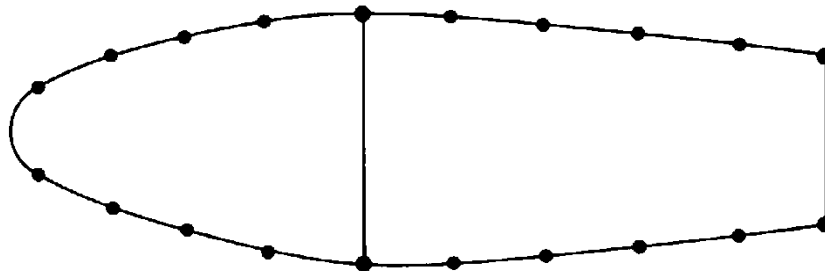


Figura 3.36 Idealização de uma secção de asa.

Em secções de asas e de fuselagens do tipo mostrado na *figura 3.35*, os tensores e as mesas da longarina suportam a maioria das tensões diretas enquanto que o revestimento é mais eficiente em resistir às tensões de corte apesar de também suportar algumas das tensões diretas.

Assim, na idealização mostrada na *figura 3.36* pode assumir-se que os “booms” suportam todas as tensões diretas enquanto que o revestimento só é efetivo ao corte.

9. Idealização estrutural

A capacidade de suportar tensões diretas por parte do revestimento pode ter-se em conta se a área de cada “boom” for aumentada numa área equivalente ao revestimento dos painéis adjacentes que suportam as tensões diretas.

O cálculo destas áreas equivalentes depende geralmente da forma da distribuição das tensões diretas nos “booms”/revestimento assumida inicialmente.

Suponha-se que o painel da *figura 3.37(a)* é idealizado numa combinação de “booms” suportando tensões diretas e revestimento suportando apenas tensões de corte como mostra a *figura 3.37(b)*.

9. Idealização estrutural

Na *figura 3.37(a)* a espessura do revestimento t_D que suporta a tensão direta é igual à sua espessura real t enquanto que na *figura 3.37(b)* $t_D=0$.

Suponha-se também que as tensões diretas no painel real variam linearmente de um valor desconhecido σ_1 até outro valor desconhecido σ_2 .

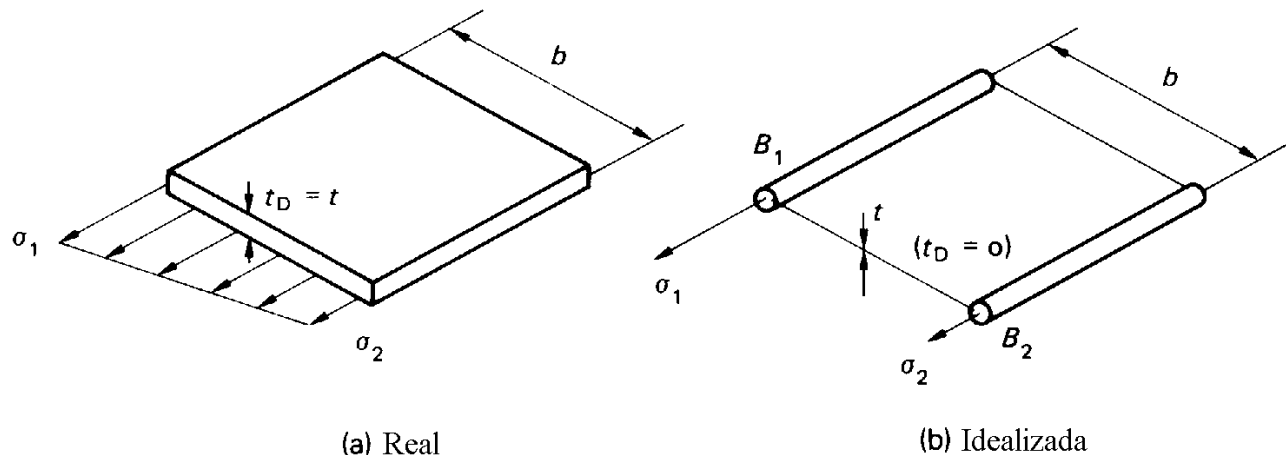


Figura 3.37 Idealização de um painel.

9. Idealização estrutural

Obviamente que a análise deveria antecipar os extremos das tensões σ_1 e σ_2 apesar da distribuição ser perdida.

Uma vez que a carga que produz as tensões diretas nos painéis real e idealizado têm que ser iguais, os momentos podem ser equacionados para se obterem expressões para as áreas dos “booms” B_1 e B_2 .

Assim, tirando momentos em torno da face direita de cada painel

$$\sigma_2 t_D \frac{b^2}{2} + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) t_D b \frac{2}{3} b = \sigma_1 B_1 b$$

de onde

$$B_1 = \frac{t_D b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \quad (3.70)$$

9. Idealização estrutural

Da mesma forma

$$B_2 = \frac{t_D b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \quad (3.71)$$

A razão σ_1/σ_2 nas *equações 3.70 e 3.71*, se desconhecida, pode frequentemente ser assumida.

A distribuição das tensões diretas na *figura 3.37(a)* é causada pela combinação da carga axial e do momento fletor.

Quando só a carga axial está presente $\sigma_1/\sigma_2=1$ e $B_1=B_2=t_D b/2$; para momentos fletores puros $\sigma_1/\sigma_2=-1$ e $B_1=B_2=t_D b/6$.

Assim, idealizações diferentes da mesma estrutura são necessárias para condições de cargas diversas.

