



UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Covilhã | Portugal

Conceitos Fundamentais

Estruturas Aeroespaciais I (10362)

2020

Pedro V. Gamboa

Departamento de Ciências Aeroespaciais

Tópicos

- Introdução à teoria da elasticidade.
- Conceito de tensão e equações gerais de equilíbrio.
- Tensões e rotações em eixos coordenados.
- Deformações e extensões.
- Equações de compatibilidade.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio



1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.1. Tensão

Considere o corpo tridimensional de forma arbitrária da *figura 3.01*.

O corpo está em equilíbrio sob a ação das forças externas $P_1, P_2, \dots$ e assume-se que é constituído por um material contínuo e deformável por forma que as forças são transmitidas por todo o seu volume.

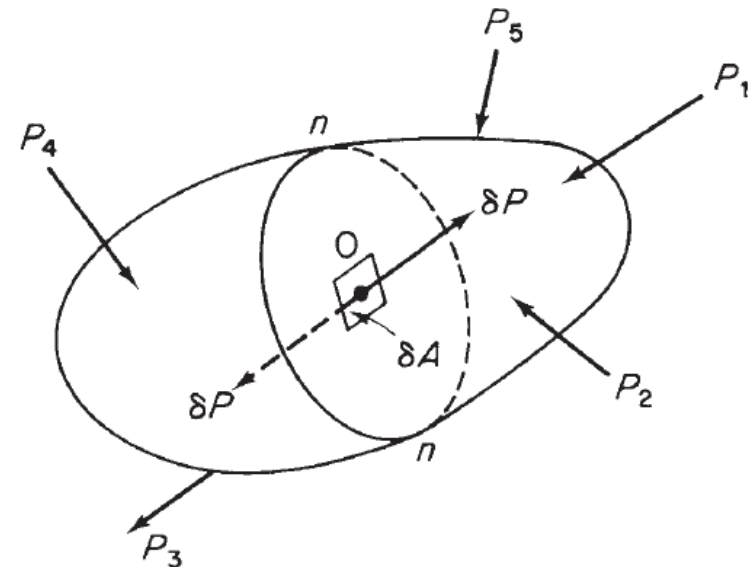


Figura 3.01 Força interna num ponto de um corpo de forma arbitrária.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.1. Tensão

Daqui segue que no ponto interno O existe uma força resultante δP .

A partícula de material no ponto O sujeita à força δP está em equilíbrio pelo que existe uma força de igual magnitude mas sentido oposto δP (representada e traço interrompido na *figura 3.01*) que atua na partícula no mesmo instante.

Se agora dividirmos o corpo com um plano nn qualquer contendo o ponto O então estas duas forças δP podem considerar-se uniformemente distribuídas por uma área pequena δA em cada face do plano no ponto correspondente O .

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.1. Tensão

Esta situação está mostrada na *figura 2.02*.

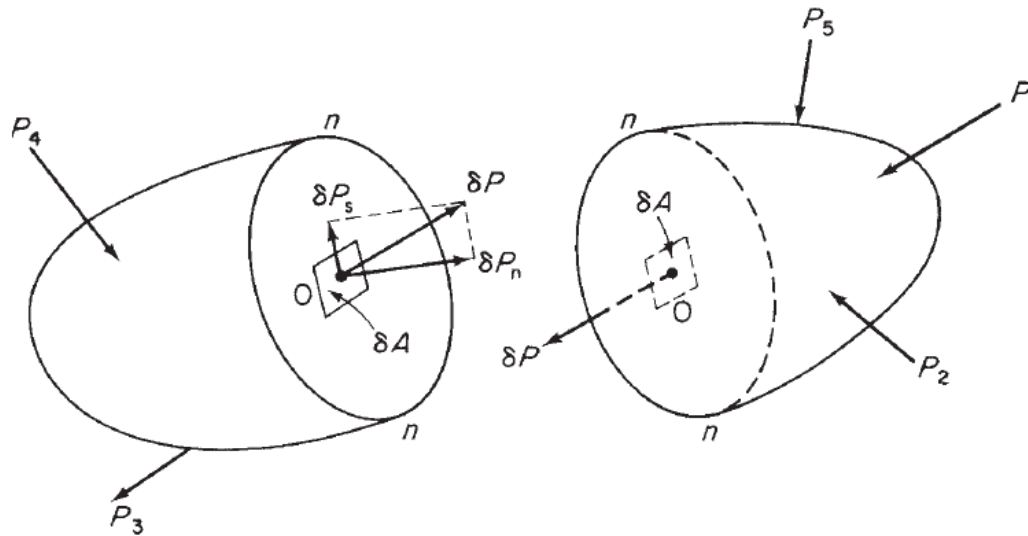


Figura 3.02 Componentes da força interna no ponto O.

A tensão no ponto O é dada pela equação

$$tensão = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta P}{\delta A} \quad (3.01)$$

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.1. Tensão

As direções das forças δP na *figura 3.02* são tais que produzem tensões de tração nas faces do plano nn .

Deve ter-se em atenção que enquanto a direção de δP é absoluta, a escolha do plano é arbitrária, pelo que apesar da direção da tensão em O ter sempre a direção de δP a sua magnitude depende do plano escolhido.

Um plano diferente pode ter uma inclinação diferente e, conseqüentemente, um δA diferente.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.1. Tensão

Isto pode ser compreendido melhor com recurso à barra sujeita à tração da *figura 3.03*.

No plano da secção transversal mm a tensão uniforme é dada por P/A , enquanto que no plano inclinado $m'm'$ a tensão tem magnitude P/A' .

Em ambos os casos as tensões são paralelas à direção de P .

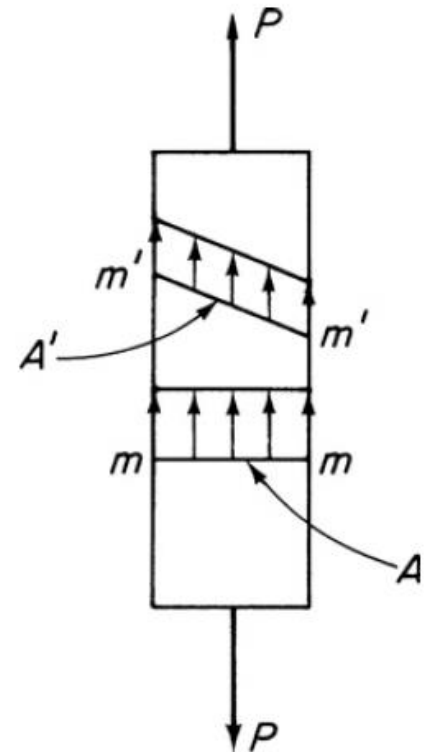


Figura 3.03 Valores da tensão em planos diferentes numa barra uniforme.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.1. Tensão

Geralmente, a direção de δP não é perpendicular à área δA , sendo normal resolver δP em duas componentes:

- uma δP_n normal ao plano
- outra δP_s atuando no próprio plano

Note-se que o plano que contém δP é perpendicular a δA .

As tensões associadas a estas componentes são *tensões normais* ou *tensões diretas* definidas como

$$\sigma = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta P_n}{\delta A} \quad (3.02)$$

e as *tensões de corte* definidas como

$$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta P_s}{\delta A} \quad (3.03)$$

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.1. Tensão

A tensão resultante é calculada a partir das suas componentes pelas regras da soma vetorial

$$tensão\ resultante = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

No entanto, como indicado acima, estamos geralmente interessados nos efeitos separados de σ e τ .

Para sermos totalmente corretos, a tensão não é uma grandeza vetorial pelo que para além da magnitude e direção, tem que se especificar o plano em que ela atua.

A tensão é, por isso, um tensor em que a sua total descrição depende de dois vetores de força e da superfície de atuação.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.2. Notação para forças e tensões

É normalmente conveniente fazer referência a um estado de tensão num ponto de um corpo relativamente a eixos ortogonais $Oxyz$.

Neste caso, corta-se o corpo com planos paralelos à direção dos eixos.

A força resultante δP que atua no ponto O num destes planos pode ser resolvida numa componente normal e duas componentes no plano, produzindo, assim, uma componente de tensão direta e duas componentes de tensão de corte.

A componente da tensão direta é especificada com referência ao plano onde atua mas as componentes da tensão de corte precisam também de uma especificação da direção.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.2. Notação para forças e tensões

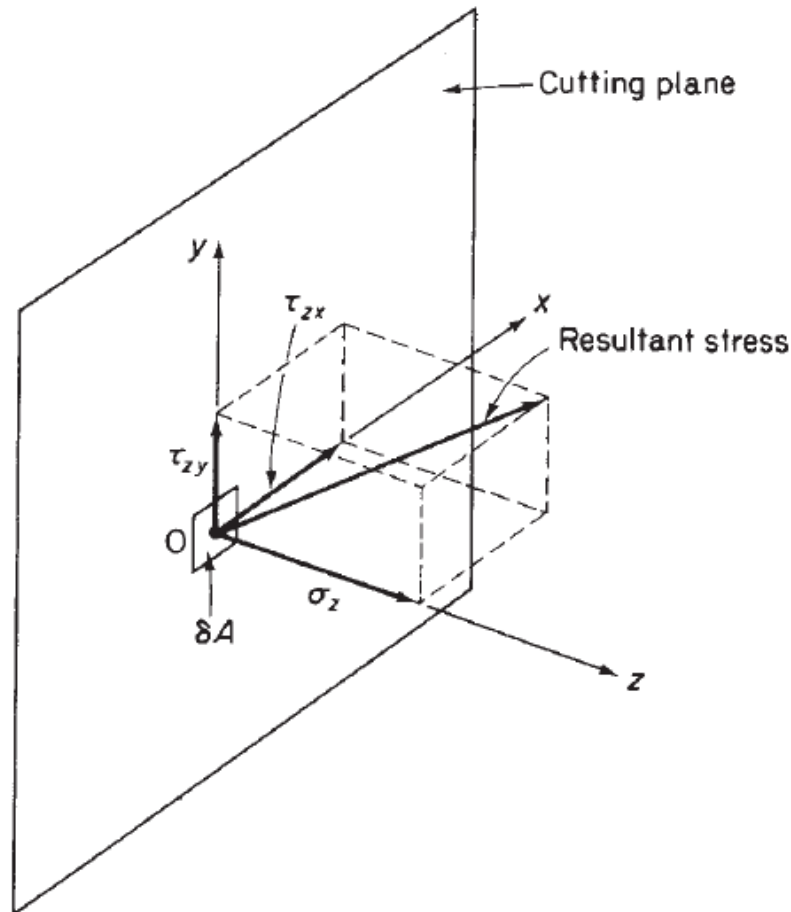


Figura 3.04 Componentes da tensão num ponto do corpo.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.2. Notação para forças e tensões

Assim, atribuímos um índice à tensão a indicar o plano onde atua e um segundo a indicar a direção.

Na *figura 3.04*, as componentes da tensão de corte são τ_{zx} e τ_{zy} , atuando no plano z e direções x e y, respetivamente.

A componente da tensão direta é σ_z . Neste caso o segundo índice pode omitir-se por ser igual ao primeiro.

Agora pode descrever-se completamente o estado de tensão no ponto O de um corpo especificando as componentes de tensão de corte e direta nas faces de um elemento de dimensão δx , δy , δz , formado em O pelos planos de corte como indicado na *figura 3.05*.

Os lados do elemento são infinitesimamente pequenos pelo que se assume que as tensões estão uniformemente distribuídas pela superfície de cada face.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.2. Notação para forças e tensões

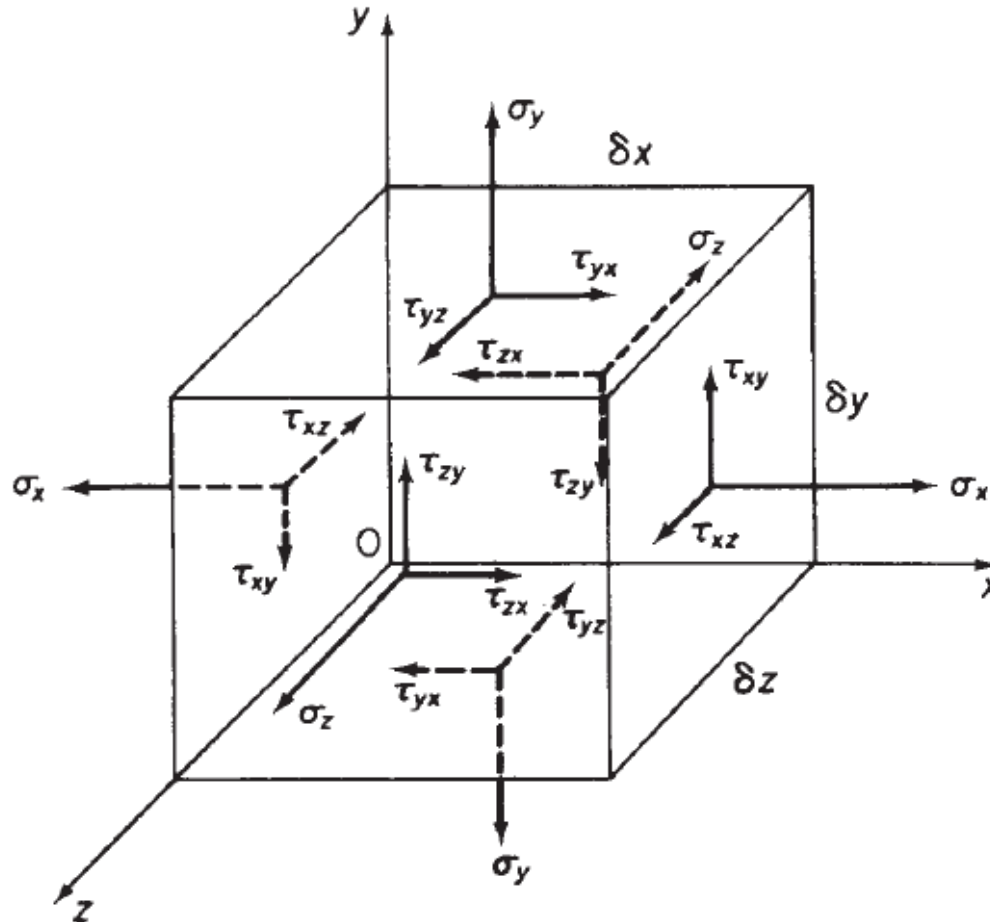


Figura 3.05 Convenções de sinal e nomenclatura das tensões num ponto de um corpo.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.2. Notação para forças e tensões

Em cada uma das faces opostas existe, numa primeira aproximação, tensões iguais mas opostas.