9. Idealização estrutural

Exemplo 3.11: Parte de uma secção de asa tem a forma de uma caixa de duas células (*figura 3.38(a)*) onde as longarinas estão unidas ao revestimento por meio de secções em ângulo com uma área de secção de 300 mm^2 . Idealizar a secção numa combinação de “booms” suportando as tensões diretas e casca suportando só as tensões de corte e que seja capaz de resistir a momentos fletores num plano vertical. Posicionar os “booms” nas interseções longarina/casca.

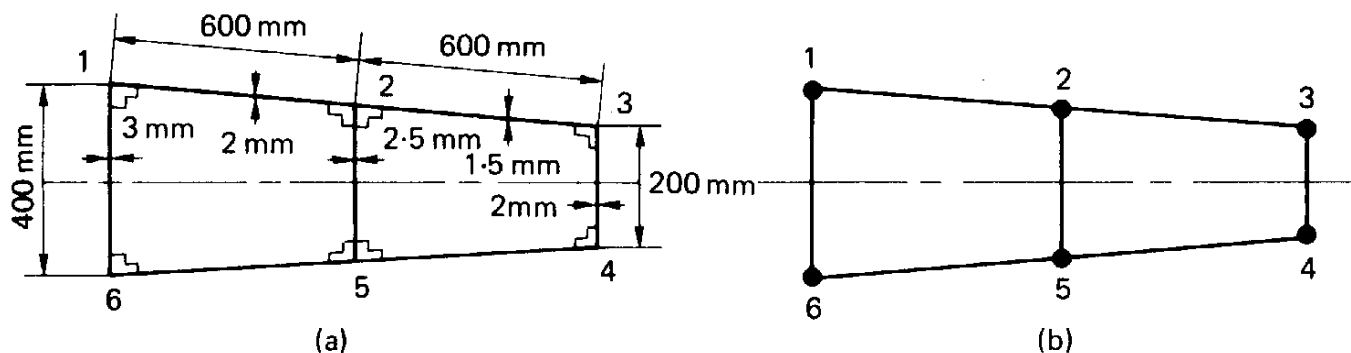


Figura 3.38
Idealização de uma
secção de asa.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

A inclusão de “booms” para suportar as tensões diretas nas vigas abertas e fechadas vai, obviamente, modificar a análise apresentada anteriormente.

Antes de considerar casos individuais é necessário compreender as implicações da idealização estrutural.

Geralmente, em qualquer idealização, diferentes condições de carga requerem diferentes idealizações para a mesma estrutura.

No *exemplo 3.11* a carga é aplicada num plano vertical.

Se, no entanto, a carga tivesse sido aplicada num plano horizontal a distribuição das tensões assumida nos painéis da secção teria sido diferente, resultando em “booms” com áreas diferentes.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

Suponha-se que uma secção aberta ou fechada está sujeita a uma dada carga de flexão ou de corte e que a idealização apropriada já foi realizada.

A análise destas secções envolve usualmente a determinação da posição do eixo neutro e o cálculo das propriedades da secção.

A posição do eixo neutro é derivada da condição de que a força axial total na secção transversal é zero, isto é

$$\int_A \sigma_z dA = 0$$

A área A na expressão é nitidamente a área que suporta as tensões diretas.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

Daqui segue-se que o centróide da secção transversal é o centróide da área da secção que suporta as tensões diretas, dependendo do grau e método de idealização.

As propriedades da secção, I_{xx} , I_{yy} , etc., referem-se à área que suporta as tensões diretas.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.1. Flexão de vigas abertas e fechadas

A análise apresentada na *secção 2* aplica-se aqui e a distribuição das tensões diretas é dada por qualquer das *equações 3.07, 3.08* ou *3.09*, dependendo da secção em investigação.

Nestas equações as coordenadas (x,y) dos pontos da secção transversal referem-se a eixos com a sua origem no centróide da área que suporta as tensões diretas.

Para além disto, as propriedades da secção I_{xx} , I_{yy} e I_{xy} são calculadas só para a área que suporta as tensões diretas.

No caso em que a secção transversal da viga foi totalmente idealizada em “booms” suportando as tensões diretas e em revestimento suportando só as tensões de corte, a distribuição das tensões diretas consiste numa série de tensões diretas concentradas nos centróides dos “booms”.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.1. Flexão de vigas abertas e fechadas

Exemplo 3.12: A secção da fuselagem da *figura 3.39* está sujeita a um momento fletor de 100 kNm aplicado no plano vertical de simetria. Se a secção foi completamente idealizada numa combinação de “booms” suportando as tensões diretas e revestimento suportando só as tensões de corte, determinar a tensão direta em cada “boom”.

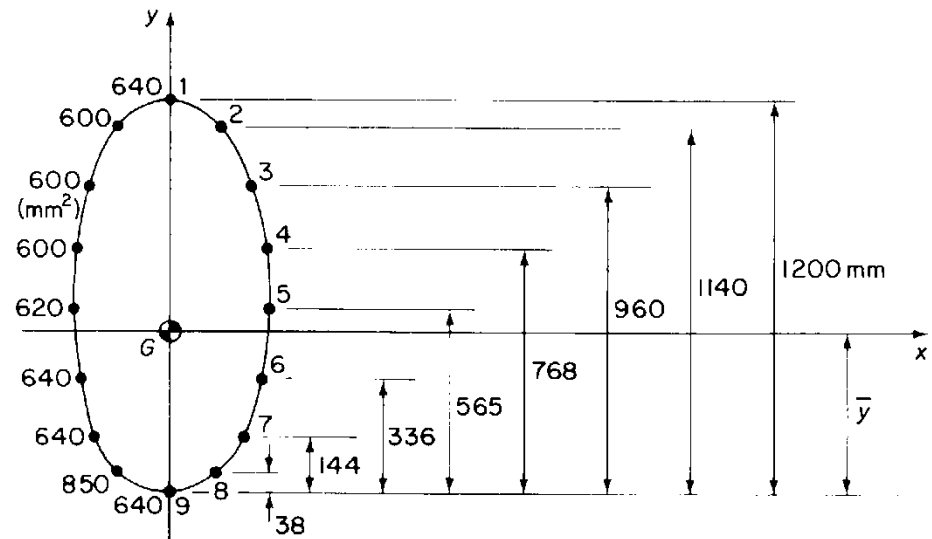


Figura 3.39 Secção de fuselagem idealizada do *exemplo 4.12*.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

A derivação da *equação 3.36* para a distribuição do fluxo de corte na secção transversal de uma viga aberta é baseada na equação de equilíbrio 3.23.

A espessura t nesta secção refere-se à espessura t_D do revestimento que suporta as tensões diretas (ver *secção 9*).

A *equação 3.36* pode, então, escrever-se na forma

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t_D x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t_D y ds \quad (3.72)$$

onde $t_D = t$ caso o revestimento seja completamente capaz de suportar tensões diretas ou $t_D = 0$ caso o revestimento suporte apenas tensões de corte.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

As propriedades da secção na *equação 3.72* referem-se à área da secção que suporta as tensões diretas uma vez que são elas as usadas nas *equações 3.07 e 3.08*.

$$\sigma_z = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y$$

$$\sigma_z = \frac{M_x (I_{yy} y - I_{xy} x)}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} + \frac{M_y (I_{xx} x - I_{xy} y)}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}$$

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

A *equação 3.72* não inclui os efeitos dos “booms” que provocam descontinuidades no revestimento e por isso interrompem o fluxo de corte.

Considere-se o equilíbrio do “boom” r no pedaço de comprimento da viga mostrado na *figura 3.40(a)* e sobre o qual atuam as forças de corte S_x e S_y através do centro de corte S .

Estas forças de corte produzem tensões diretas devido à flexão dos “booms” e do revestimento e tensões de corte no revestimento.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

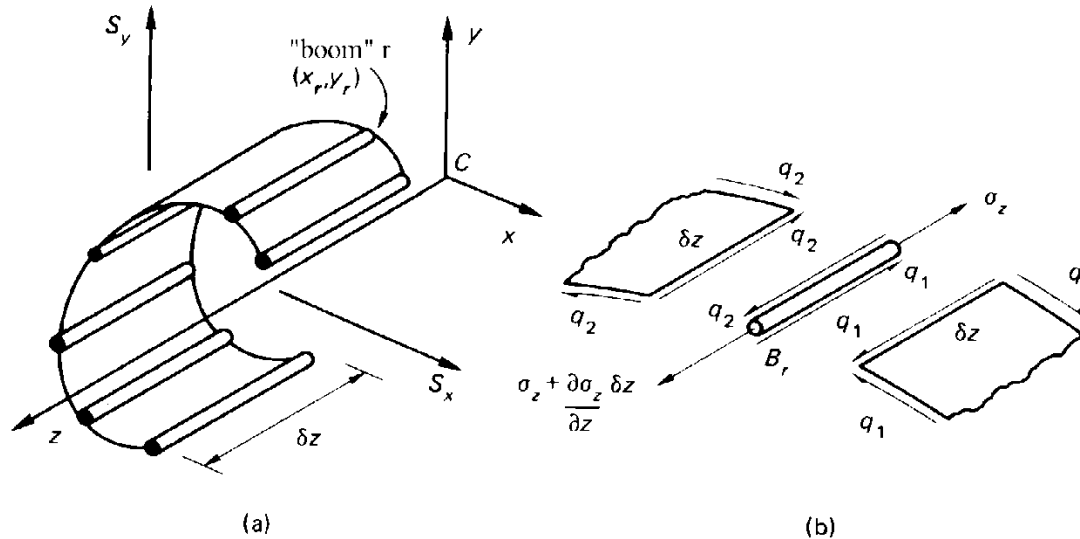


Figura 3.40 (a) Porção de comprimento duma viga aberta com “booms” sujeita a corte; (b) Equilíbrio de um elemento de um “boom”.

Suponha-se que os fluxos de corte no revestimento adjacente ao “boom” r com área transversal B_r são q_1 e q_2 .

Assim, da *figura 3.40(b)* tem-se

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta z \right) B_r - \sigma_z B_r + q_2 \delta z - q_1 \delta z = 0$$

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

que pode ser simplificado em

$$q_2 - q_1 = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} B_r \quad (3.73)$$

Substituindo para σ_z da *equação 3.07* na *equação 3.73* obtém-se

$$q_2 - q_1 = -\left[\frac{(\partial M_y / \partial z) I_{xx} - (\partial M_x / \partial z) I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right] B_r x_r - \left[\frac{(\partial M_x / \partial z) I_{yy} - (\partial M_y / \partial z) I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right] B_r y_r$$

ou então, usando as relações das *equações 3.12 e 3.13*

$$q_2 - q_1 = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) B_r x_r - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) B_r y_r \quad (3.74)$$

A *equação 3.74* dá a mudança do fluxo de corte induzido por um “boom” que, ele próprio, está sujeito a um esforço axial ($\sigma_z B_r$).