Definem-se as direções positivas das tensões por forma a que as tensões normais direcionadas para fora da sua face de referência são de tração e positivas. Tensões opostas são de compressão e negativas.

As tensões de corte são positivas quando atuam na direção positiva do eixo relevante no plano em que a tensão normal de tração está na direção positiva do eixo.

Se a tensão de tração estiver na direção oposta, então as tensões de corte positivas atuam na direção oposta às direções positivas dos eixos apropriados.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.2. Notação para forças e tensões

Dois tipos de força externa podem atuar num corpo e produzir o sistema interno de tensões.

Destes, *forças de superfície*, como $P_1, P_2, \dots$, ou *pressão hidrostática*, estão distribuídas pela superfície do corpo.

A força de superfície por unidade de área pode ser resolvida em componentes paralelas ao sistema de eixos ortogonais e designadas $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$.

O segundo tipo de forças, são as *forças do corpo*, como resultantes de efeitos gravitacionais ou de inércia, que estão distribuídas pelo volume do corpo.

A força do corpo por unidade de volume é designada X, Y, Z .

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.3. Equações de equilíbrio

Geralmente, exceto em casos de tensão uniforme, as tensões diretas em faces opostas não são iguais como indicado na *figura 3.05* mas diferem de um quantidade pequena.

Assim, se a tensão direta que atua no plano z for σ_z , então a tensão direta que atua no plano $z+\delta z$ é, dos primeiros dois termos da série de Taylor, $\sigma_z + (\partial\sigma_z/\partial z)\delta z$.

Podemos agora investigar o equilíbrio de um elemento num ponto qualquer do corpo elástico onde o sistema de tensões é obtido usando este raciocínio.

Na *figura 3.06*, o elemento está em equilíbrio sujeito a forças correspondentes às tensões mostradas e componentes de forças do corpo (não mostradas).

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.3. Equações de equilíbrio

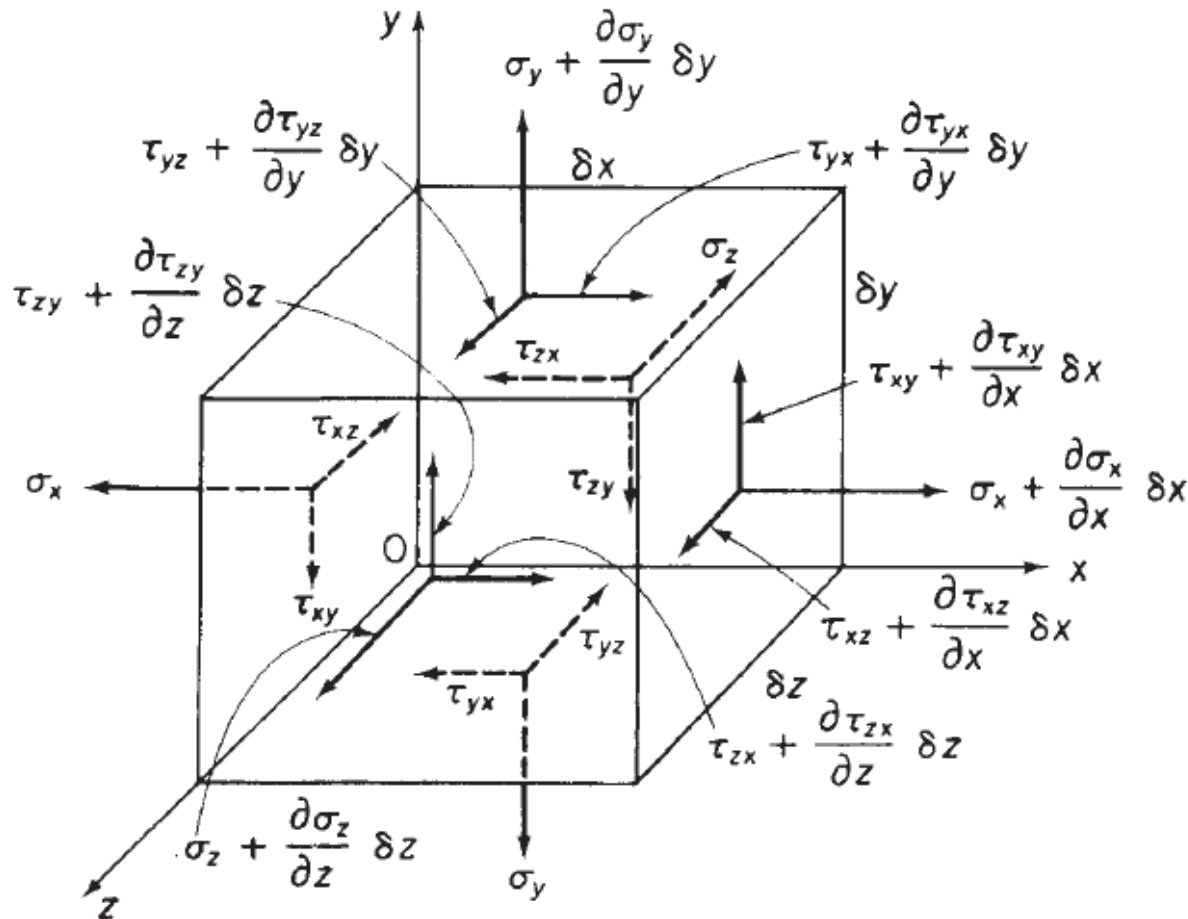


Figura 3.06 Tensões nas faces de um elemento num ponto de um corpo elástico.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.3. Equações de equilíbrio

As forças de superfície que atuam na fronteira do corpo, apesar de contribuírem para o sistema de tensões internas, não aparecem diretamente nas equações de equilíbrio.

Tirando momentos em torno de um eixo que passa pelo centro do elemento e é paralelo ao eixo z

$$\tau_{xy} \delta y \delta z \frac{\delta x}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z \frac{\delta x}{2} - \tau_{yx} \delta x \delta z \frac{\delta y}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z \frac{\delta y}{2} = 0$$

que simplificando dá

$$\tau_{xy} \delta y \delta z \delta x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta y \delta z \frac{(\delta x)^2}{2} - \tau_{yx} \delta x \delta z \delta y - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta z \frac{(\delta y)^2}{2} = 0$$

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.3. Equações de equilíbrio

Dividindo tudo pelo volume $\delta x \delta y \delta z$

$$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} - \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{\delta y}{2} = 0$$

e tomando o limite à medida que δx e δy tendem para zero, obtém-se

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

De forma idêntica, também se obtêm as outras componentes da tensão de corte

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

(3.04)

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.3. Equações de equilíbrio

Pode ver-se que a tensão de corte num dado plano (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}) é sempre acompanhada por uma tensão de corte complementar (τ_{yx} , τ_{zx} , τ_{zy}) num plano perpendicular e com sentido oposto. Considerando agora o equilíbrio na direção x

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z - \sigma_x \delta y \delta z \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z - \tau_{yx} \delta x \delta z \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y - \tau_{zx} \delta x \delta y + X \delta x \delta y \delta z = 0 \end{aligned}$$

o que dá

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.3. Equações de equilíbrio

ou, escrevendo $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ da equação 3.04, e analisando as forças nas outras duas direções de forma idêntica

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (3.05)$$

As *equações de equilíbrio* têm que ser satisfeitas em todos os pontos internos de um corpo deformável sujeito a um sistema de forças tridimensional.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.4. Tensão plana

A maior parte dos componentes estruturais de aeronaves são fabricados a partir de chapas finas de metal ou de laminados de compósito, pelo que as tensões na direção da espessura são desprezáveis.

Assumindo que o eixo z tem a direção da espessura, então o sistema tridimensional da equação (3.05) reduz-se a um sistema bidimensional em que σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são zero.

Esta condição é conhecida como *tensão plana* (ou estado plano de tensões) e as equações de equilíbrio ficam

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + Y &= 0\end{aligned}$$

(3.06)

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.5. Condições de fronteira

As equações de equilíbrio (3.05) ou (3.06) garantem o equilíbrio em todos os pontos internos do corpo.

O equilíbrio também tem que ser satisfeito em todos os pontos da fronteira do corpo em que as componentes das forças superficiais por unidade de área são $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$.

O elemento triangular da *figura 3.07* na fronteira de um corpo bidimensional de espessura unitária está, então, em equilíbrio quando sujeito às forças de superfície no comprimento elementar AB da fronteira e às forças internas nas faces AC e CB.

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.5. Condições de fronteira

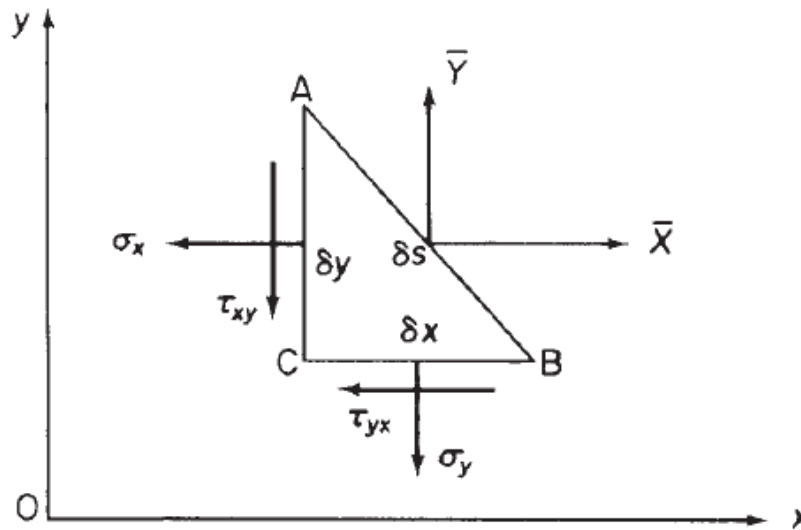


Figura 3.07 Tensões nas faces de um elemento na fronteira de um corpo bidimensional.

A soma das forças na direção x dá

$$\bar{X} \delta s - \sigma_x \delta y - \tau_{yx} \delta x + X \frac{1}{2} \delta x \delta y = 0$$

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.5. Condições de fronteira

As derivadas $\delta y / \delta s$ e $\delta x / \delta s$ são os cossenos diretores l e m dos ângulos que a normal AB faz com os eixos x e y , respetivamente. Daqui tira-se que

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{yx} m$$

e de forma idêntica

$$\bar{Y} = \sigma_y m + \tau_{xy} l$$

1. Conceito de tensão e condições gerais de equilíbrio

1.5. Condições de fronteira

Uma extensão desta análise para o caso tridimensional, produz as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \bar{Y} &= \sigma_y m + \tau_{xy} l + \tau_{zy} n \\ \bar{Z} &= \sigma_z n + \tau_{yz} m + \tau_{xz} l\end{aligned}\tag{3.07}$$

onde l , m e n são os cosenos diretores dos ângulos formados entre a normal à superfície do corpo com os eixos x , y e z , respetivamente.



UBI
Covilhã
Portugal

2. Tensões e rotações em eixos coordenados

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.1. Determinação de tensões em planos inclinados

O sistema de tensões da *figura 3.06* é derivado com base nas cargas reais aplicadas no corpo relativamente a um sistema de eixos coordenados arbitrário.

Os valores destas tensões podem não mostrar uma imagem verdadeira da severidade das tensões no ponto em questão, pelo que é necessário investigar o estado de tensão noutros planos em que as tensões diretas ou tensões de corte possam ser mais elevadas.

Vamos fazer uma análise bidimensional apenas para tornar a compreensão mais fácil.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.1. Determinação de tensões em planos inclinados

A *figura 3.08(a)* mostra um sistema de tensão complexo num ponto de um corpo relativo aos eixos Ox , Oy .

Todas as tensões são positivas.