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

Cada vez que um “boom” é atravessado, o fluxo de corte é incrementado por este valor de forma que se, a qualquer distância s em torno do perfil da secção, n “booms” foram atravessados o fluxo de corte no ponto é dado por

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) \quad (3.75)$$

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

Exemplo 3.13: Calcular a distribuição do fluxo de corte na secção da *figura 4.41* produzida pela força vertical de 4,8 kN que atua através do centro de corte. Pode assumir-se que as paredes da secção só são efetivas a resistir tensões de corte enquanto que os “booms”, cada um com a área de 300 mm², suportam apenas tensões diretas.

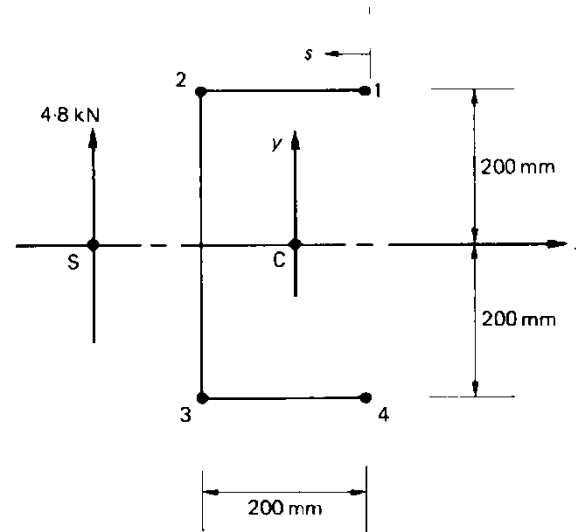


Figura 3.41 Secção idealizada do exemplo 3.13.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

Na *equação*

$$q_s = -\frac{S_y}{I_{xx}} \sum_{r=1}^n B_r y_r$$

do *exemplo 3.13* pode ver-se que a análise de uma viga que tenha sido idealizada numa combinação de “booms” que suportam tensões diretas e revestimentos que suportam apenas tensões de corte dá valores do fluxo de corte constantes no revestimento entre os “booms”.

A distribuição real é assim perdida.

Na verdade, o que se obtém é a média do fluxo de corte como pode verificar-se no *exemplo 3.13*.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

A análise da secção não idealizada resultaria numa distribuição parabólica na porção 23 cuja resultante é estaticamente equivalente à força exterior de 4,8 kN.

Na *figura 3.41*, a resultante do fluxo de corte constante na porção é $12 \times 400 = 4800 \text{ N} = 4,8 \text{ kN}$.

Daqui segue-se que este valor constante do fluxo de corte é a média da distribuição parabólica do fluxo de corte da secção não idealizada.

O resultado, da idealização da secção da viga, de um fluxo de corte constante entre “booms” pode ser usado com benefícios em partes da análise.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

Suponha-se que a secção curva da *figura 3.42* tem “booms” nas suas extremidades e que o fluxo de corte q_{12} é constante.

A força de corte que atua num elemento δs da secção é $q_{12} \delta s$ e as componentes vertical e horizontal são $q_{12} \delta s \sin \phi$ e $q_{12} \delta s \cos \phi$.

A resultante, paralela ao eixo do x , S_x , de q_{12} é então dada por

$$S_x = \int_1^2 q_{12} \cos \phi ds$$

ou

$$S_x = q_{12} \int_1^2 \cos \phi ds$$

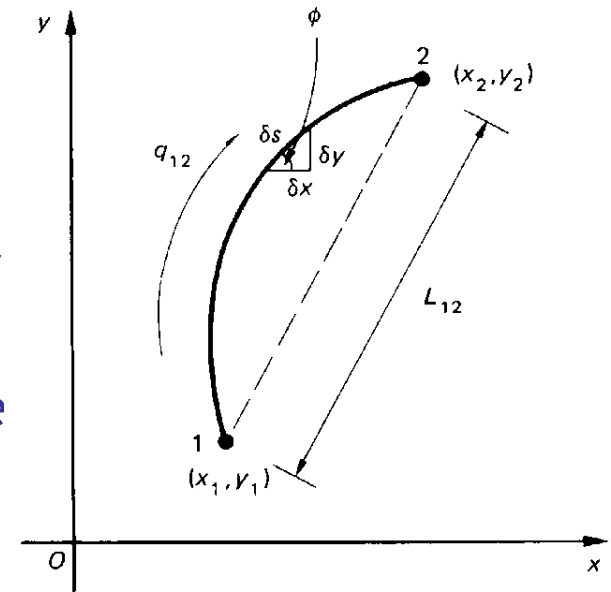


Figura 3.42 Secção curva com fluxo de corte constante.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

o que, pela *figura 3.42*, pode escrever-se

$$S_x = q_{12} \int_1^2 dx = q_{12} (x_2 - x_1) \quad (3.76)$$

Da mesma forma a resultante de q_{12} paralela ao eixo do y é

$$S_y = q_{12} \int_1^2 dy = q_{12} (y_2 - y_1) \quad (3.77a)$$

Assim, a resultante de um fluxo de corte constante, numa dada direção, atuando numa casca é o valor do fluxo de corte multiplicado pela projeção da casca nessa direção.

A força de corte resultante S na alma da *figura 3.42* é

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = q_{12} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

isto é

$$S = q_{12} L_{12} \quad (3.77b)$$

Assim, a resultante da força de corte que atua na casca é o produto do fluxo de corte pelo comprimento da linha reta que une as pontas da mesma; obviamente a direção da resultante é paralela a esta linha.