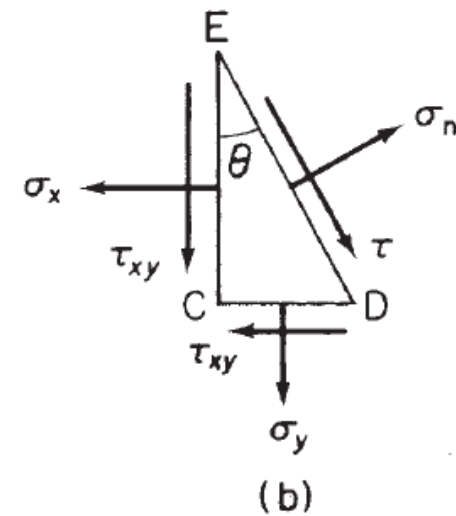
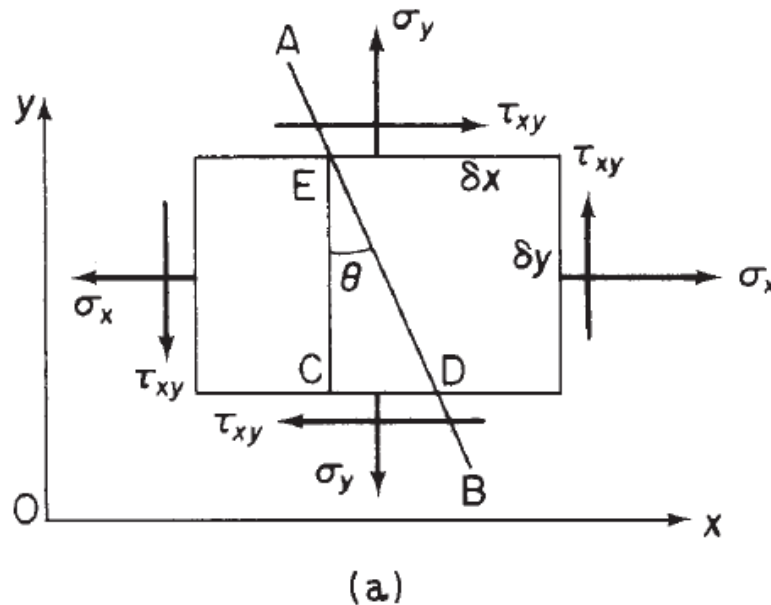


Figura 3.08 (a) Tensões num elemento bidimensional; (b) tensões num plano inclinado no ponto.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.1. Determinação de tensões em planos inclinados

O elemento de lados δx , δy e de espessura unitária é pequeno pelo que pode assumir-se que as distribuições de tensão nos lados do elemento são uniformes.

As forças do corpo são ignoradas uma vez que a sua contribuição é de segunda ordem, logo muito pequena.

Suponhamos que queremos encontrar o estado de tensão num plano AB inclinado de um ângulo θ com a vertical.

O elemento triangular EDC formado pelo plano e a vertical que passa em E está em equilíbrio sob a ação das forças correspondentes às tensões mostradas na *figura 3.08(b)*, onde σ_n e τ são as componentes direta e de corte da tensão resultante em AB.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.1. Determinação de tensões em planos inclinados

Resolvendo as forças numa direção perpendicular a ED tem-se

$$\sigma_n ED = \sigma_x EC \cos \theta + \sigma_y CD \sin \theta + \tau_{xy} EC \sin \theta + \tau_{xy} CD \cos \theta$$

Dividindo tudo por ED obtém-se

$$\sigma_n = \sigma_x \frac{EC}{ED} \cos \theta + \sigma_y \frac{CD}{ED} \sin \theta + \tau_{xy} \frac{EC}{ED} \sin \theta + \tau_{xy} \frac{CD}{ED} \cos \theta$$

Notando que $EC/ED = \cos \theta$ e $CD/ED = \sin \theta$, pode simplificar-se esta expressão para

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

Lembrando que $2\sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, então

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (3.08)$$

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.1. Determinação de tensões em planos inclinados

Resolvendo, agora, as forças numa direção paralela a ED tem-se

$$\tau ED = \sigma_x EC \sin \theta - \sigma_y CD \cos \theta - \tau_{xy} EC \cos \theta + \tau_{xy} CD \sin \theta$$

Dividindo tudo por ED obtém-se

$$\tau = \sigma_x \frac{EC}{ED} \sin \theta - \sigma_y \frac{CD}{ED} \cos \theta - \tau_{xy} \frac{EC}{ED} \cos \theta + \tau_{xy} \frac{CD}{ED} \sin \theta$$

Como $EC/ED = \cos \theta$ e $CD/ED = \sin \theta$, pode simplificar-se esta expressão para

$$\tau = \sigma_x \sin \theta \cos \theta - \sigma_y \sin \theta \cos \theta - \tau_{xy} \cos^2 \theta + \tau_{xy} \sin^2 \theta$$

Lembrando que $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, e $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -\cos 2\theta$, então

$$\tau = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3.09)$$

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.1. Determinação de tensões em planos inclinados

Exemplo 3.01: Um depósito de pressão cilíndrico tem um diâmetro interno de 2m e é fabricado com chapas de 20mm de espessura. Se a pressão interna do depósito é $1,5\text{N/mm}^2$ e o depósito está sujeito a uma força axial de tração de 2500 kN, calcular as tensões diretas e de corte num plano inclinado 60° com o eixo longitudinal do depósito. Calcular, também, a tensão de corte máxima.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.1. Determinação de tensões em planos inclinados

Exemplo 3.02: Uma viga encastrada com secção circular maciça suporta uma carga compressiva de 50kN na ponta livre aplicada num ponto 1,5mm abaixo do eixo longitudinal do cilindro juntamente com um momento torsor de 1200Nm, como mostra a *figura 3.09*. Calcular as tensões direta e de corte num plano inclinado 60° com o eixo longitudinal da viga num ponto da aresta inferior no plano vertical de simetria.

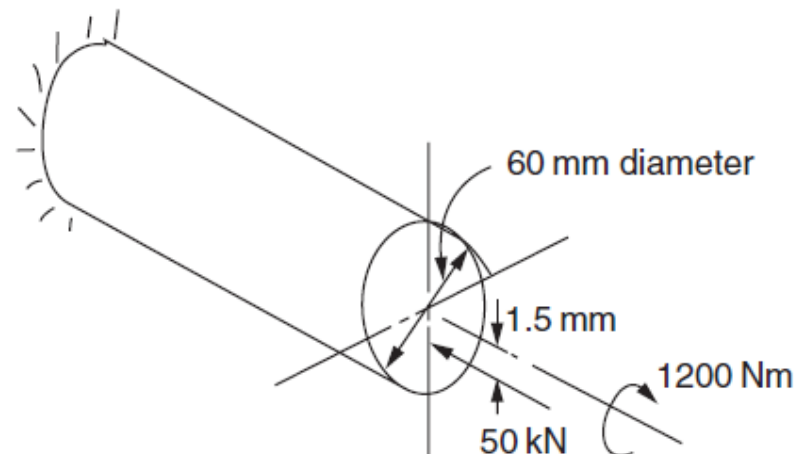


Figura 3.09 Viga encastrada do exemplo 3.02.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.2. Tensões principais

Para valores dados de σ_x , σ_y e τ_{xy} , σ_n varia com o ângulo θ e atinge um máximo ou mínimo quando $d\sigma_n/d\theta=0$.

Da equação (2.08)

$$\frac{d\sigma_n}{d\theta} = -2\sigma_x \cos\theta \sin\theta + 2\sigma_y \sin\theta \cos\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Daqui

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

ou

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.10)$$

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.2. Tensões principais

São obtidas duas soluções da equação (2.10), θ e $\theta + \pi/2$, pelo que existem dois planos perpendiculares em que as tensões diretas são máxima ou mínima.

Comparando a equação (3.09) com a equação (3.10) pode observar-se que estes planos correspondem àqueles em que não existe tensão de corte.

As tensões diretas nestes planos são chamadas as *tensões principais* e os planos são os *planos principais*.

Da equação (3.10)

$$\sin 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad ; \quad \cos 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

e

$$\sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad ; \quad \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.2. Tensões principais

Reescrevendo a equação (3.08) na forma

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2}(1 - \cos 2\theta) + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

E substituindo $\{\sin 2\theta, \cos 2\theta\}$ e $\{\sin 2(\theta + \pi/2), \cos 2(\theta + \pi/2)\}$ à vez resulta em

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.11)$$

e

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.12)$$

onde σ_I é a *tensão principal maior* e σ_{II} é a *tensão principal menor*.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.2. Tensões principais

Note-se que σ_I é algebricamente a tensão direta mais elevada no ponto e σ_{II} é algebricamente a tensão direta mais baixa.

Por isso, quando σ_{II} é negativa, ou seja de compressão, é possível que o seu valor absoluto seja maior do que o de σ_I .

A tensão máxima de corte neste ponto do corpo pode ser determinada de maneira idêntica.

Da equação (3.09)

$$\frac{d\tau}{d\theta} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

o que dá

$$\tan 2\theta = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \quad (3.13)$$

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.2. Tensões principais

Daqui segue-se que

$$\sin 2\theta = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad ; \quad \cos 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

e

$$\sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad ; \quad \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Substituindo estes valores na equação(3.09), obtém-se

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.14)$$

Aqui, como no caso das tensões principais, tomamos o valor máximo como sendo o valor algébrico maior.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.2. Tensões principais

Comparando as equações (3.14), (3.11) e (3.12) pode ver-se que

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \quad (3.15)$$

As equações (3.14) e (3.15) dão a tensão de corte máxima no ponto do corpo no plano das tensões fornecidas.

Para um corpo tridimensional sujeito a um sistema de tensões bidimensional, esta não é necessariamente a tensão de corte máxima no ponto.

Uma vez que a equação (3.13) é o inverso da equação (3.10), então os ângulos 2θ dados por estas equações diferem de 90° ou, alternativamente, os planos de tensão de corte máxima estão inclinados 45° com os eixos principais.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.3. Círculo de Mohr

O estado de tensão num ponto de um corpo deformável pode ser determinado graficamente com o círculo de Mohr.

Foi visto anteriormente que as tensões diretas e de corte num plano inclinado são dadas por

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

e

$$\tau = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

respetivamente.

As direcções positivas destas tensões e o ângulo θ são definidas na figura 3.10(a).

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.3. Círculo de Mohr

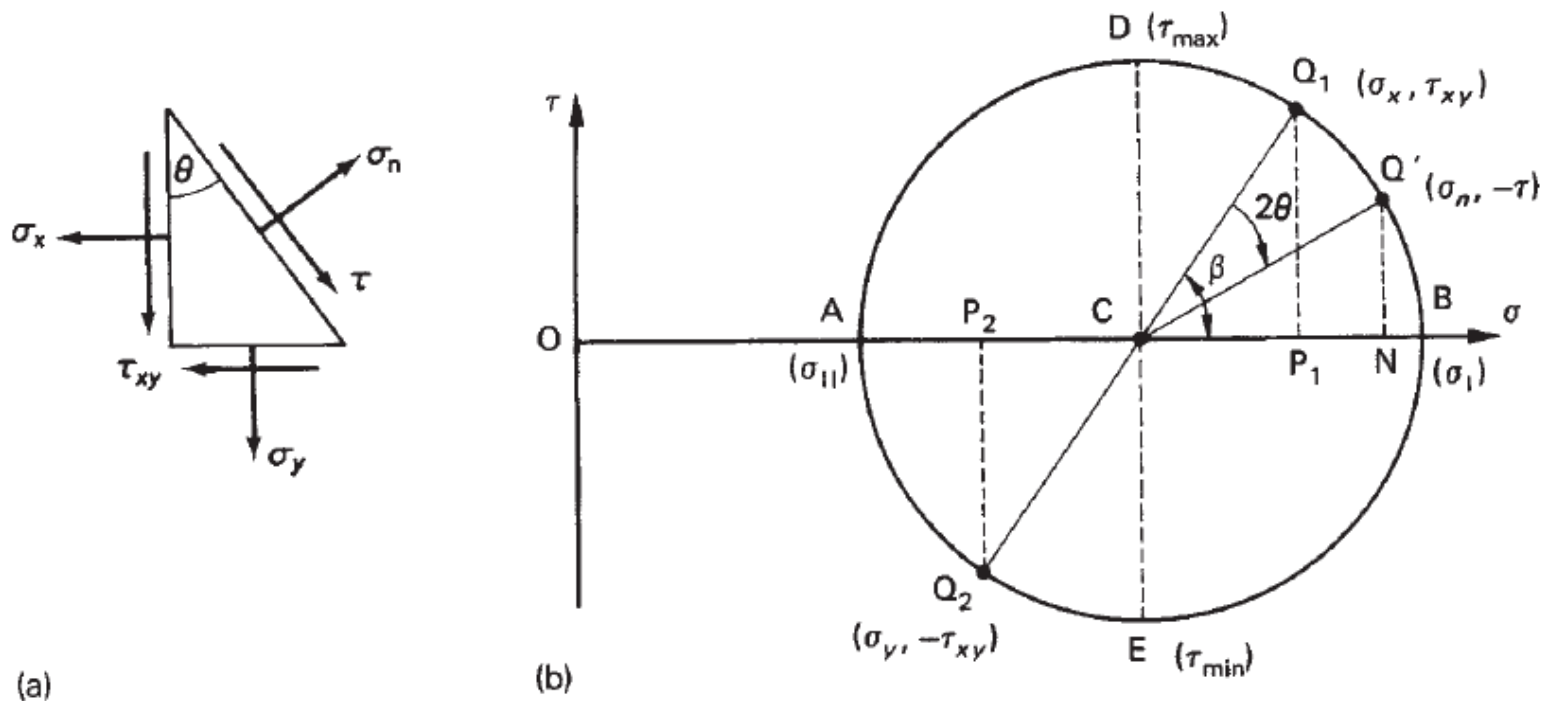


Figura 3.10 (a) Tensões num elemento triangular; (b) Círculo de tensão de Mohr para o elemento triangular.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.3. Círculo de Mohr

A equação (3.08) pode ser reescrita na forma

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2}(1 - \cos 2\theta) + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

ou

$$\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação e adicionando à equação (3.09) tem-se

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \right]^2 + \tau_{xy}^2$$

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.3. Círculo de Mohr

Esta expressão representa um círculo com raio

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

e centro no ponto $((\sigma_x - \sigma_y)/2; 0)$.

O círculo é construído colocando os pontos $Q_1(\sigma_x, \tau_{xy})$ e $Q_2(\sigma_y, -\tau_{xy})$ referentes aos eixos $O\sigma\tau$ como mostra a figura 3.10(b).

O centro do círculo encontra-se em C, a interseção da linha Q_1Q_2 com o eixo $O\sigma$.

Vê-se, claramente que C é o ponto $((\sigma_x - \sigma_y)/2; 0)$ e que o raio do círculo é

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

como requerido.

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.3. Círculo de Mohr

CQ é desenhado com um ângulo 2θ (positivo no sentido horário) a partir de CQ_1 , sendo Q o ponto $(\sigma_n, -\tau)$ como mostrado abaixo. Da figura 3.10(a) vê-se que

$$ON = OC + CN$$

ou, uma vez que, $OC = (\sigma_x + \sigma_y)/2$, $CN = CQ \cos(\beta - 2\theta)$ e $CQ = CQ_1$, tem-se

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + CQ_1 (\cos \beta \cos 2\theta + \sin \beta \sin 2\theta)$$

Mas

$$CQ_1 = \frac{CP_1}{\cos \beta} \quad \text{e} \quad CP_1 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}$$

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.3. Círculo de Mohr

Daqui

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\theta + CP_1 \tan \beta \sin 2\theta$$

que, rearranjando, dá

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

como na equação (3.08).

De forma semelhante também se pode mostrar que

$$Q'N = \tau_{xy} \cos 2\theta - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta = -\tau$$

como na equação (3.09).

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.3. Círculo de Mohr

Note-se que a construção da *figura 3.10(b)* corresponde ao sistema de tensões da *figura 3.10(a)* pelo que qualquer troca de sinal deve ser tida em conta.

Também se deve construir os eixos $O\sigma$ e $O\tau$ com a mesma escala, caso contrário a equação do círculo não fica representada.

Os valores máximo e mínimo da tensão direta, as tensões principais maior e menor σ_I e σ_{II} , ocorrem quando N (e Q') coincidem com B e A, respetivamente.

Assim,

$$\sigma_I = OC + \text{raio do círculo} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{CP_1^2 + P_1Q_1^2}$$

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.3. Círculo de Mohr

ou

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

e da mesma forma

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Os planos principais são dados por $2\theta = \beta(\sigma_I)$ e $2\theta = \beta + \pi(\sigma_{II})$.

Os valores máximo e mínimo da tensão de corte ocorre quando Q coincide com D e E nas extremidades superior e inferior do círculo.

Nestes pontos QN é igual ao raio do círculo que é dado por

$$CQ_1 = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

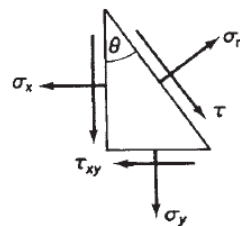
2.3. Círculo de Mohr

Daqui,

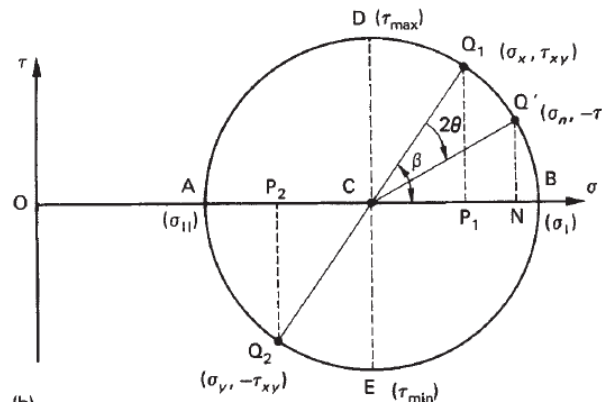
$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

como anteriormente.

Os planos de tensão de corte máxima e mínima são dados por $2\theta = \beta + \pi/2$ e $2\theta = \beta + 3\pi/2$ que estão inclinadas 45° relativamente aos planos principais.



(a)



(b)

2. Tensões e rotações em eixos coordenado

2.3. Círculo de Mohr

Exemplo 3.03: Tensões diretas de 160N/mm^2 (tração) e de 120N/mm^2 (compressão) são aplicadas num ponto particular num material elástico em dois planos perpendiculares entre si. A tensão principal do material está limitada a 200N/mm^2 (tração). Calcular a tensão de corte admissível no ponto nos planos dados. Determine também o valor das outras tensões principais e a tensão máxima de corte no ponto. Verificar a questão usando o círculo de Mohr.

3. Deformações e extensões

3. Deformações e extensões

3.1. Deformações

As forças externas e internas descritas anteriormente provocam deslocamentos lineares e angulares num corpo deformável. Estes deslocamentos são geralmente definidos em termos de *extensões*.

Extensões longitudinais ou *diretas* estão associadas com tensões diretas σ e relacionadas com variações de comprimento enquanto as *tensões de corte* definem variações no ângulo produzidos por tensões de corte τ .

Estas extensões são designadas por ε e γ , respetivamente, e têm o mesmo sinal que as tensões associadas.

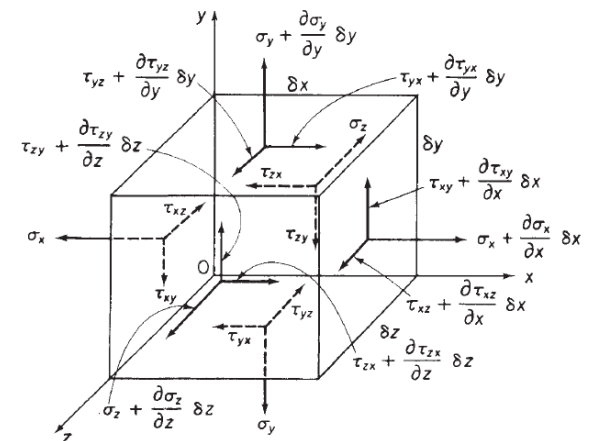
3. Deformações e extensões

3.1. Deformações

Considere-se os elementos de reta OA, OB e OC, perpendiculares entre si, no ponto O de um corpo deformável.

Os seus comprimentos originais são, δx , δy e δz , respetivamente.

Se o corpo estiver sujeito a forças que produzam um sistema complexo de tensões diretas e de corte no ponto O, como o da *figura 3.06*, então os elementos de linha vão deformar para as posições O'A', O'B' e O'C' mostradas na *figura 3.11*.



3. Deformações e extensões

3.1. Deformações

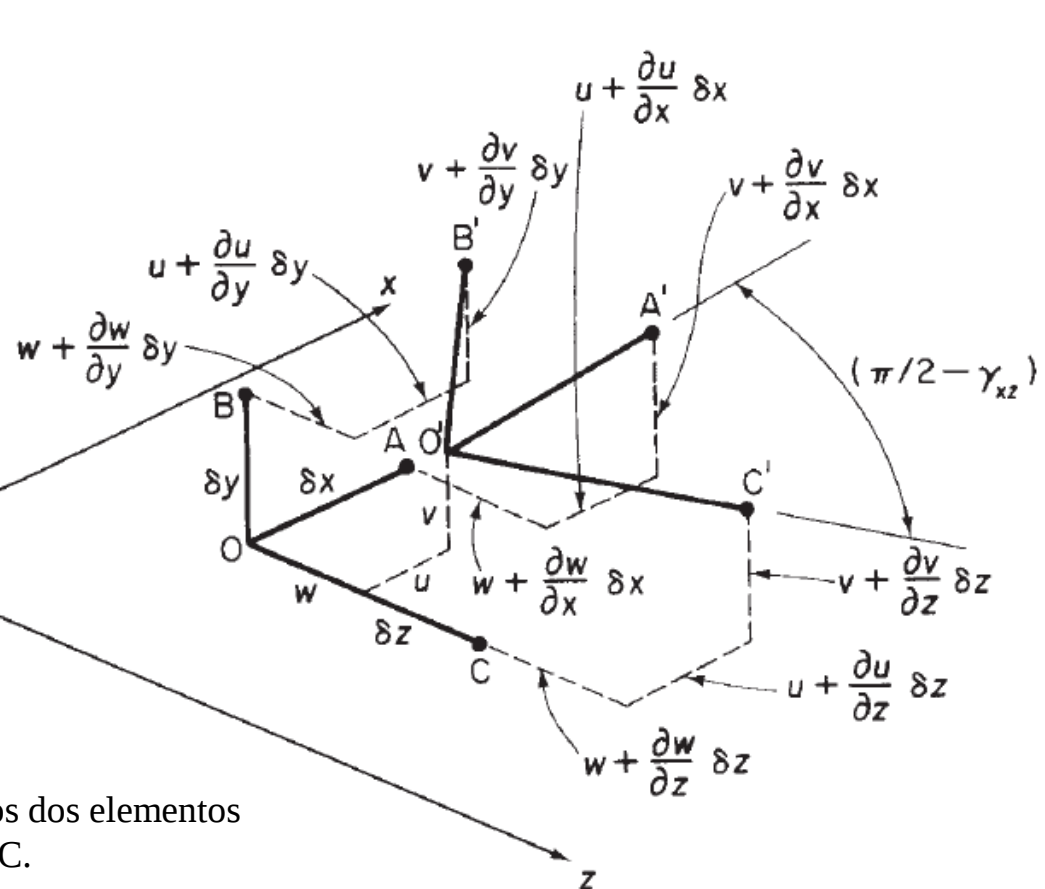


Figura 3.11 Deslocamentos dos elementos OA, OB e OC.

3. Deformações e extensões

3.1. Deformações

As coordenadas do ponto O do corpo não deformado são (x, y, z) pelo que as coordenadas dos pontos A, B e C são $(x + \delta x, y, z)$, $(x, y + \delta y, z)$ e $(x, y, z + \delta z)$, respetivamente.

As componentes do deslocamento do ponto O para o ponto O', paralelas aos eixos x , y e z , são u , v e w , respetivamente.

O sentido positivo dos deslocamentos coincide com o sentido positivo dos respetivos eixos.

Vamos usar os dois primeiros termos da série de Taylor para determinar as componentes dos deslocamentos de A, B e C.

Assim, o deslocamento de A na direção paralela ao eixo x é $u + (\partial u / \partial x) \delta x$.

As restantes componentes são obtidas de forma idêntica e estão ilustradas na *figura 3.11*.

3. Deformações e extensões

3.2. Extensões

Definimos a extensão direta em termos quantitativos.

Se um elemento de linha com comprimento L num ponto dum corpo sofre uma variação de comprimento ΔL , então a extensão longitudinal nesse ponto do corpo na direção do elemento é

$$\varepsilon = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{L}$$

A variação do comprimento do elemento OA é $(O'A' - OA)$ pelo que a extensão direta no ponto O na direção x é obtida da equação

$$\varepsilon_x = \frac{O'A' - OA}{OA} = \frac{O'A' - \delta x}{\delta x} \quad (3.16)$$

3. Deformações e extensões

3.2. Extensões

Agora

$$(O'A')^2 = \left(\delta x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x - u \right)^2 + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x - v \right)^2 + \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x - w \right)^2$$

ou

$$O'A' = \delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}$$

que, eliminando os termos de segunda ordem, resulta em

$$O'A' = \delta x \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}}$$

Aplicando a expansão do binómio

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \dots$$

3. Deformações e extensões

3.2. Extensões

obtém-se

$$\sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^5 - \dots$$

Então, ignorando os termos quadrados e de ordem superior tem-se

$$\sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x}$$

e

$$O'A' = \delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.17)$$

3. Deformações e extensões

3.2. Extensões

Substituindo para O'A' na equação 3.16 tem-se

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

De forma idêntica, faz-se a análise nas outras direções, resultando em

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

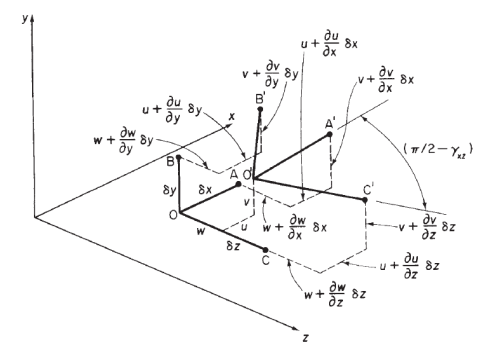
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(3.18)

3. Deformações e extensões

3.2. Extensões



A extensão de corte num ponto do corpo é definida como a variação do ângulo entre duas linhas perpendiculares no ponto. Assim, se a extensão de corte no plano xz é γ_{xz} , então o ângulo entre a linha OA deslocada e a linha OC deslocada na *figura 3.11* é $\pi/2 - \gamma_{xz}$ radianos.

Agora, $\cos(A'O'C') = \cos(\pi/2 - \gamma_{xz}) = \sin(\gamma_{xz})$ e como γ_{xz} é pequeno, então $\cos(A'O'C') = \gamma_{xz}$.