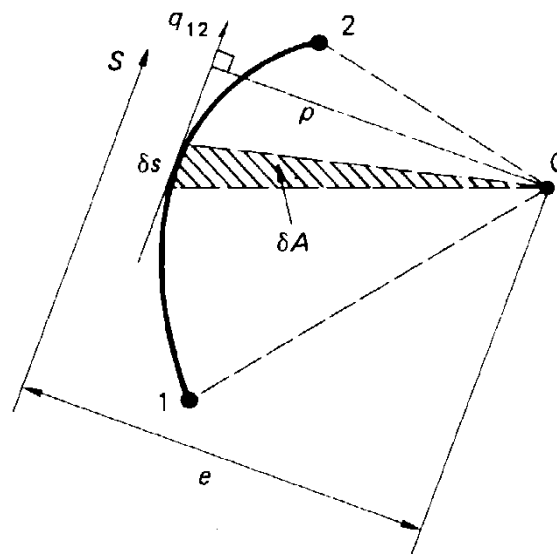


Figura 3.43 Momento produzido pelo fluxo de corte constante.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

Pela *figura 3.43*, o momento M_q , produzido pelo fluxo de corte q_{12} , em torno do ponto O no plano da alma é

$$M_q = \int_1^2 q_{12} p ds = q_{12} \int_1^2 2dA$$

ou

$$M_q = 2Aq_{12} \quad (3.78)$$

onde A é a área envolvida pela casca e pelas linhas que unem as suas pontas ao ponto O.

Este resultado pode ser usado para determinar a distância da linha de ação da força de corte resultante a partir de qualquer ponto.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.2. Corte de vigas de secção aberta

Da *figura 3.43*

$$Se = 2Aq_{12}$$

de onde se tira

$$e = \frac{2A}{S} q_{12}$$

Substituindo para q_{12} da *equação 3.77b* tem-se

$$e = \frac{2A}{L_{12}}$$

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.3. Corte de vigas de secção fechada

O raciocínio usado nas secções abertas também é válido neste caso das secções fechadas.

Assim, o fluxo de corte em qualquer ponto em volta da secção transversal de uma viga fechada com “booms” e revestimento t_D com espessura que suporta tensões diretas é, comparando as equações 3.75 e 3.37

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) + q_{s,0} \quad (3.79)$$

Note-se que o valor zero do fluxo de corte da secção “aberta” na posição do “corte” do revestimento para o qual $t_D=0$ estende-se desde o “corte” até aos “booms” adjacentes.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.3. Corte de vigas de secção fechada

Exemplo 3.14: A viga com paredes finas e uma única célula da *figura 3.44* foi idealizada numa combinação de “booms” que suportam tensões diretas e paredes que suportam apenas tensões de corte. Se na secção atuar uma força vertical de 10 kN que passa pelos “booms” 3 e 6, calcular a distribuição do fluxo de corte em torno da secção.

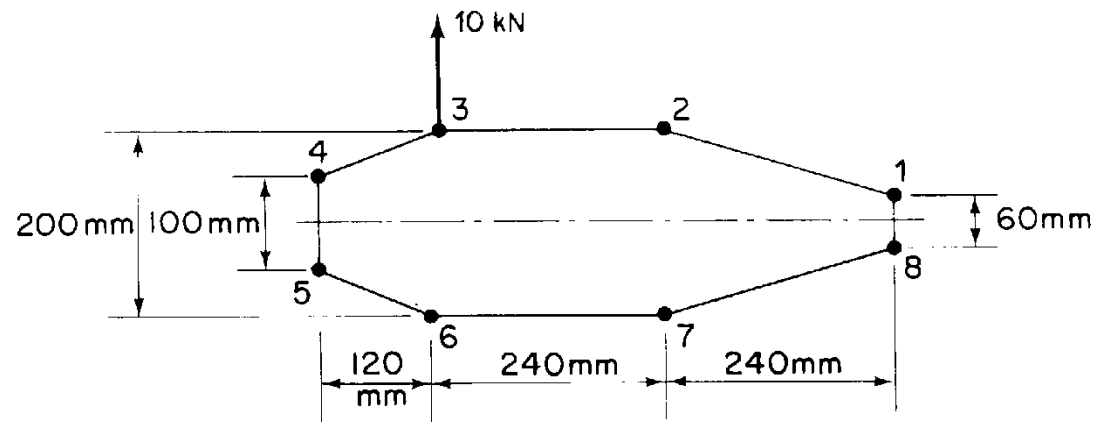


Figura 3.44 Secção fechada da viga do *exemplo 3.14*.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.3. Corte de vigas de secção fechada

Exemplo 3.14 (cont.): As áreas dos “booms” são $B_1=B_8=200\text{mm}^2$, $B_2=B_7=250\text{mm}^2$, $B_3=B_6=400\text{mm}^2$ e $B_4=B_5=100\text{mm}^2$.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.4. Torção de vigas abertas e fechadas

Nenhumas tensões diretas são produzidas numa viga de secção aberta ou fechada sujeita a um momento de torção puro, a menos que restrições axiais estejam presentes.

A distribuição do fluxo de corte não é, por isso, afetada pela presença de “booms” e o método usado nas secções 7 e 8 pode usar-se neste caso.

10.5. Método alternativo para calcular a distribuição do fluxo de corte

A equação 3.73 pode escrever-se na seguinte forma

$$q_2 - q_1 = -\frac{\partial P_r}{\partial z} \quad (3.80)$$

onde P_r é a carga axial no “boom” r .

Esta forma da equação sugere uma alternativa à determinação do efeito dos “booms” no cálculo das distribuições do fluxo de corte em vigas abertas e fechadas.

Suponha-se que a carga nos “booms” varia linearmente com z , o que acontece quando a força de corte é constante num determinado comprimento da viga.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.5. Método alternativo para calcular a distribuição do fluxo de corte

A equação 3.80 fica

$$q_2 - q_1 = -\Delta P_r \quad (3.81)$$

onde ΔP_r é o *incremento* na carga do “boom” num comprimento unitário, $\Delta z=1$, do “boom” r .

ΔP_r pode ser calculado começando por determinar o *incremento* do momento fletor entre duas secções da viga que estejam distanciadas de uma unidade de comprimento e seguidamente calculando a mudança correspondente na tensão do “boom”, usando a equação 3.07 ou a equação 3.08.

O incremento na carga do “boom” determina-se multiplicando o incremento na tensão do “boom” pela sua área B_r .

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.5. Método alternativo para calcular a distribuição do fluxo de corte

É de salientar que as propriedades da secção nas *equações 3.07* e *3.08* referem-se à área da secção da viga que suporta as tensões diretas.

Nos casos em que a força de corte não é constante no comprimento unitário da viga o método é aproximado.

10. Análise de vigas idealizadas com secção aberta e fechada

10.5. Método alternativo para calcular a distribuição do fluxo de corte

Exemplo 3.15: Calcular a distribuição do fluxo de corte na secção da *figura 3.45* produzida pela força vertical de 4,8 kN que atua através do centro de corte. Pode assumir-se que as paredes da secção só são efetivas a resistir tensões de corte enquanto que os “booms”, cada um com a área de 300 mm², suportam apenas tensões diretas. Usar o método alternativo.

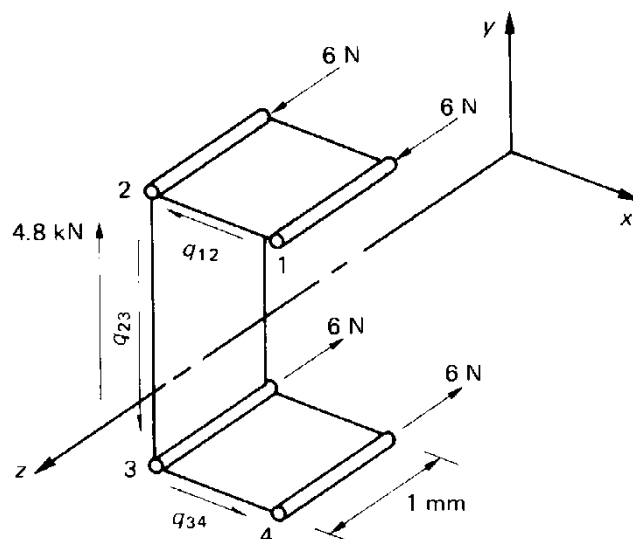


Figura 3.45 Alternativa ao exemplo 3.13.

11. Método da carga/força unitária

Energia potencial total

A energia potencial total de um corpo elástico é dada pela seguinte expressão

$$\Pi = U + W \quad (3.82)$$

onde U é a energia de extensão (interna) do corpo e W é o trabalho realizado pelas forças externas P_r ($r=1,n$) ao longo dos respetivos deslocamentos Δ_r ($r=1,n$) dado por

$$W = - \sum_{r=1}^n P_r \Delta_r \quad (3.83)$$

Então,

$$\Pi = U - \sum_{r=1}^n P_r \Delta_r \quad (3.84)$$

11. Método da carga/força unitária

Valor estacionário da energia potencial total

Considere-se um corpo elástico em equilíbrio sujeito às forças externas P_r ($r=1,n$) com deslocamentos virtuais pequenos nas direções das forças.

O trabalho virtual realizado pelas forças é

$$\delta W = \sum_{r=1}^n P_r \delta \Delta_r \quad (3.85)$$

Este trabalho é acompanhado por um incremento da energia de extensão δU . Este incremento da energia de extensão considera-se como sendo trabalho negativo interno pelo que o trabalho total realizado durante o deslocamento virtual é

$$-\delta U + \sum_{r=1}^n P_r \delta \Delta_r \quad (3.86)$$

11. Método da carga/força unitária

O corpo está em equilíbrio sob a ação das forças pelo que, pelo princípio do trabalho virtual, esta expressão deve ser igual a zero.

Como as forças P_r permanecem constantes durante o deslocamento virtual, então

$$\delta U - \delta \sum_{r=1}^n P_r \Delta_r = 0 \quad (3.87)$$

ou

$$\delta \Pi = \delta(U + W) = 0 \quad (3.88)$$

Então, a energia potencial total de um sistema elástico possui um valor estacionário para todos os deslocamentos pequenos quando aquele se encontra em equilíbrio.