Das relações trigonométricas do triângulo

$$\cos(A'O'C') = \frac{(O'A')^2 + (O'C')^2 - (A'C')^2}{2(O'A')(O'C')} \quad (3.19)$$

Já foi visto antes (equação 3.17) que

$$O'A' = \delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

3. Deformações e extensões

3.2. Extensões

De forma idêntica

$$O'C' = \delta z \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Para pequenos deslocamentos as derivadas de u , v e w são pequenas comparadas com a unidade, por isso como estamos preocupados com o comprimento e não com a variação do comprimento, podemos usar as aproximações

$$O'A' \approx \delta x \quad ; \quad O'C' \approx \delta z$$

Novamente para uma primeira aproximação

$$(A'C')^2 = \left(\delta z - \frac{\partial w}{\partial x} \delta x \right)^2 + \left(\delta x - \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \right)^2$$

3. Deformações e extensões

3.2. Extensões

Substituindo para $O'A'$, $O'C'$ e $A'C'$ na equação (3.19) tem-se

$$\cos(A'O'C') = \frac{(\delta x)^2 + (\delta z)^2 - \left(\delta z - \frac{\partial w}{\partial x} \delta x \right)^2 - \left(\delta x - \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \right)^2}{2\delta x \delta z}$$

Expandindo e desprezando as potências de segunda ordem, tem-se

$$\cos(A'O'C') = \frac{2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta x \delta z + 2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta x \delta z}{2\delta x \delta z}$$

ou

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

3. Deformações e extensões

3.2. Extensões

As três extensões de corte ficam

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.20}$$

Deve salientar-se que as equações (3.18) e (3.20) são derivadas com base no pressuposto que os deslocamentos são pequenos. Normalmente estas equações linearizadas são adequadas para a maioria dos tipos de problemas estruturais mas nos casos onde as defleções são grandes, como em cabos suspensos por exemplo, tem que se usar as equações não-lineares completas para deslocamentos grandes.

4. Equações de compatibilidade

Na secção anterior, as seis componentes da extensão num ponto de um corpo deformável foram expressas em função do deslocamento nesse ponto u , v e w .

Foi assumido que o corpo permanece contínuo durante a deformação sem que se formem vazios.

Daqui resulta que cada componente u , v e w tem que ser uma função contínua de valor único, ou seja

$$u = f_1(x, y, z) \quad ; \quad v = f_2(x, y, z) \quad ; \quad w = f_3(x, y, z)$$

Se houvesse vazios presentes, os deslocamentos do corpo em regiões separadas pelos vazios seriam expressos como funções diferentes de x , y e z .

4. Equações de compatibilidade

A existência de apenas três funções de valor único para os deslocamentos é a expressão da continuidade ou *compatibilidade* do deslocamento que foi pressuposto.

Uma vez que as seis extensões são definidas em termos das funções de deslocamento, então elas devem apresentar uma relação entre si e não podem ter valores arbitrários.

Estas relações podem ser obtidas da seguinte forma.

Derivando γ_{xy} da equação (3.20) em ordem a x e y dá

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

ou, uma vez que as funções u e v são contínuas

4. Equações de compatibilidade

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x}$$

e que, usando a equação (3.18), pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \quad (3.21)$$

De forma semelhante

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \quad (3.23)$$

4. Equações de compatibilidade

Se agora derivarmos γ_{xy} em ordem a x e z e adicionarmos o resultado a γ_{zx} derivado em ordem a y e x , obtém-se

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Substituindo das equações (3.18) e (3.21) e rearranjando tem-se

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.24)$$

4. Equações de compatibilidade

De forma idêntica pode obter-se

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.25)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3.26)$$

As equações (3.21) a (3.26) são as seis equações de *compatibilidade* de extensões que devem ser satisfeitas na solução de problemas tridimensionais de elasticidade.



UBI
Covilhã
Portugal

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.1. Extensões planas

Apesar de termos derivado as equações de compatibilidade e as expressões para a extensão no estado de extensão tridimensional vamos dedicar mais atenção ao caso bidimensional.

O estado de extensão correspondente, em que é assumido que as partículas do corpo sofrem deslocamentos apenas no plano, chama-se *estado plano* de extensão.

Suponhamos que este plano, tal como na tensão plana, é o plano xy .

Então ε_z , γ_{xz} e γ_{yz} tornam-se zero e as equações (3.18) e (3.20) reduzem-se a

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\tag{3.27}$$

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.1. Extensões planas

e

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.28)$$

Também, substituindo $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ nas equações de compatibilidade e notando que ε_x , ε_y e γ_{xy} são agora funções apenas de x e y , fica-se só com a equação (3.21), ou seja

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$$

como sendo a única equação de compatibilidade de extensão no plano.

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.2. Extensões em planos inclinados

Tendo definido a extensão num ponto dum corpo deformável com referência a um sistema de eixos coordenados arbitrários, podemos calcular as extensões diretas em qualquer direção e a mudança no ângulo (extensão de corte) entre quaisquer direções originalmente perpendiculares entre si nesse ponto.

Vamos analisar o caso de estado de extensão plana bidimensional considerado anteriormente.

Um elemento num corpo bidimensional sujeito ao sistema de tensão complexo da figura 3.12(a) vai distorcer na forma da figura 3.12(b).

Em particular, o elemento triangular ECD vai sofrer uma mudança de forma para E'C'D' com alterações correspondentes do comprimento EF e do ângulo EFC.

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.2. Extensões e rotações em planos inclinados

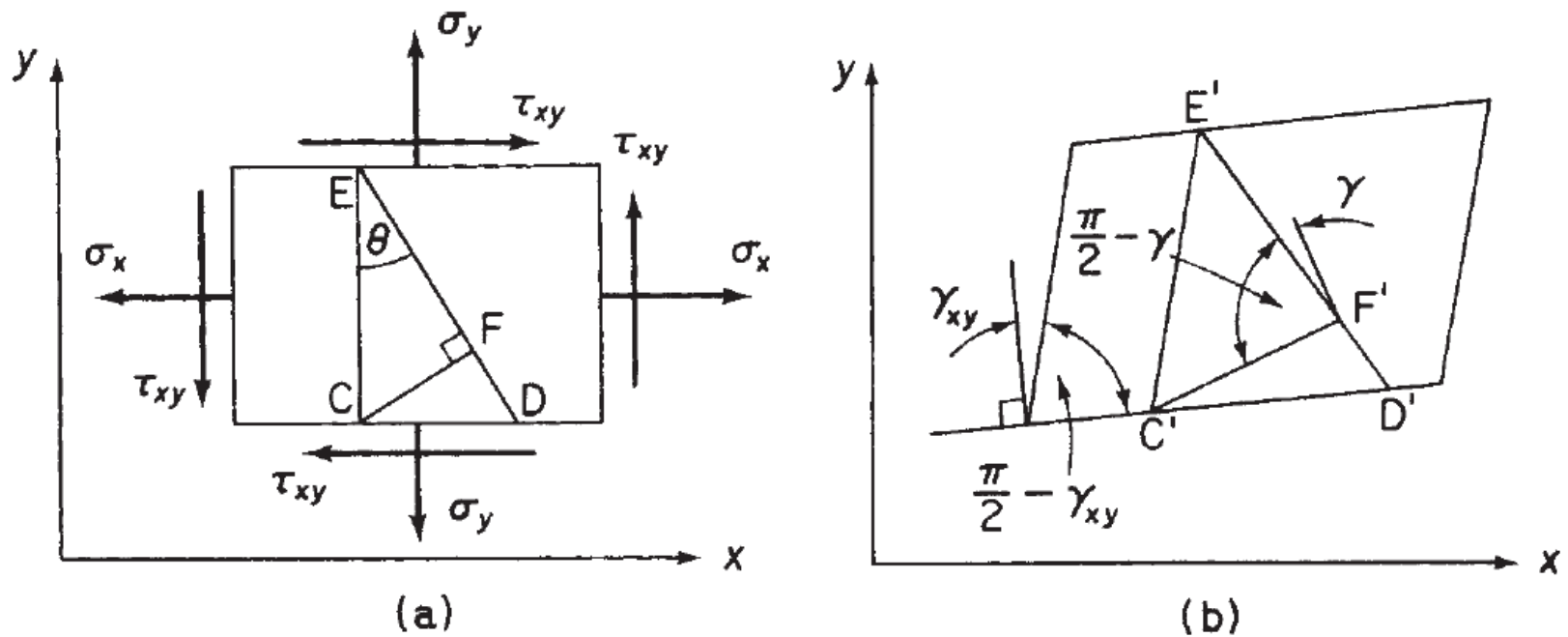


Figura 3.12 (a) Sistema de tensão num corpo retangular; (b) forma distorcida devido às tensões em (a).

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.2. Extensões em planos inclinados

Suponha que as extensões diretas e de corte conhecidas associadas ao sistema de tensão dado são ε_x , ε_y e γ_{xy} (as relações entre elas serão vistas mais tarde) e que queremos encontrar a extensão direta ε_n na direção normal ao plano ED e a extensão de corte γ produzida pela tensão de corte que atua no plano ED.

A aproximação até à primeira ordem é

$$\begin{aligned} C'D' &= CD(1 + \varepsilon_x) \\ C'E' &= CE(1 + \varepsilon_y) \\ E'D' &= ED(1 + \varepsilon_{n+\pi/2}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $\varepsilon_{n+\pi/2}$ é a extensão direta na direção ED.

Da geometria do triângulo E'C'D' onde o ângulo E'C'D' é $\pi/2 - \gamma_{xy}$

$$(E'D')^2 = (C'D')^2 + (C'E')^2 - 2(C'D')(C'E')\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right)$$

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.2. Extensões em planos inclinados

ou, substituindo da equação (3.29),

$$(ED)^2(1 + \varepsilon_{n+\pi/2})^2 = (CD)^2(1 + \varepsilon_x)^2 + (CE)^2(1 + \varepsilon_y)^2 - 2(CD)(CE)(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)\sin \gamma_{xy}$$

Notando que $(ED)^2 = (CD)^2 + (CE)^2$ e desprezando os quadrados e potências superiores de valores pequenos, esta equação pode ser escrita na forma

$$2(ED)^2 \varepsilon_{n+\pi/2} = 2(CD)^2 \varepsilon_x + 2(CE)^2 \varepsilon_y - 2(CE)(CD)\gamma_{xy}$$

Dividindo tudo por $2(ED)^2$ tem-se

$$\varepsilon_{n+\pi/2} = \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (3.30)$$

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.2. Extensões em planos inclinados

A extensão ε_n na direção normal ao plano ED é obtida substituindo o ângulo θ na equação (3.30) por $\theta - \pi/2$.

Daqui

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (3.31)$$

Prestando agora atenção ao triângulo C'E'E' tem-se

$$(C'E')^2 = (C'F')^2 + (F'E')^2 - 2(C'F')(F'E')\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \quad (3.32)$$

com

$$C'E' = CE(1 + \varepsilon_y)$$

$$C'F' = CF(1 + \varepsilon_n)$$

$$F'E' = FE(1 + \varepsilon_{n+\pi/2})$$

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.2. Extensões em planos inclinados

Substituindo para C'E', C'F' e F'E' e escrevendo $\sin \gamma$ em substituição de $\cos(\pi/2 - \gamma)$ tem-se

$$(CE)^2(1 + \varepsilon_y)^2 = (CF)^2(1 + \varepsilon_n)^2 + (FE)^2(1 + \varepsilon_{n+\pi/2})^2 - 2(CF)(FE)(1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon_{n+\pi/2})\sin \gamma \quad (3.33)$$

Assume-se que todas as extensões são pequenas, pelo que as suas potências de 2 ou superiores são desprezadas.

Também se tem $\sin \gamma \approx \gamma$ e, então, a equação (3.33) fica

$$(CE)^2(1 + 2\varepsilon_y) = (CF)^2(1 + 2\varepsilon_n) + (FE)^2(1 + 2\varepsilon_{n+\pi/2}) - 2(CF)(FE)\gamma$$

Da figura 3.12(a) vê-se que $(CE)^2 = (CF)^2 + (FE)^2$.

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.2. Extensões em planos inclinados

Assim, tem-se

$$2(CE)^2 \varepsilon_y = 2(CF)^2 \varepsilon_n + 2(FE)^2 \varepsilon_{n+\pi/2} - 2(CF)(FE)\gamma$$

Dividindo tudo por $2(CE)^2$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_n \sin^2 \theta + \varepsilon_{n+\pi/2} \cos^2 \theta - \gamma \sin \theta \cos \theta$$

E resolvendo em ordem a γ

$$\gamma = \frac{\varepsilon_n \sin^2 \theta + \varepsilon_{n+\pi/2} \cos^2 \theta - \varepsilon_y}{\sin \theta \cos \theta}$$

Substituindo ε_n e $\varepsilon_{n+\pi/2}$ das equações (3.31) e (3.30) dá

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \sin 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (3.34)$$

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.3. Extensões principais

Se compararmos as equações (3.31) e (3.34) com as equações (3.08) e (3.09) observamos que aquelas podem ser obtidas destas substituindo σ_n por ε_n , σ_x por ε_x , σ_y por ε_y , τ_{xy} por $\gamma_{xy}/2$ e τ por $\gamma/2$.

Então, para cada dedução feita para as equações (3.08) e (3.09) relativamente a σ_n e τ , existe uma dedução correspondente das equações (3.31) e (3.34) relativamente a ε_n e $\gamma/2$.