11. Método da carga/força unitária

Esta situação pode ser observada na *figura 3.46*. Nos pontos A, B ou C tem-se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = \frac{\partial (U + W)}{\partial u} = 0 \quad (3.89)$$

Energia
potencial
total

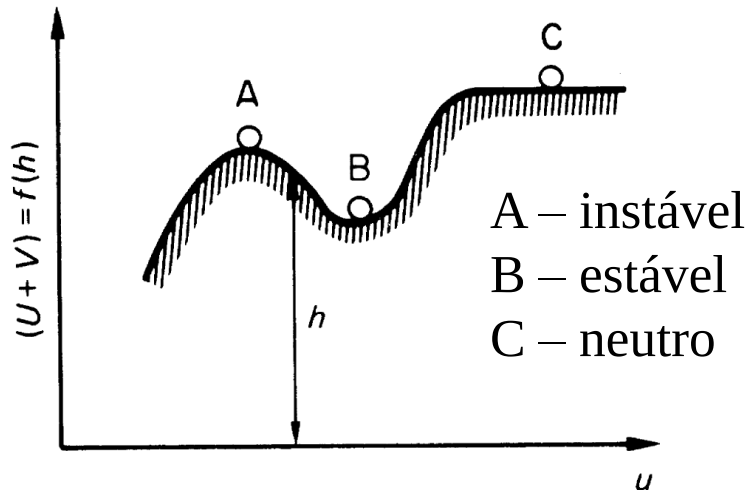


Figura 3.46 Estados de equilíbrio de uma partícula.

11. Método da carga/força unitária

Força unitária para calcular deslocamentos

Considere-se uma viga de comprimento L e rigidez à flexão uniforme EI encastrada numa extremidade e livre na outra sujeita a uma força P aplicada verticalmente de baixo para cima na ponta livre, o que resulta num deslocamento vertical Δ_M na ponta livre.

O trabalho realizado por essa força é

$$W = P\Delta_M$$

e a energia de extensão resultante na viga é

$$U = \int_0^L M_0 \frac{d^2v}{dz^2} dz$$

onde M_0 é o momento fletor em z produzido pela força P e d^2u/dz^2 é a curvatura da linha média da viga produzida por P .

11. Método da carga/força unitária

Usando a energia potencial total e derivando em ordem ao P , tem-se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P} = 1\Delta_M - \int_0^L \frac{\partial M_0}{\partial P} \frac{d^2 v}{dz^2} dz$$

ou seja

$$1\Delta_M = \int_0^L \frac{\partial M_0}{\partial P} \frac{d^2 v}{dz^2} dz$$

Isto equivale a ter a força igual a 1 e $\partial M_0 / \partial P = M_1$ é o momento resultante da força unitária.

11. Método da carga/força unitária

Então

$$\Delta_M = \int_0^L M_1 \frac{d^2 v}{dz^2} dz$$

Como a curvatura resultante da carga real é

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{M_0}{EI_{xx}}$$

então

$$\Delta_M = \int_0^L \frac{M_1 M_0}{EI_{xx}} dz \quad (3.90)$$

onde M_0 é o momento fletor resultante da força real e M_1 é o momento fletor resultante da força unitária.

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

As deflexões em vigas de parede fina resultantes da flexão, corte e torção são facilmente obtidas usando o método da força unitária.

Os deslocamentos numa dada direção, resultantes da torção, são dados diretamente por

$$\Delta_T = \int_L \frac{T_0 T_1}{GJ} dz \quad (3.91)$$

onde J , a constante de torção, depende do tipo de viga em consideração.

Para uma viga de secção aberta J é dado por uma das equações

$$J = \sum \frac{st^3}{3} \quad ; \quad J = \frac{1}{3} \int_{\text{secção}} t^3 ds$$

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

enquanto que para uma viga de secção fechada J é dado por

$$J = \frac{4A^2}{\oint ds/t}$$

para um módulo de corte G constante.

As expressões para deslocamentos devido à flexão e ao corte em vigas de parede fina assimétricas podem ser também determinadas pelo método da força unitária.

Elas são complexas, para um caso geral, e mais facilmente derivadas a partir de princípios básicos considerando a energia complementar do corpo elástico em termos de tensões e deformações em vez de forças e deslocamentos.

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

O teorema do princípio do valor estacionário da energia complementar total de um sistema elástico é equivalente ao princípio do trabalho virtual onde forças virtuais atuam em deslocamentos reais.

Pode, assim, especificar-se que na expressão de energia complementar total os deslocamentos são os deslocamentos reais produzidos pelas cargas aplicadas enquanto o sistema de forças virtuais é a carga unitária.

Considerando as deflexões devido à flexão, pode ver-se que o incremento na energia complementar total resultante da aplicação de uma carga virtual unitária é

$$- \int_L \left(\int_A \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,0} dA \right) dz + 1 \Delta_M$$

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

onde $\sigma_{z,1}$ é a tensão direta de flexão em qualquer ponto na secção transversal da viga correspondente à carga unitária e $\varepsilon_{z,0}$ é a deformação no ponto produzida pelo sistema de cargas real. Δ_M é o deslocamento real devido à flexão no ponto de aplicação e na direcção da carga unitária.

Uma vez que o sistema está em equilíbrio quando sujeito à carga unitária a expressão acima tem que ser igual a zero.

Daqui

$$\Delta_M = \int_L \left(\int_A \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,0} dA \right) dz \quad (3.92)$$

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

Da *equação 3.07* e tendo em conta que

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

tem-se

$$\sigma_{z,1} = \left(\frac{M_{y,1} I_{xx} - M_{x,1} I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_{x,1} I_{yy} - M_{y,1} I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y$$

$$\varepsilon_{z,0} = \frac{1}{E} \left[\left(\frac{M_{y,0} I_{xx} - M_{x,0} I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_{x,0} I_{yy} - M_{y,0} I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y \right]$$

onde os índices 1 e 0 referem-se ao sistema de cargas unitário e real e x,y são as coordenadas de qualquer ponto na secção transversal referente a um sistema de eixos centroidal.