Então, num ponto de um corpo deformável, existem dois planos perpendiculares entre si nos quais a extensão de corte γ é nula e as extensões diretas são máximas ou mínimas.

Estas extensões, são as *extensões principais* nesse ponto.

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.3. Extensões principais

Por comparação com as equações (3.11) e (3.12), as extensões principais são dadas por

$$\varepsilon_I = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (3.35)$$

e

$$\varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (3.36)$$

Se a extensão de corte for zero nestes planos, então a tensão de corte também tem que ser zero e, neste caso, as direções das extensões principais e das tensões principais são coincidentes.

Os planos são determinados a partir da equação (3.10) ou de

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (3.37)$$

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.3. Extensões principais

A extensão de corte máxima num ponto é

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (3.38)$$

ou

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)_{\max} = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \quad (3.39)$$

5. Extensões e rotações em eixos coordenados

5.4. Círculo de Mohr

O círculo de Mohr pode ser aplicado às extensões da mesma forma que foi aplicado às tensões.

Um círculo de extensões, idêntico ao da *figura 3.10(b)*, pode ser desenhado quando σ_x , σ_y , etc. são substituídos por ε_x , ε_y , etc..

As extremidades horizontais do círculo representam as extensões principais, o raio do círculo, metade da extensão de corte máxima e assim sucessivamente.

6. Relações tensão-extensão

Nas secções anteriores foram desenvolvidas **três equações de equilíbrio** (3.05) e **seis relações de extensão-deformação** (3.18) e (3.20) para um corpo elástico tridimensional.

Das últimas foram eliminados os deslocamentos para permitir obter seis equações auxiliares que relacionam as extensões.

Estas equações de compatibilidade são uma forma de exprimir a continuidade do deslocamento necessária para a análise.

Desta forma, foram obtidas 9 equações independentes para a solução de um problema de tensão tridimensional.

No entanto, o número de incógnitas é 15, compreendendo 6 tensões, 6 extensões e 3 deslocamentos.

Logo, é necessário um outro conjunto de 6 equações para poder resolver o problema.

6. Relações tensão-extensão

Até agora não foram dadas relações para força-deslocamento ou tensão-extensão no corpo.

Estas relações vão providenciar as 6 equações necessárias.

Antes de as derivar é importante tecer algumas considerações gerais da análise.

A derivação das equações de equilíbrio, das relações extensão-deslocamento e das equações de compatibilidade não envolve qualquer assunção relativamente ao comportamento tensão-extensão do material do corpo.

Daqui conclui-se que estas equações são aplicáveis a qualquer tipo de corpo contínuo deformável independentemente da complexidade do seu comportamento sob tensão.

6. Relações tensão-extensão

Vamos considerar apenas o caso simples de materiais *isotrópicos* linearmente elásticos para os quais a tensão é diretamente proporcional à extensão e cujas propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções.

Um material que possui as mesmas propriedades em todos os pontos é um material *homogéneo*.

Aparecem casos particulares onde algumas componentes da tensão são nulas e o número de incógnitas pode não ser maior do que as equações de equilíbrio restantes que não desapareceram.

As tensões desconhecidas são então obtidas apenas a partir das condições de equilíbrio e está-se perante um problema *estaticamente indeterminado*.

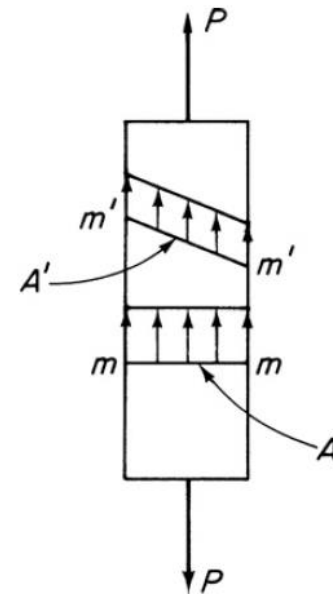
6. Relações tensão-extensão

Por exemplo, a tensão uniforme no membro que suporta uma carga de tração P na *figura 3.03* é obtida aplicando uma equação de equilíbrio e uma condição de fronteira.

Este sistema é estaticamente determinado.

Sistemas estaticamente indeterminados precisam de usar algumas, ou todas, das equações que envolvem extensão-deslocamento e tensão-extensão.

No entanto, seja o sistema estaticamente determinado ou não, as relações tensão-extensão são necessárias para determinar as defleções.



6. Relações tensão-extensão

Vamos investigar a relação entre a tensão e a extensão num corpo tridimensional, linearmente elástico e isotrópico.

Experiências mostram que a aplicação de uma tensão direta uniforme, σ_x , não produz qualquer distorção de corte no material e que a extensão direta ε_x é dada por

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.40)$$

onde E é o *módulo elástico* longitudinal ou *módulo de Young*.

A equação (3.40) é uma expressão da lei de Hook.

6. Relações tensão-extensão

Também existem extensões laterais que contribuem para ε_x

$$\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$
$$\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$
(3.41)

onde ν é o coeficiente de Poisson.

Para um corpo sujeito a tensões diretas σ_x , σ_y e σ_z , as extensões diretas são, das equações (3.40) e (3.41) e do princípio da sobreposição,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$
(3.42)

6. Relações tensão-extensão

As equações (3.42) podem ser resolvidas em ordem às tensões em função das extensões, o que dá

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_x \quad (3.43)$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_y \quad (3.44)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_z \quad (3.45)$$

ou

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$

6. Relações tensão-extensão

Para o caso de tensão plana em que $\sigma_z=0$, as equações (3.43) e (3.44) reduzem-se a

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (3.46)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (3.47)$$

Suponha-se agora que, num ponto arbitrário no material, existem as extensões principais ε_I e ε_{II} correspondentes às tensões principais σ_I e σ_{II} .

Se estas tensões (e extensões) estiverem nas direções de x e y , respetivamente, então $\tau_{xy}=\gamma_{xy}=0$ e da equação (3.34) a extensão de corte num plano arbitrário no ponto inclinado de um ângulo θ em relação aos eixos principais é

6. Relações tensão-extensão

$$\gamma = (\varepsilon_I - \varepsilon_{II}) \sin 2\theta \quad (3.48)$$

Substituindo as relações (3.42) em (3.48) obtém-se

$$\gamma = \frac{1}{E} [(\sigma_I - \nu\sigma_{II}) - (\sigma_{II} - \nu\sigma_I)] \sin 2\theta$$

ou

$$\gamma = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_I - \sigma_{II}) \sin 2\theta \quad (2.49)$$

Usando a equação (3.09) e notando que neste caso $\tau_{xy}=0$ e $\sigma_I=\sigma_x$ e $\sigma_{II}=\sigma_y$

$$2\tau = (\sigma_I - \sigma_{II}) \sin 2\theta$$

6. Relações tensão-extensão

Daqui pode escrever-se

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau \quad (3.50)$$

O termo $E/[2(1+\nu)]$ é a constante conhecida como *módulo de corte* G .

Logo

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

e as extensões de corte γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} são expressas em termos das suas tensões de corte associadas da seguinte forma

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (3.51)$$

6. Relações tensão-extensão

As equações (3.51), juntamente com as equações (3.42), formam as seis equações adicionais necessárias para determinar as 15 incógnitas num problema de elasticidade tridimensional.

Elas estão limitadas a corpos isotrópicos linearmente elásticos.

Para o caso de tensões planas, as equações simplificam para dar

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\tag{3.52}$$

6. Relações tensão-extensão

Pode ver-se da terceira das equações (3.52) que as condições de tensão plana e extensão plana não descrevem necessariamente situações idênticas.

Mudanças nas dimensões lineares de um corpo sob extensão podem levar a alterações do seu volume.

Suponha-se que um elemento pequeno tem dimensões δ_x , δ_y e δ_z .

Quando sujeito a um sistema de tensão tridimensional, o elemento sofrerá uma extensão volumétrica e (mudança do volume por unidade de volume) igual a

$$e = \frac{(1 + \varepsilon_x)\delta x(1 + \varepsilon_y)\delta y(1 + \varepsilon_z)\delta z - \delta x\delta y\delta z}{\delta x\delta y\delta z}$$

6. Relações tensão-extensão

Desprezando os produtos de pequenas quantidades na expansão do lado direito da equação dá

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.53)$$

Substituindo para ε_x , ε_y e ε_z das equações (3.42), obtém-se, para um corpo isotrópico linearmente elástico

$$e = \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)]$$

ou

$$e = \frac{(1-2\nu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3.53)$$

6. Relações tensão-extensão

No caso de uma pressão hidrostática uniforme $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ e então

$$e = -\frac{3(1-2\nu)}{E} p \quad (3.54)$$

A constante $E/[3(1-2\nu)]$ é conhecida como o *módulo bulk* ou *módulo da expansão volumétrica* e tem normalmente o símbolo K .

Examinando a equação (3.54), pode ver-se que $\nu \leq 0.5$ uma vez que um corpo não pode aumentar o volume quando sob uma pressão externa.

As dimensões do corpo também não podem aumentar quando o corpo está sujeito a tensão uniaxial pelo que $\nu > 0$.

6. Relações tensão-extensão

Assim, num material isotrópico $0 \leq \nu \leq 0,5$ e para a maior parte dos materiais isotrópicos abaixo do limite elástico ν está entre 0,25 e 0,33.

Acima do limite elástico ν aumenta e aproxima-se de 0,5.

6. Relações tensão-extensão

Exemplo 3.04: Um elemento retangular num material isotrópico linearmente elástico está sujeito a tensões de tração de 83N/mm^2 e 65N/mm^2 em planos perpendiculares entre si. Determine a extensão na direção de cada tensão e na direção perpendicular a ambas as tensões. Calcule também as extensões principais, a tensão de corte máxima, a extensão de corte máxima e as suas direções no ponto. Considere $E= 200000\text{N/mm}^2$ e $\nu=0,3$.

6. Relações tensão-extensão

Exemplo 3.05: Num ponto de um membro estrutural com um sistema de tensões planas estão aplicadas as tensões $\sigma_x=60\text{N/mm}^2$, $\sigma_y=-40\text{N/mm}^2$ e $\tau_{xy}=50\text{N/mm}^2$. Se o módulo de Young é $E=200000\text{N/mm}^2$ e o coeficiente de Poisson é $\nu=0,3$ calcule as extensões diretas em x e y e a extensão de corte no ponto. Calcule também as extensões principais e a sua inclinação em relação ao plano onde atua σ_x . Verifique as respostas graficamente.

7. Teoria da elasticidade

As secções anteriores desenvolveram um conjunto significativo de equações válidas para o interior da estrutura (ou componente) e para a sua fronteira.

Note-se que dispomos de 15 equações e 15 incógnitas:

Incógnitas:

6 tensões + 6 extensões + 3 deformações internas

Equações:

3 eq. de equilíbrio + 6 eq. tensão-extensão + 6 eq. extensão-deslocamento

7. Teoria da elasticidade

Uma forma de solucionar este problema passa pela resolução simultânea deste conjunto de equações.

Porém, a teoria da elasticidade oferece uma abordagem diferente que consiste na consideração individual e faseada de cada conjunto de equações.

São possíveis duas abordagens: por *formulação das tensões* ou por *formulação dos deslocamentos*.

Ambas requerem o uso das equações de equilíbrio para as tensões mas fazem diferentes opções em termos de variáveis.

7. Teoria da elasticidade

7.1. Formulação das tensões

A formulação das tensões segue o seguinte procedimento:

1. Equações de equilíbrio em termos de tensões;
2. Equações de compatibilidade em termos de extensões;
3. Equações de tensão-extensão;
4. Condições de fronteira que envolvam apenas trações (que são relacionadas com as tensões internas através das equações de Cauchy).

7. Teoria da elasticidade

7.2. Formulação dos deslocamentos

A formulação dos deslocamentos segue o seguinte procedimento:

1. Equações de equilíbrio em termos de tensões;
2. Equações de tensão-extensão;
3. Equações de extensão-deslocamento;
4. Condições de fronteira que envolvam trações ou deslocamentos.

8. Equações constitutivas

8. Equações constitutivas

8.1. Materiais ortotrópicos

Um material pode ser definido como sendo ortotrópico se possuir diferentes características físicas (mecânicas) e térmicas relativamente às três direções ortogonais de referência. Alguns exemplos: contraplacado de madeira, compósito laminado, etc..

Se assumirmos que um material tem um comportamento puramente elástico, então podemos estabelecer uma relação direta entre a tensão aplicada e a extensão verificada.

A constante de proporcionalidade entre ambas é conhecida como módulo de elasticidade ou módulo de Young (E).

A relação matemática, conhecida como Lei de Hooke, assume a forma

$$\sigma = E\varepsilon$$

8. Equações constitutivas

8.1. Materiais ortotrópicos

Assim, se considerarmos a extensão provocada por uma tensão aplicada segundo a direção x , tem-se

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

No entanto, verifica-se que em grande parte dos materiais elásticos que sofrem um alongamento segundo uma dada direção de referência se dá um “encurtamento” nas restantes outras duas direções perpendiculares.

Este fenómeno é conhecido como efeito de Poisson e é traduzido pelo coeficiente de Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}$$

8. Equações constitutivas

8.1. Materiais ortotrópicos

Para um material ortotrópico existem diferentes coeficientes de Poisson conforme se considerem interações entre diferentes direções de referência.

Adota-se, pois, uma representação com dois subscritos com a seguinte convenção:

- 1º subscrito: identifica a direção da extensão de onde deriva o efeito;
- 2º subscrito: identifica a direção para onde o efeito é transferido;

Portanto, a influência das tensões aplicadas segundo y e z nas extensões consideradas segundo x podem ser aferidas considerando, respetivamente

$$-\nu_{yx} \frac{\sigma_{yy}}{E_y} \quad ; \quad -\nu_{zx} \frac{\sigma_{zz}}{E_z}$$

8. Equações constitutivas

8.1. Materiais ortotrópicos

Então, a extensão total segundo a direção x é dada pela expressão

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_{yy}}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_{zz}}{E_z}$$

Note-se que as extensões segundo cada direção de referência apenas sofrem o efeito das tensões diretas aplicadas segundo essas direções, não havendo influência das tensões de corte.

Contudo, as tensões de corte levarão a distorções nas componentes que terão diferentes valores consoante o plano de referência considerado.

Assim, podemos escrever as seguintes relações lineares entre diferentes pares de tensões e extensões de corte

$$\gamma_{xy} = \sigma_{xy} / G_{xy} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \sigma_{xz} / G_{xz} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \sigma_{yz} / G_{yz}$$

8. Equações constitutivas

8.1. Materiais ortotrópicos

A constante de proporcionalidade G tem o nome de módulo de elasticidade transversal ou de corte.

Finalmente, há que considerar possíveis extensões associadas a efeitos térmicos.

Assim, se um dado material ortotrópico, com um coeficiente de expansão térmica α , sofrer uma variação de temperatura dada por ΔT , então a extensão consequente avaliada segundo a direção x será

$$\varepsilon_{xx} = \alpha_x \cdot \Delta T$$

Note-se que os efeitos térmicos não induzem tensões de corte e são independentes da aplicação de quaisquer tipos de cargas mecânicas!

8. Equações constitutivas

8.1. Materiais ortotrópicos

Combinando todas as contribuições (mecânicas e térmicas) para as deformações atuantes num material ortotrópico, podemos escrever as equações tensão-deformação completas que, em formato matricial, assumem o seguinte aspeto

$$\{\gamma\} = [S]\{\sigma\} + \Delta T\{\alpha\} \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \{\gamma\} &= \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \\ \{\sigma\} &= \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}\}^T \\ \{\alpha\} &= \{\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \end{aligned}$$

8. Equações constitutivas

8.1. Materiais ortotrópicos

e

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & -\nu_{zx}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & -\nu_{zy}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xz}/E_x & -\nu_{yz}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} \end{bmatrix}$$

é a matriz de flexibilidade.

Atendendo a que a matriz de flexibilidade deve ser simétrica, então facilmente chegamos a três relações entre os módulos de elasticidade e os coeficientes de Poisson

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad ; \quad \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}}{E_z} \quad ; \quad \frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y}$$

8. Equações constitutivas

8.1. Materiais ortotrópicos

Alguma manipulação algébrica pode ser feita de modo a encontrarmos um conjunto de equações que relacionem as tensões com as deformações.

Assim, multiplicando a equação (3.55) pela inversa da matriz de flexibilidade

$$\begin{aligned} [S]^{-1}\{\gamma\} &= [S]^{-1}[S]\{\sigma\} + [S]^{-1}\Delta T\{\alpha\} \\ \Rightarrow \{\sigma\} &= [S]^{-1}\{\gamma\} - \Delta T[S]^{-1}\{\alpha\} \end{aligned}$$

Considerando que a inversa da matriz de flexibilidade assume a designação de matriz de rigidez e é representada por $[K]$

$$\boxed{\{\sigma\} = [K]\{\gamma\} - \Delta T[K]\{\alpha\}} \quad (3.56)$$

Estas são as equações *tensão-deformação* ou *constitutivas*.

8. Equações constitutivas

8.2. Materiais isotrópicos

Um material isotrópico é aquele que evidencia as mesmas propriedades (mecânicas e térmicas) em todas as direções (ex: maioria dos metais).

As equações constitutivas para um material isotrópico podem ser obtidas por simplificação daquelas relativas aos materiais ortotrópicos, havendo apenas um valor único para E , G , ν e α em todas as direções

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

8. Equações constitutivas

8.2. Materiais isotrópicos

ou

$$\{\gamma\} = [S]\{\sigma\} + \Delta T\{\alpha\}$$

As equações tensão-deformação podem ser obtidas recorrendo às constantes de Lamé λ e μ

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T & ; & \quad \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{yy} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T & ; & \quad \sigma_{xz} = G\gamma_{xz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{zz} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \Delta T & ; & \quad \sigma_{yz} = G\gamma_{yz}\end{aligned}\tag{3.58}$$

onde

$$\begin{aligned}e &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & ; & \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} & ; & \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\end{aligned}\tag{3.59}$$

8. Equações constitutivas

8.2. Materiais isotrópicos

Foi anteriormente demonstrado noutras disciplinas (Mecânica dos Materiais) que, para o caso dum material isotrópico, a constante de Lamé μ é igual ao módulo de elasticidade transversal G .

Por isso

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Da expressão anterior, constata-se que só existem duas constantes elásticas independentes para o caso de um material isotrópico.

O intervalo de variação possível para o coeficiente de Poisson de um material isotrópico (excluindo casos especiais!) é

$$0 \leq \nu \leq 0.5$$

8. Equações constitutivas

8.2. Materiais isotrópicos

Pode ainda definir-se um outro tipo de material $\Rightarrow$ material anisotrópico: aquele que não tem eixos ou planos de simetria em termos das suas propriedades, havendo uma interação entre todas as tensões e extensões independentemente da direção de referência considerada (i.e., a matriz de flexibilidade não tem zeros).

Esta é uma situação muito pouco usual na prática.

8. Equações constitutivas

3.3. Estado plano de tensões

Considerando um estado plano de tensões, as equações gerais de tensão-deformação para um material ortotrópico reduzem-se para a seguinte forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & 0 \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

devendo considerar-se as seguintes equações auxiliares

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \wedge \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_{yy} + \alpha_z \Delta T \quad (3.61)$$

8. Equações constitutivas

8.3. Estado plano de tensões

As equações tensão-deformação para um material isotrópico podem ser obtidas invertendo as expressões anteriores e fazendo as simplificações necessárias

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

9. Extensometria

Existem diversas técnicas experimentais adequadas à medição de extensões.

No entanto, devido à sua simplicidade e relativo baixo custo, a utilização de extensómetros elétricos é seguramente a mais utilizada.

Um extensómetro elétrico baseia-se no princípio físico da variação da resistência elétrica de um condutor através da variação das suas dimensões físicas, i.e., comprimento e secção transversal.

Assim, quando um condutor é alongado (aumento de comprimento), resulta uma diminuição da sua secção transversal e, consequentemente, um aumento da sua resistência elétrica, e vice-versa.

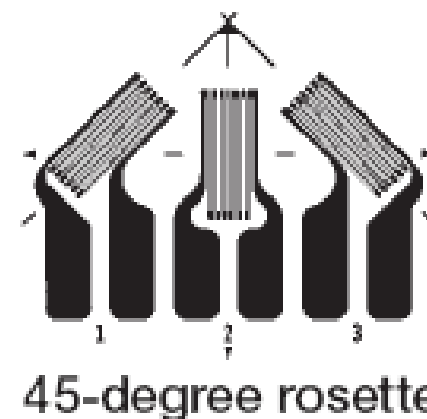
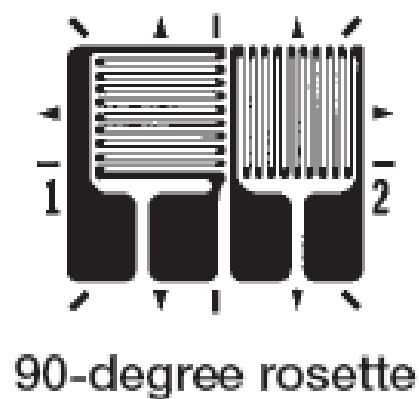
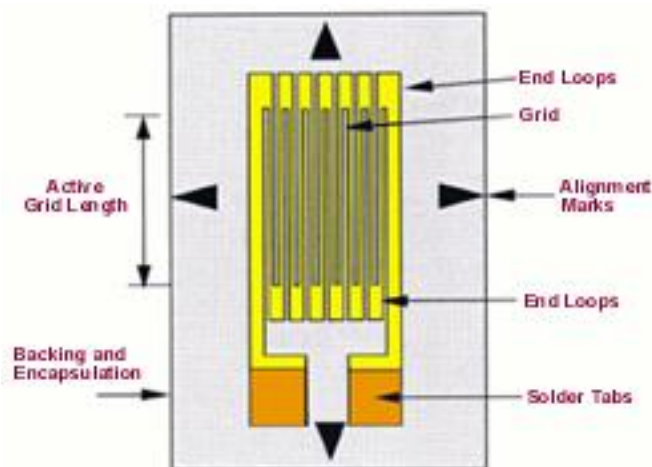
9. Extensometria

Este princípio físico foi usado a partir das décadas de 1930-40 para a medição efetiva de extensões em estruturas e componentes em engenharia.

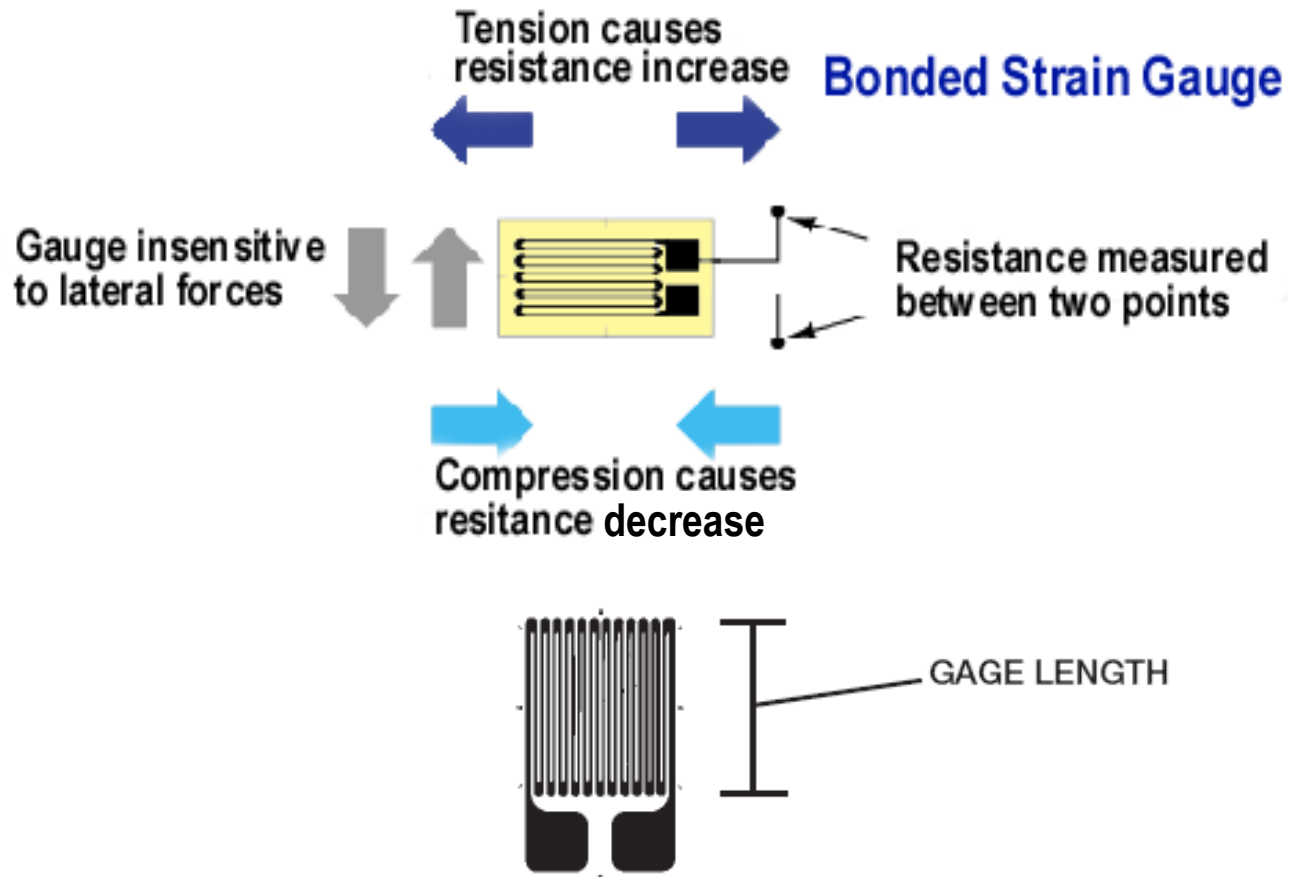
Note-se que, conhecendo as extensões num dado local de um componente, facilmente se conseguem definir os campos de tensões e deslocamentos associados a essa posição do extensómetro.

As figuras seguintes mostram algumas configurações geométricas de diferentes tipos de extensómetros.

9. Extensometria



9. Extensometria



9. Extensometria

A seleção apropriada de um extensómetro obedece a diferentes requisitos de instalação e operação, designadamente:

- sensibilidade do extensómetro em função do tipo de liga do filamento;
- tipo de material de suporte;
- valor nominal da resistência elétrica do extensómetro;
- configuração geométrica do extensómetro;
- temperatura(s) de serviço;
- comprimento útil do extensómetro (gauge length).