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

Substituindo para $\sigma_{z,1}$ e $\varepsilon_{z,0}$ na *equação 3.92* e sabendo que

$$\int_A x^2 dA = I_{yy} \quad ; \quad \int_A y^2 dA = I_{xx} \quad ; \quad \int_A xy dA = I_{xy}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \Delta_M = & \frac{1}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \int_L \left\{ (M_{y,1}I_{xx} - M_{x,1}I_{xy})(M_{y,0}I_{xx} - M_{x,0}I_{xy})I_{yy} \right. \\ & + (M_{x,1}I_{yy} - M_{y,1}I_{xy})(M_{x,0}I_{yy} - M_{y,0}I_{xy})I_{xx} \\ & + [(M_{y,1}I_{xx} - M_{x,1}I_{xy})(M_{x,0}I_{xx} - M_{y,0}I_{xy}) \\ & \left. + (M_{x,1}I_{yy} - M_{y,1}I_{xy})(M_{x,0}I_{yy} - M_{y,0}I_{xy})]I_{xy} \right\} dz \end{aligned} \quad (3.93)$$

Para uma secção em que x ou y é um eixo de simetria $I_{xy}=0$ e a *equação 3.93* reduz-se a

$$\Delta_M = \frac{1}{E} \int_L \left(\frac{M_{y,1}M_{y,0}}{I_{yy}} + \frac{M_{x,1}M_{x,0}}{I_{xx}} \right) dz \quad (3.94)$$

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

A derivação de uma expressão para a deflexão de corte de secções de parede fina pelo método da carga unitária é feita do mesmo modo.

Comparando com a *equação 3.92* deduz-se que a deflexão Δ_s , devido ao corte da viga de paredes finas de secção aberta ou fechada com espessura t , é dada por

$$\Delta_s = \int_L \left(\int_{\text{secção}} \tau_1 \gamma_0 t ds \right) dz \quad (3.95)$$

onde τ_1 é a tensão de corte num ponto arbitrário s em torno da secção, produzida pela carga unitária no ponto e na direção de Δ_s , e γ_0 é a deformação de corte num ponto arbitrário correspondente ao sistema real de cargas.

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

O integral dentro de parênteses é calculado em torno de todas as paredes da secção.

Na realidade, tanto a carga de corte aplicada como a unitária têm que atuar através do centro de corte da secção, de outro modo deslocamentos adicionais de torção também têm lugar.

Quando as cargas de corte atuam noutros pontos elas têm que ser substituídas por cargas de corte no centro de corte mais um momento de torção.

A espessura t é a espessura real do revestimento e pode variar em torno da secção mas é suposta constante ao longo do comprimento da viga.

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

A *equação 3.86* pode escrever-se com os fluxos de corte q_1 e q_0

$$\Delta_s = \int_L \left(\int_{\text{secção}} \frac{q_1 q_0}{Gt} ds \right) dz \quad (3.97)$$

onde os índices referem-se aos sistemas real e unitário.

Nos casos de vigas abertas e fechadas, as expressões gerais para o fluxo de corte são longas, sendo melhor calculá-las antes da substituição na *equação 3.97*.

Para uma viga de secção aberta com “booms” e paredes com espessura que suporta tensões diretas t_D tem-se, da *equação 3.75*,

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

$$q_0 = - \left(\frac{S_{x,0} I_{xx} - S_{y,0} I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) - \left(\frac{S_{y,0} I_{yy} - S_{x,0} I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) \quad (3.97)$$

e

$$q_1 = - \left(\frac{S_{x,1} I_{xx} - S_{y,1} I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^n B_r x_r \right) - \left(\frac{S_{y,1} I_{yy} - S_{x,1} I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \left(\int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^n B_r y_r \right) \quad (3.98)$$

12. Deflexão de vigas com secção aberta e fechada

Exemplo 3.16: Calcular a deflexão da ponta livre de uma viga embutida com 2000 mm de comprimento, com uma secção em C idêntica à do *exemplo 3.13* e suportando uma força vertical, de baixo para cima, de 4,8 kN que atua através do centro de corte da secção. A espessura efetiva da parede que suporta as tensões diretas é zero enquanto que a espessura real é 1 mm. O módulo de Young E e o módulo de corte G são 70000 N/mm² e 30000 N/mm², respetivamente.

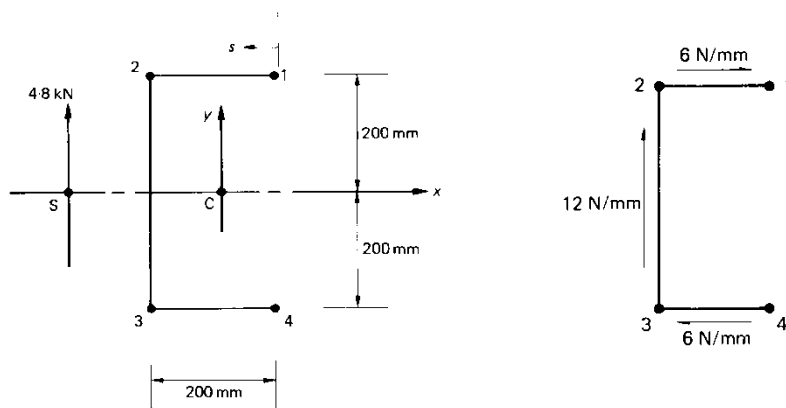


Figura 3.47 Secção do *exemplo 3.16*.