9. Extensometria

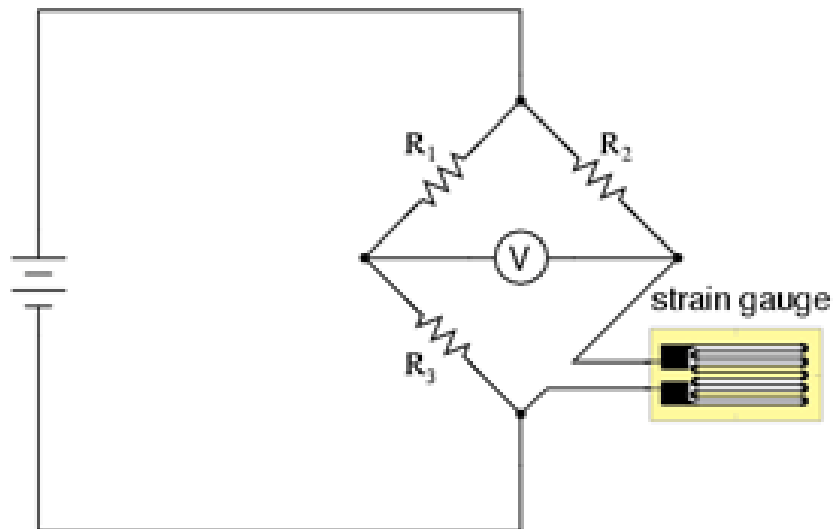
Outros constrangimentos operacionais devem ser considerados, tais como, por exemplo:

- precisão de medição;
- fiabilidade face a aplicação de cargas dinâmicas (fadiga);
- local de instalação;
- efeitos ambientais;
- ...

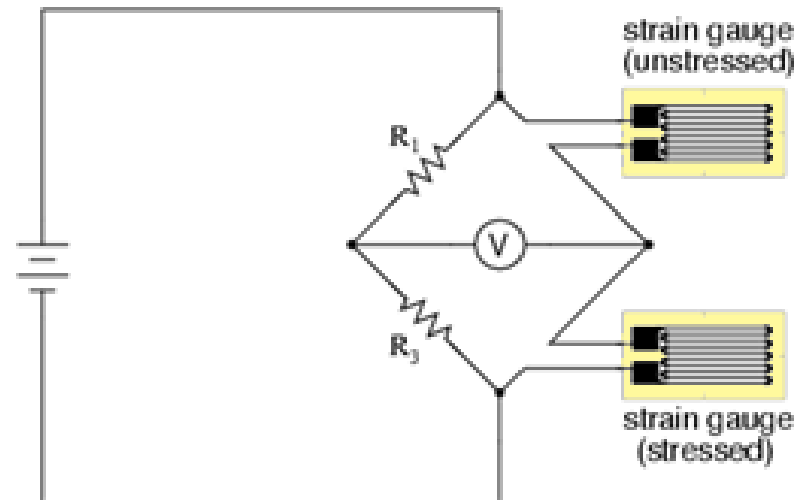
9. Extensometria

Habitualmente, a variação da resistência de um extensómetro é avaliada com recurso a uma ponte de Wheatstone, podendo assumir as configurações de quarto de ponte (uso de um extensómetro num ramo da ponte), meia ponte (dois extensómetros) ou ponte completa (4 extensómetros).

Quarter-bridge strain gauge circuit



Quarter-bridge strain gauge circuit with temperature compensation

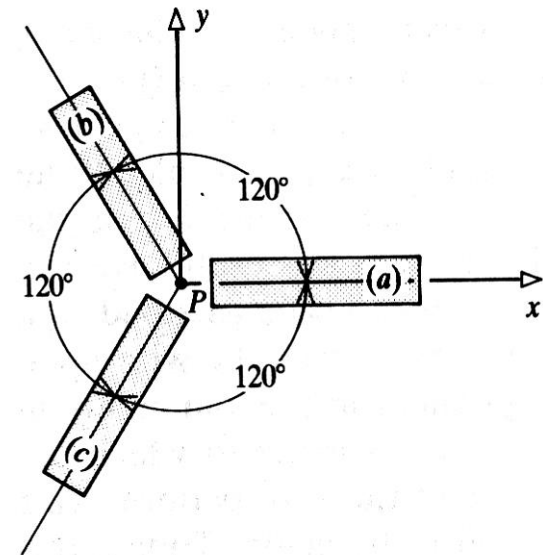


9. Extensometria

Vejamos, agora, como se consegue determinar um campo de extensões através da técnica de extensometria.

Considere-se, pois, um corpo sujeito a um carregamento arbitrário no qual se instala um extensómetro do tipo roseta, como o indicado na figura.

Podemos recorrer à equação (3.31) simplificada, uma vez que o extensómetro estando à superfície do corpo é perpendicular ao eixo z (i.e., todos os cosenos diretores com subscrito z são nulos).



9. Extensometria

Assim

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (3.63)$$

Devemos fazer coincidir, alternadamente, a direção n com a direção de cada extensómetro, de modo a que a extensão ε_n corresponda à extensão medida por cada extensómetro.

Isto resultará num sistema de 3 equações e 3 incógnitas ε_x , ε_y e γ_{xy} .

9. Extensometria

9.1. Medição experimental de extensões

Como visto acima, as tensões num ponto na superfície de um material podem ser obtidas através das extensões nesse ponto, usualmente com extensómetros de resistência eléctrica dispostos na forma de uma roseta como mostra a *figura 3.13*.

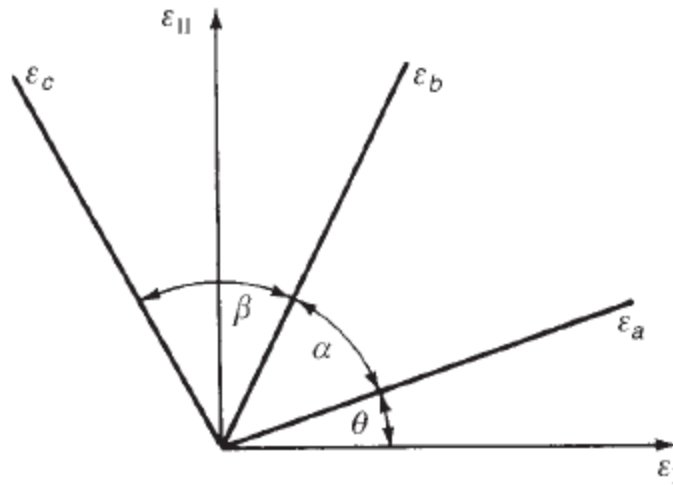


Figura 3.13 Roseta de extensómetros.

9. Extensometria

9.1. Medição experimental de extensões

Suponha-se que ε_I e ε_{II} são as extensões principais no ponto, então se ε_a , ε_b e ε_c forem as extensões medidas nas direções θ , $\theta+\alpha$ e $\theta+\alpha+\beta$ relativamente a ε_I , da relação geral das extensões diretas planas da equação (3.63) tem-se

$$\varepsilon_a = \varepsilon_I \cos^2 \theta + \varepsilon_{II} \sin^2 \theta \quad (3.64)$$

uma vez que ε_x fica ε_I , ε_y fica ε_{II} e γ_{xy} é zero pois as direções x e y ficaram as direções principais.

Reescrevendo a equação (3.64) tem-se

$$\varepsilon_a = \varepsilon_I \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + \varepsilon_{II} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)$$

ou

$$\varepsilon_a = \left(\frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} \right) + \left(\frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \right) \cos 2\theta \quad (3.65)$$

9. Extensometria

9.1. Medição experimental de extensões

De forma idêntica

$$\varepsilon_b = \left(\frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} \right) + \left(\frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \right) \cos 2(\theta + \alpha) \quad (3.66)$$

$$\varepsilon_c = \left(\frac{\varepsilon_I + \varepsilon_{II}}{2} \right) + \left(\frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \right) \cos 2(\theta + \alpha + \beta) \quad (3.67)$$

Assim, se ε_a , ε_b e ε_c são medidas em direções dadas, isto é ângulos α e β conhecidos, então ε_I , ε_{II} e θ são as únicas incógnitas nas equações (3.65)-(3.67).

As tensões principais são depois obtidas substituindo ε_I e ε_{II} nas equações (3.52).

Logo

$$\varepsilon_I = \frac{1}{E} (\sigma_I - \nu \sigma_{II}) \quad (3.68)$$

9. Extensometria

9.1. Medição experimental de extensões

e

$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{E}(\sigma_{II} - \nu\sigma_I) \quad (3.69)$$

Resolvendo as equações (3.68) e (3.69) obtém-se

$$\sigma_I = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_I + \nu\varepsilon_{II}) \quad (3.70)$$

e

$$\sigma_{II} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{II} + \nu\varepsilon_I) \quad (3.71)$$

Uma roseta típica pode ter $\alpha=\beta=45^\circ$ pelo que as extensões principais podem ser obtidas facilmente a partir do círculo de Mohr.

9. Extensometria

9.1. Medição experimental de extensões

Suponha-se que o braço a da roseta está inclinado de um ângulo desconhecido θ em relação ao eixo da extensão principal máxima como na *figura 3.13*.

O círculo de Mohr das extensões está mostrado na *figura 3.14*.

As extensões de corte γ_a , γ_b e γ_c não aparecem na análise e, por isso, são omitidas.

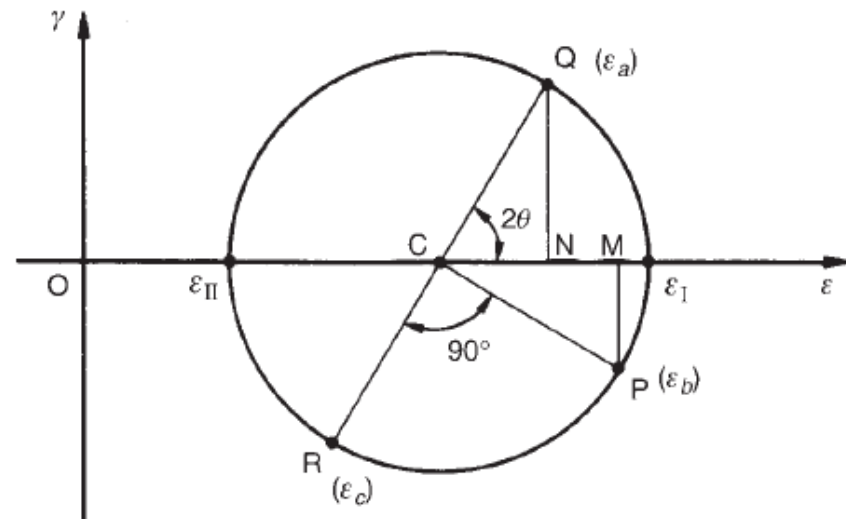


Figura 3.14 Roseta de extensómetros.

9. Extensometria

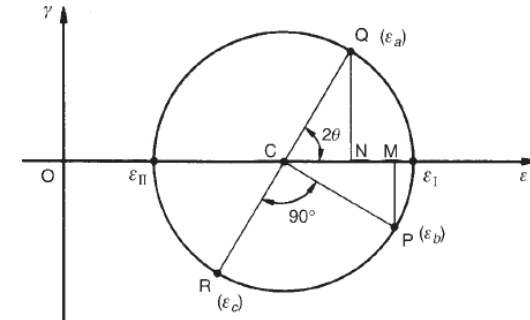
9.1. Medição experimental de extensões

Da figura 3.14

$$OC = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

$$CN = \varepsilon_a - OC = \frac{1}{2}(\varepsilon_a - \varepsilon_c)$$

$$QN = CM = \varepsilon_b - OC = \varepsilon_b - \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$



O raio do círculo é

$$CQ = \sqrt{CN^2 + QN^2}$$

Daqui

$$CQ = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_a - \varepsilon_c)\right]^2 + \left[\varepsilon_b - \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)\right]^2} \quad (3.72)$$

9. Extensometria

9.1. Medição experimental de extensões

que pode simplificar-se para dar

$$CQ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \quad (3.73)$$

Então, ε_I e ε_{II} que são dados, respetivamente, por

$$\varepsilon_I = OC + \text{raio do círculo}$$

$$\varepsilon_{II} = OC - \text{raio do círculo}$$

que ficam

$$\varepsilon_I = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \quad (3.74)$$

$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \quad (3.75)$$

9. Extensometria

9.1. Medição experimental de extensões

Finalmente, o ângulo θ é dado por

$$\tan 2\theta = \frac{QN}{CN} = \frac{\varepsilon_b - \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{\frac{1}{2}(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}$$

ou seja

$$\tan 2\theta = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} \quad (3.76)$$

Pode usar-se um procedimento idêntico para a roseta de 60° .

9. Extensometria

9.3. Círculo de Mohr

Exemplo 3.06: Uma barra de secção circular maciça tem um diâmetro de 50mm e suporta um binário, T , juntamente com uma carga de tração axial, P . Uma roseta retangular de extensómetros colocada na superfície da barra forneceu as seguintes medições: $\varepsilon_a = 1000 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_b = -200 \times 10^{-6}$ e $\varepsilon_c = -300 \times 10^{-6}$ em que a e c estão alinhado e perpendicular ao eixo da barra, respetivamente. Se o módulo de Young é $E = 70000 \text{ N/mm}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, calcular os valores de T e de P .